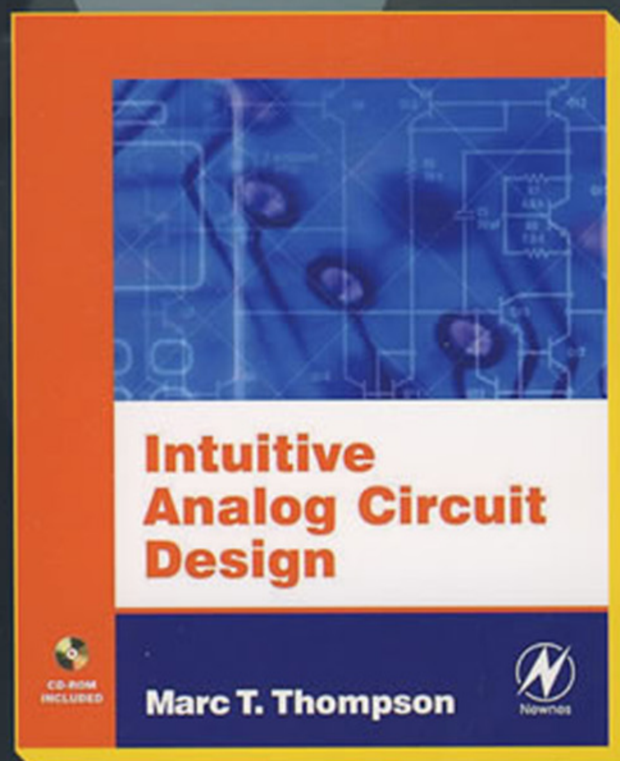
TURING 图灵电子与电气工程丛书

ELSEVIER 爱思唯尔

实用模拟电路设计

Intuitive Analog Circuit Design

[美] Marc T. Thompson 著
张乐锋 等译



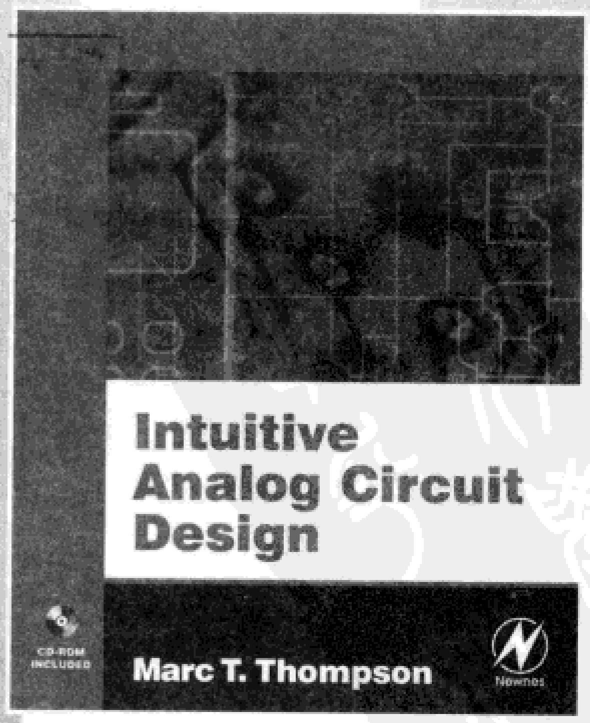
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵电子与电气工程丛书

实用模拟电路设计

Intuitive Analog Circuit Design

[美] Marc T. Thompson 著
张乐锋 等译



人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

实用模拟电路设计/（美）汤普森（Thompson, M. T.），著；张乐锋等译.—北京：人民邮电出版社，2009. 2

（图灵电子与电气工程丛书）

书名原文：Intuitive Analog Circuit Design: A Problem-Solving Approach using Design Case Studies

ISBN 978-7-115-19235-6

I. 实… II. ①汤… ②张… III. 模拟电路－电路设计 IV. TN710.02

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第181470号

内 容 提 要

本书是Marc Thompson博士20年模拟电路设计和教学经验的总结，讲述了模拟电路与系统设计中常用的直观分析方法。本书提出了“模拟电路直观方法学”，力图帮助学生和设计人员摆脱复杂的理论推导与计算，充分利用直观知识来应对模拟电路工程设计挑战。全书共分为16章，内容涵盖了二极管、晶体管、放大器、滤波器、反馈系统等模拟电路的基本知识与设计方法。

本书深入浅出，易学易懂，既适合作为大中专院校的教材与教学参考书，也可用作模拟电路设计人员的参考手册。

图灵电子与电气工程丛书

实用模拟电路设计

♦ 著 ［美］Marc T. Thompson
译 张乐锋 等
责任编辑 舒 立
执行编辑 马晓燕

♦ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号
邮编 100061 电子函件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京艺辉印刷有限公司印刷

♦ 开本：787×1092 1/16
印张：24
字数：568千字 2009年2月第1版
印数：1-3 000册 2009年2月北京第1次印刷

著作权合同登记号 图字：01-2008-3336号

ISBN 978-7-115-19235-6/TN

定价：59.00元

读者服务热线：（010）88593802 印装质量热线：（010）67129223

反盗版热线：（010）67171154

版 权 声 明

Intuitive Analog Circuit Design: A Problem-Solving Approach using Design Case Studies by Marc T.Thompson, Ph.D.,ISBN:0-7506-7786-4.

Authorized Simplified Chinese translation edition published by the Proprietor.

ISBN:978-981-272-1099.

Elsevier (Singapore) Pte Ltd.
3 Killiney Road
#08-01 Winsland House I
Singapore 239519
Tel: (65) 6349-0200
Fax: (65) 6733-1817

First Published 2009
2009年初版



译 者 序

模拟电路设计几乎无处不在，电力、交通、工业控制、信息技术、军事航空等领域都少不了它，模拟电路设计已成为电子技术类大中专学生的基本教学内容之一。本书作者Marc Thompson博士是模拟电路设计的一线教学人员，二十年孜孜不倦，积累了丰富的模拟电路教学经验。他同时又是模拟电路设计的一线工程师，拥有坚实的模拟电路实践经验。理论与实践紧密结合指导直观模拟电路设计，是本书的最大特色。译者在翻译本书的过程中，也深深地感受到作者的独具匠心、与众不同之处。本书既是很好的电路教学参考书，也是很好的电路实践参考书。

译者认为本书具有三大特点：理论讲述深入浅出、大量使用近似计算、电路实例恰到好处。作者在讲述二极管、晶体管、放大器的物理原理时，经常使用“思考性实验（thought experiment)”和耳熟能详的类比方法，使得这些深奥的理论一下子直观地（intuitively）呈现在读者面前。作者在推导二极管的*V/I*关系曲线、晶体管的带宽和增益等过程中进行了大量的近似计算。开路时间常数和短路时间常数方法本身就是一种近似计算技术，使用这些近似处理方法，大大简化了模拟电路的数学计算，同时又保证了这些直观的近似结果的工程可靠性。电路设计实例在书中随处可见，有些例子本身就是作者的电路实践，设计难度由浅入深，设计结果尤可借鉴。我们相信，任何从事模拟电路设计教学的人们，任何希望能快速、准确地设计模拟电路系统的人们，都会从本书的阅读中受益匪浅，这也是我们愿意翻译该书的原因所在。

全书共分为16章，可以分为三部分。第1章与第2章为介绍性材料，第3章到第8章讲述二极管和双极性晶体管方面的知识，第9章讲述CMOS管和CMOS管放大器的基础知识，第10章讲述晶体管的开关效应，这些内容可以作为本书的第一部分。第11章讲述反馈系统的理论，第12章和第13章讲述实际运算放大器的设计，第14章讲述模拟低通滤波器的设计与实现，第15章讲述实际电路设计问题，这可以作为本书的第二部分，是前面10章基础内容的提高与应用。第16章主要是一些电路分析技巧，这可以作为本书的第三部分。读者可以有选择地阅读本书的内容。刚接触模拟电路设计的读者可以只阅读第一部分的基础内容，有模拟电路设计基础的读者可以深入学习第二部分的提高内容，增强设计复杂模拟电路的能力。读者可以根据自己的喜好来决定是否阅读第三部分的内容。

本书主要由张乐锋翻译，张鼎校对。此外，参与本书翻译的还有张鼎、何小威、闫志强、邓彬、林龙信、肖枫涛、马蓉、陈钢、杨明军、焦贤龙、岳虹、肖国尊等。Be Flying工作室负责人肖国尊（http://blog.csdn.net/be_flying）负责本书翻译质量和进度的控制以及翻译思想的指导，在此表示衷心感谢。

译文虽经多次修改和校正，但是由于译者的水平有限，加之时间仓促，疏漏及缺点、错误在所难免，我们真诚地希望同行和读者不吝赐教，不胜感激之至。

张乐锋

2008年6月22日

于国防科技大学

前　　言

什么？又是一本模拟电路设计教科书？不，它可不仅仅是一本教科书。这本书更多地是要为一线的工程师和学生提供一本设计手册，以满足他们渴望多学习关于晶体管、二极管以及运算放大器的模拟电路设计与分析方面的实用技术的需要。同时，我更希望读者在阅读过程中能够发现，本书完美地结合了理论技术、设计实例以及测试结果。

我是一名工作在模拟与电力电子学领域一线的电子工程师，同时又在伍斯特理工学院（Worcester Polytechnic Institute，WPI）从事教学工作。

细心的读者只要对照本书各章的参考文献就会发现，我非常喜欢引用年代较为久远的文献资料。部分原因是这些早期著作与文章的作者们还没有计算机进行电路仿真，也无法在计算机上进行数值分析。而这些文献从多个方面给出了极其有用的近似计算方法（approximation）、直观分析方法（intuitive insight）以及用来解决较难的电路分析问题的不同方法。

读者对象

这本书是在我为伍斯特理工学院的研究生模拟电路设计课程编写的教学讲义的基础上编著而成的。参加这门课程的学生都学过晶体管、信号处理、伯德图等方面的本科生课程。此外，我还希望本书的内容对一线的模拟设计工程师（甚至数字设计工程师）能够有所帮助。

本书大纲

第1章与第2章为介绍性材料。第1章是本书的引言，同时介绍了模拟电路设计的发展动机，其中引用了一些精选的历史事件。第2章讲述后续章节中用到的重要的信号处理概念，以使读者们能够跟上作者的思路。

第3章到第8章讲述双极性器件的物理学原理、双极性结型晶体管（bipolar junction transistor，BJT）、晶体管放大器，以及用于带宽估计与开关速度分析的近似技术。

第9章讲述CMOS管和CMOS管放大器的基础知识。前面章节介绍的用于放大器设计的带宽估计技术也同样适用于CMOS管器件。

第10章讲述晶体管的开关效应。晶体管是如何实现导通和关闭呢？又如何估计它的开关速度呢？

第11章回顾反馈系统（feedback system）的基本知识以及设计稳定反馈系统的伯德图/相位裕度方法（Bode plot/phase margin）。

第12章和第13章讲述实际运算放大器的设计、使用和限制，包括电压反馈（voltage-feedback）以及电流反馈（current-feedback）放大器。

第14章讲述模拟低通滤波器设计的基本知识，包括巴特沃思（Butterworth）、切比雪夫（Chebyshev）、椭圆（elliptic）以及贝塞尔（Bessel）滤波器的无源梯形实现和有源实现。

第15章讲述实际电路设计问题，比如PCB版图设计规则、无源器件的使用和限制等。

第16章是一些有用的设计技术和设计技巧的大杂烩，这些内容又不适合放在其他章节，

所以作为独立的章节进行讲述。

一些说明性的分析问题以及MATLAB和PSPICE设计示例点缀在全书的字里行间，以帮助读者理解本书的内容。

致谢

我在这里要感谢麻省理工学院（Massachusetts Institute of Technology，MIT）的知名教授和助教们，他们向我传授了本书使用的许多模拟电路技术。他们包括Jim Roberge教授、Bill Siebert教授、Bill Peake教授、Marty Schlecht教授、Leo Casey、Tom Lee、Harry Lee教授、Campbell Searle教授、Amar Bose教授和Dick Thornton教授。

本书改编自我在伍斯特理工学院执教多年的模拟电路课程讲义。因此，这里还要感谢伍斯特理工学院以及它的学生和教职员工们，他们直接或间接地为本书提供了帮助。再次感谢伍斯特理工学院的学生们，他们在课堂上提出了富有针对性的问题，仔细地阅读了课程讲义，并且指出了讲义中大量的印刷错误和含混不清的用词，间接地为本书提供了帮助。衷心希望本书在出版时已经完全修正了类似的错误和不当的用词，不会对读者造成误解。

感谢Elsevier公司的员工为本书成功出版提供的耐心帮助和技术支持。我希望我的朋友加同事Alexander Kusko博士能够收到这份诚挚谢意，是他审阅了本书的书稿，并且提出了许多有用的建议。也要感谢我的朋友Jeff Roblee博士，他从机械工程师的视角阅读了本书的书稿，提出了许多有用的建议。

书中的曲线图使用了MATLAB软件和Microsim公司的PSPICE 8.0版学生版软件进行绘制。

Marc T. Thompson
Harvard Labs
Harvard, Massachusetts
2005年10月



目　　录

第1章 引 言

本章概要

- ❑ 本章介绍全书的知识体系与主题内容，叙述晶体管发展的简短历史，模拟集成电路的创新发明，以及运算放大器的发展。

1.1 模拟设计仍然必不可少

近年来，电路设计领域一个不可阻挡的发展趋势是“走向数字”，也就是说，出于所谓的“设计灵活性”的考虑，越来越多的信号转为用数字方式进行处理。然而，现实世界是个模拟空间，使用模拟处理方法便于电子电路与物理世界的互动。这里并不是有意忽视DSP以及其他数字技术的重要性，今天有许多模拟电路模块依然在使用，比如运算放大器、晶体管放大器、比较器、A/D和D/A变换器件、锁相环与电压参考源等，并且在可以预见的未来仍然还会继续使用它们。因此，模拟电路设计基本原理与高级技术的课程建设与教育培训需求依然存在。

模拟电路设计如此有趣的原因之一是它包含了诸多不同的学科领域。下面随机列出模拟电路设计这一广泛领域所涉及的部分学科。

- 模拟滤波器（analog filter）：分立或梯形滤波器、有源滤波器、开关电容滤波器、晶体滤波器。
- 音频放大器（audio amplifier）：功率运算放大器、输出级电路（扬声器驱动器）。
- 振荡器（oscillator）：包括LC振荡器、晶体振荡器、弛豫振荡器（relaxation oscillator）、反馈振荡器（feed back oscillator）、锁相环（phase-locked loop，PLL）、视频解调。
- 器件制造与器件物理学（Device fabrication and device physics）：金属氧化物半导体场效应晶体管（Metal oxide semiconductor field effect transistor，MOSFET）、双极性晶体管、二极管、绝缘栅极双极性晶体管（insulated gate bipolar transistor，IGBT）、可控硅整流器（silicon-controlled rectifier，SCR）、MOS控制型晶闸管（MOS-controlled thyristor，MCT）等。
- 集成电路制造（IC fabrication）：运算放大器、比较器、电压参考源、锁相环等。
- 模拟/数字接口（analog-to-digital interface）：A/D和D/A器件、电压参考源。
- 射频电路（radio frequency circuit）：射频（RF）放大器、滤波器、混频器（mixer）和传输线（transmission line）；有线电视（cable TV）。
- 控制领域（control）：控制系统设计和补偿、伺服机构（servomechanism）、速度控制。
- 电力电子（power electronics）：该领域需要MOSFET驱动器、控制系统设计、印制电路板（PCB）布线、热学以及磁学方面的知识，电机驱动器，晶体管、MOSFET、IGBT以及SCR等器件的制造。
- 医用电子（medical electronics）：仪表（例如EKG[①]、NMR）、（电击）去纤颤器

---

① EKG，也称ECG，全称是Electrocardio graphy，即心电图。它是描绘心脏或心肌在心跳期间引起的电压图表。NMR全称是nuclear magnetic resonance，即核磁共振。它是一种广泛应用于医学、化学等领域的成像技术。——编者注

(defibrillator)、植入式医疗器件（implanted medical device）。

- 仿真（simulation）：SPICE以及其他电路仿真器。
- PCB版图设计（PCB layout）：该领域需要电感和电容效应、接地、屏蔽以及PCB设计准则方面的知识。

既然我们还是生活在数字处理越来越普及的现实世界，那么模拟设计者也必须熟悉数字处理的概念，使得我们可以在模拟处理与数字处理之间相互协作。在数字世界中，某些子系统的设计必须以对应的模拟系统为基础。数字滤波器设计就是如此，通常首先要设计相应的模拟原型滤波器（analog prototype filter），然后经过模数转换，将原型滤波器变换到数字域。比如，可以采用双线性变换（bilinear transformation）方法将s域（模拟，使用电感、电容元件与/或有源器件）设计的原型滤波器变换为z域（数字，使用增益元件与延迟元件）的数字滤波器。

这项技术之所以出现，部分原因是，碰到滤波问题时，设计者通常觉得在模拟域工作起来会更加得心应手。设计二阶巴特沃思模拟滤波器是件非常容易的事情（在很多教科书和模拟滤波器手册都可以找到），但是在数字域实现二阶巴特沃思滤波器则需要额外的设计步骤与其他仿真工具。

并且，在高频设计领域中，数字传输线或者PCB上的高速信号走线必须按照电压/电流行波（traveling wave）特性的分布式模拟系统来处理。数字集成电路密度不断增大，开关速度不断加快，凸现了额外的功率需求以及其他问题［如地弹（ground bounce）］，这都对良好的PCB设计提出了新的挑战。

其结果是：即使数字设计者也必须了解模拟设计方面的知识。

1.2 模拟集成电路技术早期发展历史

半导体器件的历史可以追溯到Julius Lilienfeld博士，他设计了多种MOS管结构（如图1-1所示），拥有多项美国专利。在其中三个专利中，Julius Lilienfeld博士给出了MOSFET、MESFET以及其他MOS管器件的结构。

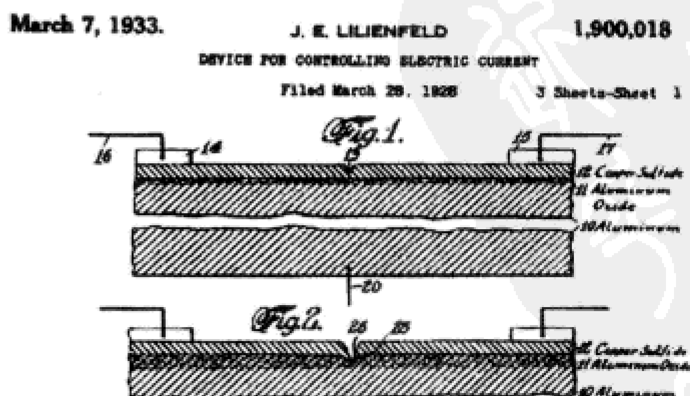


图1-1 摘自Lilienfeld的美国专利第1900018号①（1933年）

50多年前，伴随着固态物理学的早期研究以及双极性晶体管的创新发明，人类开始进入双极性晶体管半导体时代。从那以后，模拟电路设计和器件制造不断取得重大技术进步。在

① Lilienfeld连续获得了3个基本MOS晶体管结构的专利。

1947年至1948年间，Bardeen、Brattain和Shockley向人们展示了第一款双极性晶体管（如图1-2所示）[①]。

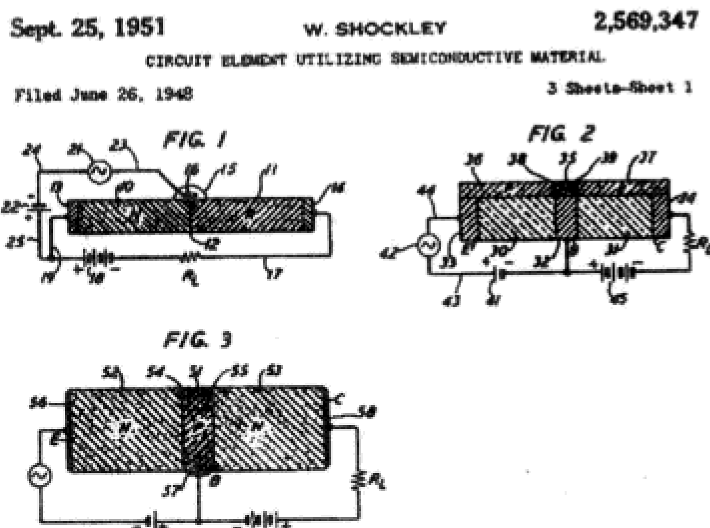
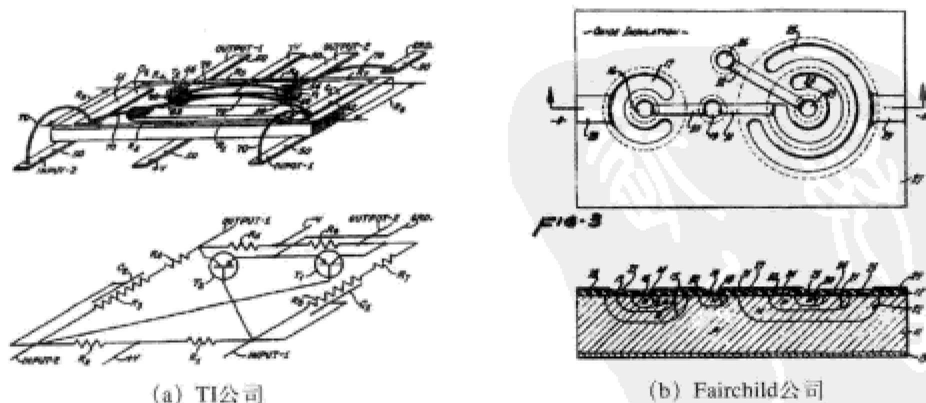


图1-2 摘自Shockley的美国专利第2569347号（1951年）

大约在1959年，Fairchild Semiconductor公司[②]和Texas Instruments公司[③]的研究小组制造出世界上的第一块集成电路（integrated circuit，IC）（如图1-3所示）。TI公司因为拥有J.S.Kilby的第3138743号美国专利“Miniaturized Electronic Circuits”，因此声称是他们最先发明了集成电路，该专利是于1959年2月6日提出申请的。之后不久，Fairchild公司的员工申请了最早的平面IC专利（有人认为该设计比TI公司的更益于简化半导体集成电路的制造）。参见R.N.Noyce于1959年7月30日提出申请的第2981877号美国专利“Semiconductor Device-and-Lead



（a）TI公司　　（b）Fairchild公司

图1-3 TI公司和Fairchild公司相互竞争的集成电路专利[④]图解

① 参见美国专利第2569347号，“Circuit Element Utilizing Semiconductor Materials”，该专利于1951年9月25日授予William Shockley。因为晶体管方面的相关发现，Bardeen、Brattain和Shockley分享了1956年的诺贝尔物理奖。1956年12月11日，Shockley在诺贝尔颁奖大会上发表“Transistor Technology Evokes New Physics”演讲，对半导体晶体管的物理学原理进行了精彩描述。

② 简称Fairchild公司，常翻译为仙童半导体公司。——译者注

③ 简称TI公司，常翻译为德州仪器公司。——译者注

④ 专利的全文和图像可以从美国专利管理局的网站http://www.uspto.gov上获取。

Structure”。

这些集成电路的最小特征尺寸约为125μm。从那以后，随着IC的发明创造以及快速改进，器件的几何尺寸越来越小。Fairchild公司和Intel公司[①]的创始人Gordon Moore提出的Moore定律预测集成电路内晶体管的封装密度大约每18个月提高1倍，集成电路过去30多年的发展趋势证明该预测相当准确。

目前，IC制造商正使用45nm的CMOS制造工艺，更小尺寸的晶体管很快就会到来。晶体管的尺寸越小就使得可以在给定的晶圆面积上封装越多的复杂结构。研究人员[②]也正在积极地研究三维集成电路结构，试图将越来越多的功能封装到给定的晶圆体积内。

1958~1959年间，TI公司和Fairchild公司的研究人员发明集成电路之后，第一片集成电路运算放大器也于20世纪60年代中期的稍早时候问世。最早取得商业成功的运算放大器是Fairchild公司的μA709（1965年）和National公司（全称为National Semiconductor Corporation，美国国家半导体公司）的LM101（1967年），它们均是由富有传奇色彩的模拟电路先驱人物Bob Widlar[③]设计的。这些器件的电压失调（voltage offset）为几个毫伏，单位增益带宽为1MHz左右，需要使用外部元件进行频率补偿。在此之后不久（1968年），工业上第一款内部补偿运算放大器，即Fairchild公司的μA741问世。该器件一经推出，迅速占领市场，成为极为畅销的运算放大器。在μA741的内部，通过金属氧化物技术将一个30pF的补偿电容集成到芯片内部。因为这个补偿电容集成到器件内部[④]，所以μA741在某种程度上比LM101更容易使用。这些单片集成运算放大器与更早时候设计的分立放大器（比如Philbrick公司的电子管放大器）相比较[⑤]，具有更低的价格以及更高的性能，迅速取得了商业成功。

从那时起，新设计和新问世的运算放大器具有更低的电压失调和更宽的带宽等指标，输入电流、共模范围等其他指标也同时得到改进。20世纪70年代，FET（field effect transistor，场效应管）输入型运算放大器投入应用，它比双极性输入型运算放大器具有更低的输入电流特性。适用于高速应用场合的电流反馈运算放大器等新颖结构运算放大器也成功问世[⑥]。今天，典型高速运算放大器的带宽已达数百兆赫兹[⑦]。可以驱动扬声器以及其他笨重电阻/电感

---

① 世界上最大的CPU制造商，常翻译为英特尔公司。——译者注

② 参见Matrix Semiconductor公司信息和Thomas H.Lee的论文“A Vertical Leap for Microchips”。

③ 更早的运算放大器μA702是由Widlar设计的，于1963年由Fairchild公司推出，但是从未取得大的商业成功。Widlar又埋头设计，在1965年左右推出了709，它是首款成本低于10美元的运算放大器。与Fairchild公司发生薪酬纠纷之后，Widlar加入美国国家半导体公司，在新公司里，他设计了LM101，稍后又改进设计推出了LM101A（1968年）。Widlar在论文“Design Techniques for Monolithic Operational Amplifier”中描述运算放大器LM101和709的细节与历史，本章最后注明了该项引述的参考文献。

④ μA741确实不需要外部补偿电容，这与它前面的LM101和709截然不同。μA741的“即插即用”易用特性掩盖了它的明显不足：它在闭环增益大于1的多数应用中总是过补偿的。本书后续章节讲述了运算放大器拓扑结构的更多细节。Walt Jung在*IC Op-Amp Cookbook, third edition*一书的75~78页描述μA709、LM101和741的细节与历史。

⑤ 比如，Philbrick公司的K2-W运算放大器，使用分立器件制造（晶体管），于1951年至1971年之间销售。它的小信号带宽约为300kHz，开环增益约为10 000倍，销售价格22美元左右。参见Bob Pease的文章“What's all this K2-W Stuff, Anyway?”。Philbrick公司还制造了低输入电流分立运算放大器P2，它使用少量晶体管和其他分立元件搭建，销售价格200美元左右。参见Bob Pease的文章“The Story of the P2-The First Successful Solid-State Operational Amplifier with Picoampere Input Currents”，该文章收录在Jim Williams编辑的书*Analog Circuit Design Art Science and Personalities*中。

⑥ 电流反馈运算放大器确实没有恒定的增益带宽乘积，这与标准电压反馈运算放大器完全不同。

⑦ 参见美国国家半导体公司的LM6165，它的增益带宽乘积（GBP）达725MHz，凌力尔特公司（Linear Technology Corporation）的LT1818，它的增益带宽乘积达400MHz，或者模拟器件公司（Analog Devices, Inc.）的AD8001，它的增益带宽乘积达到600MHz。

负载的功率运算放大器[①]也已存在，负载电流为几安培。具有微瓦级备用耗散功率的低功率运算放大器现在已非常常见。现在已可轻易地获取轨到轨[②]运算放大器。

上述这些进步已经为模拟和数字信号处理器件掀开了新的应用商机和产品市场。现在，手机、有线电视和无线网络技术正驱动着射频模拟电路设计和微型手持功率电子产品的商务应用。低功率器件的应用得以设计出能够具有长时间电池寿命的电池供电器件。

1.3 数字实现与模拟实现比较

在许多电子系统设计中，与相对简单的模拟实现方法相比，在数字域实现各项功能时难度大、成本高、功耗多。比如对数放大器的设计，就可以利用众所周知的双极性晶体管工作在线性放大区域时的对数/指数电压－电流关系来实现对数放大功能[③]，如式（1-1）所示。

$$I_C \approx I_s e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} \tag{1-1}$$

$$V_{BE} \approx \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_C}{I_s}\right)$$

式（1-1）的电压－电流关系在晶体管集电极电流的多个幅度量级上都是成立的。因此，可以利用晶体管PN结来实现低成本的对数放大器（图1-4）。假设图中均使用理想晶体管和理想运算放大器，则该电路的输入－输出传递函数为

$$v_o = -\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{v_i}{RI_s}\right) \tag{1-2}$$

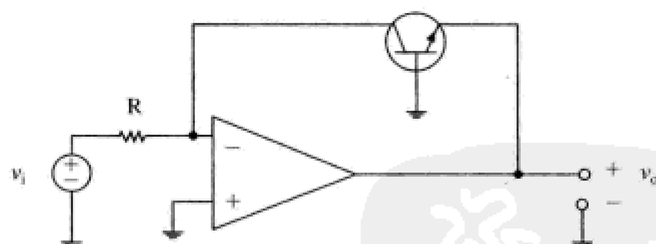


图1-4 简单对数放大器

该电路的输出电压与输入电压的自然对数呈比例关系。对数放大器的数字域实现方法则需要花费相当大的投入。该原理同样适用于模拟乘法计算[④]。

双极性晶体管电压和电流之间的对数关系可用来实现模拟乘法器、除法器以及平方根电路。观察图1-5所示的电路。使用跨导线性原理（translinear principle）（本书后面将会讨论），可以发现多个晶体管集电极电流之间的函数关系如式（1-3）所示

$$I_{C1}I_{C2}=I_{C3}I_{C4} \tag{1-3}$$

这就意味着可以按照式（1-4）的函数关系计算输出电流I_o。

① 美国国家半导体公司的LM12就属于功率运算放大器，它也是由Bob Widlar设计的。讨论LM12设计的优秀论文是*IEEE*上发表的“A Monolithic Power Op Amp”，本章的最后注明了该项引述的参考文献。

② “轨到轨”即“rail-to-rail”，指的是输出电压范围可达到电源电压的峰峰值。——编者注

③ 也可以利用该指数关系设计模拟乘法器，比如吉尔伯特单元（Gilbert Cell），模拟除法器以及平方根和立方根电路。

④ 比如参见跨导线性原理。

$$I_o = \sqrt{I_1 I_2} \tag{1-4}$$

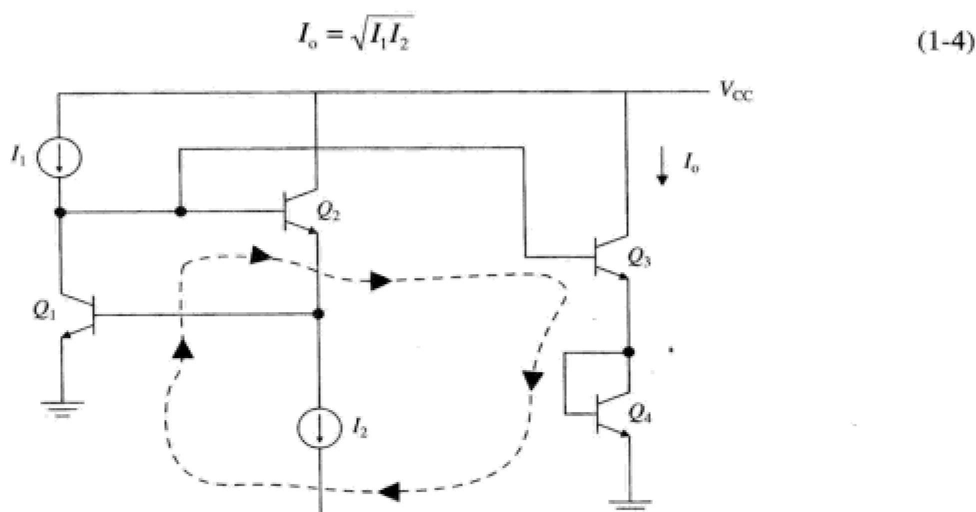


图1-5 跨导线性电路，该电路的输出电流等于两个输入电流乘积的平方根

下面考虑截止频率（cutoff frequency）为5MHz的5阶椭圆低通滤波器的设计问题。这是视频低通滤波器的典型指标。设计人员可以在数字域使用分立的硬件或者数字信号处理器件来实现该滤波器，也可以只使用少量的模拟分立元件来实现这个具有尖锐截止特性的低通滤波器[①]（图1-6）。请注意，在该滤波器中，输入端的源电阻和端接电阻均为75Ω，以与常见的视频BNC（即同轴电缆接插件）电缆的特征阻抗（characteristic impedance）保持一致。再重复一次，在数字域实现该滤波器时将极为复杂，在对滤波器的高频截止频率有明确要求时尤其如此。

1.4 模拟电路设计者有挑战也有乐趣

任何给定的模拟设计问题都不存在绝对唯一的正确答案，或者“完美”的设计。事实上，设计人员如果认为自己在模拟域找到了唯一的完美解决方案，那么，毫无疑问这是错误的。关于如何实现一个给定的电路功能，在模拟设计空间中存在无数种可能的解决方案。其设计挑战就在于，如何在给定的设计空间内同时满足成本、体积和性能等各种约束要求，这也是对模拟电路设计者的最高奖励（希望确实如此）。

1.5 命名规则说明

本书采用了下面的信号命名规则。通常，运算放大器的晶体管端点电压包括直流工作电压（DC operating point）以及围绕该工作点的小信号变量（small-signal variation）两部分。以晶体管的基极–发射极电压为例，命名规则如式（1-5）所示。

$$v_{BE} = V_{BE} + v_{be} \tag{1-5}$$

这里v_{BE}（v小写，BE大写）表示整体变量，V_{BE}（V大写，BE大写）表示直流工作电压，v_{be}（v小写，be小写）表示小信号变量。

① 椭圆滤波器常用于模拟的视频抗混叠滤波电路中，该类滤波器要求具有非常尖锐的截止过渡带。椭圆滤波器和其他阶梯滤波器设计的表格形式参见Anatol Zverev的著作*Handbook of Filter Synthesis*。当然，读者还可以使用电感构建实用模拟滤波器。

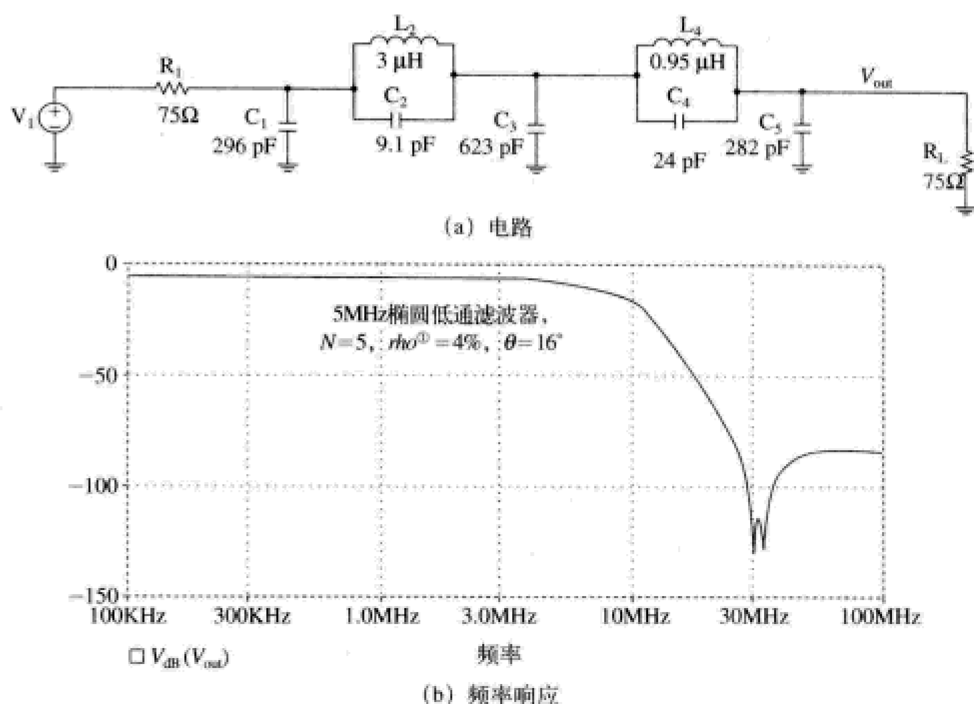


图1-6 截止频率为5MHz的5阶椭圆阶梯形滤波器

1.6 内容说明

不可能在一本书内涵盖模拟电路设计各个方面的内容。不过，本书为读者提供了诸多重要的技术、技巧以及分析工具等内容的合集，在实际模拟电路设计中，这些内容将会非常有用。书中在必要时也给出理论技术的数学推导。在其他地方，使用了直观技术（intuitive technique）和类比方法（analogy）将解决方案从其他设计领域映射到模拟设计领域，希望能够避开大量繁杂的数学推导。

很明显，本书没有涵盖下列重要主题：

- 噪声
- JFET放大器
- 开关电容滤波器

本书在每章末尾都提供了教材、学术期刊等参考文献，可以帮助读者更深入地学习这些主题内容；此外，也对引用的某些参考文献进行了解释和评论。

我们假设本书的读者熟悉拉普拉斯变换、零极点图、伯德图、系统阶跃响应等概念以及差分方程的基本知识。本书第2章将对这些信号处理基本理论进行回顾和复习。这些基本知识对于读者理解后续章节的更为高级的主题内容是十分必要的。

1.7 参考文献

Analog Devices, *Nonlinear Circuits Handbook*, Analog Devices, 1976. 这本书很好地讲述了对数放大器与其他非线性模拟电路。

① rho是曲线饱满值。一般情况下，rho值越小，曲线就越平坦，rho值越大，曲线就越饱满。——编者注

Bardeen. J., and Brattain, W. H., "The Transistor, A Semiconductor Triode," *Physical Review*, vol. 74, no. 2, pp. 230-231, July 15, 1948, reprinted in *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 1, January 1998, pp. 29-30.

Bondyopadhyay, Probir, "In the Beginning," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 1, January 1998,pp.63-77.

______ , "W = Shockley, the Transistor Pioneer—Portrait of an Inventive Genius," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 1, January 1998, pp. 191-217.

Brinkman, William, Haggan, Douglas, and Troutman.William, "A History of the Invention of the Transistor and Where It Will Lead Us;" *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 32, no. 12, December 1997, pp. 1858-1865.

Brinkman, William, "The Transistor: 50 Glorious Years and Where We Are Going," *1997 IEEE International Solid-State Circuits Conference*, Feb. 6-8, 1997, pp. 22-26.

Fullagar, Dave, "A New High Performance Monolithic Operational Amplifier," *Fairchild Application Brief*, May 1968. 设计者对μA741运算放大器作出了详细描述。

Jung, Walter, *IC Op-Amp Cookbook*, 3rd edition, SAMS, 1995.

Kilby, Jack, "The Integrated Circuit's Early History," *Proceedings of the IEEE*, vol. 88, no. 1, January 2000, pp. 109-111.

Lee, Thomas H., "A Vertical Leap for Microchips," *Scientific American*, January 13, 2002. 该笔记描述了Matrix半导体公司[①]的努力以及研制三维集成电路的动机。

Manglesdorf, C., "The Changing Face of Analog IC Design," *IEEE Transactions on Fundamentals*, E85-A, no. 2, February 2002, pp. 282-285.

______ , "The Future Role of the Analog Designer," *ISSCC* 93, session WE3, pp. 78-79. Melliar-Smith, C. Mark, Borrus, Michael G., Haggan, Douglas, Lowrey, Tyler, Sangiovanni-Vincentelli, Alberto, and Troutman, William, "The Transistor: An Invention Becomes a Big Business " *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 1, January 1998, pp. 86-110.

Moore, Gordon, "The Role of Fairchild in Silicon Technology in the Early Days of "Silicon Valley," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 1, January 1998, pp. 53-62.

______ , "Cramming More Components onto Integrated Circuits," *Electronics*, April 19, 1965, pp. 114-117. "摩尔定律"第一次发表的原创文章。

National Semiconductor, "Log Converters," *National Application Note AN-30*.

______ , *Linear Applications Handbook*.

Pearson, G. L., and Brattain, W. H., "History of Semiconductor Research," *Proceedings of the IRE*, vol. 43, no. 12, December 1955, pp. 1794-1806.

Pease, Bob, "What's All This K2-W Stuff, Anyhow?," *Electronic Design*, January 6, 2003.

______ , "The Story of the P2—The First Successful Solid-State Operational Amplifier with Picoampere Input Currents," found in *Analog Circuit Design: Art, Science and Personalities*, pp. 67-78, edited by Jim Williams, Butterworth-Heinemann, 1991. K2-W和P2运算放大器的发展历史与功能描述，这是一款使用真空管构成的分立运算放大器，由Philbrick设计制造，销售于20世纪50年代到60年代之间，P2也是Philbrick设计制造的离散晶体管运算放大器。

Pease, Robert, *Troubleshooting Analog Circuits*[②], Butterworth-Heinemann, 1991.

Perry, T. S., "For the Record: Kilby and the IC" *IEEE Spectrum*, vol. 25, no. 13, December 1988, pp. 40-41. *Description of the history of Kilby's invention.*

Sah, Chih-Tang, "Evolution of the MOS Transistor—From Conception to VLSI," *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, no. 10, October 1988, pp. 1280-1326

Schaller, Robert, "Moore's Law: Past, Present and Future," IEEE Spectrum, vol. 34, no. 6, June 1997, pp. 52-59.

Shockley, William, "Transistor Technology Evokes New Physics," 1956 *Physics Nobel Prize Lecture*, December 11, 1956.

______ , "Transistor Electronics—Imperfections, Unipolar and Analog Transistors," *Proceedings of the IEEE*, vol. 85, no. 12, December 1997, pp. 2055-2080.

---

① Matrix Semiconductor Inc. 以开发3D内存技术而闻名，从1998年开始致力于三维集成电路技术。2005年被San Disk公司收购。——编者注

② 中文版《模拟电路故障诊断》(人民邮电出版社，2007)。——编者注

______, "Theory of p-n Junctions in Semiconductors and p-n Junction Transistors," *Bell System Technical Journal*, vol. 28, no. 7, July 1949, pp. 436-489.

______, "Electrons, Holes and Traps," *Proceedings of the IRE*, vol. 46, no. 6, June 1958, pp. 973-990.

Siebert, William McC., *Circuits, Signals and Systems*, McGraw-Hill, 1986.

Small, James, "General-Purpose Electronic Analog Computing: 1945-1965," *IEEE Annals of the History of Computing*, vol. 15, no. 2, 1993, pp. 8-18.

Soloman, James, "A Tribute to Bob Widlar," *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. 26, no. 8, August 1991, pp. 1087-1089. 其中介绍了Bob Widlar的固态电路贡献与趣闻轶事。

Sporck, Charles, and Molay, Richard L., *Spinoff: A Personal History of the Industry that Changed the World*, Saranac Lake Publishing, 2001.

Sugii, Toshihiro, Watanabe, Kiyoshi, and Sugatani, Shinji, "Transistor Design for 90-nm Generation and Beyond," *Fujitsu Science and Technology Journal*, vol. 39, no. 1, June 2003, pp. 9-22.

United States Patent Office, website: *http://www.uspto.gov.*

Warner, Raymond, "Microelectronics: Its Unusual Origin and Personality," *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 48, no. 11, November 2001, pp. 2457-2467.

Widlar, Robert J., "Design Techniques for Monolithic Operational Amplifiers," *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. SC-4, no. 4, August 1969, pp. 184-191. 详细描述了运算放大器709和LM101A的设计。

______, "Monolithic Op Amp—The Universal Linear Component," *National Semiconductor Linear Applications Handbook*, Application Note no. AN-4.

Widlar, Robert J., and Yamatake, Mineo, "A Monolithic Power Op-Amp," *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. 23, no. 2, April 1988.对LM12的功能设计与工作特性的详细描述，LM12是一款集成电路功率运算放大器，设计于1980年代。美国国家半导体公司的应用笔记AN-446，"A 150W IC Op Amp Simplifies Design of Power Circuits"，给出了LM12的应用方法，这个应用笔记也是由Widlar和Yamatake撰写的。

Williams, Arthur B., and Taylor, Fred J., *Electronic Filter Design Handbook LC, Active and Digital Filters*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1988.

Williams, Jim, Editor, *The Art and Science of Analog Circuit Design*, Butterworth-Heinemann, 1998.

______, *Analog Circuit Design: Art, Science and Personalities*, Butterworth-Heinemann, 1991. Williams编撰的这些图书提供了模拟电路的设计提示与技巧，叙述了举世闻名的模拟设计大师的个人历史。

Zverev, A., *Handbook of Filter Synthesis*, John Wiley, 1967. 对模拟梯形滤波电路进行了极好的总结，特别强调了巴特沃思、贝塞尔、切比雪夫和椭圆梯形电路实现。该书还详细讨论了低通滤波器到高通滤波器以及低通滤波器到带通滤波器的变换方法。

1.8 美国专利①

Bardeen, J., and Brattain, W. H., "Three-Electrode Circuit Element Utilizing Semiconductive Materials," U.S. Patent # 2, 524, 035, filed June 7, 1948; issued October 3, 1950.

Kilby, J. S., "Miniaturized Electronic Circuits," U.S. Patent # 3, 138, 743, filed February 6, 1959; issued June 23, 1964.

Lilienfeld, J., "Method and Apparatus for Controlling Electric Currents," U.S. Patent # 1, 745, 175, filed October 8, 1926; issued January 28, 1930; "Amplifier for Electric Currents," U.S. Patent # 1, 877, 140, filed December 8, 1928; issued September 13, 1932; "Device for Controlling Electric Current," U.S. Patent # 1, 900, 018, filed March 28, 1928; issued March 7, 1933.

Noyce, R. N., "Semiconductor Device-and-Lead Structure," U.S. Patent # 2, 981,877, filed July 30, 1959; issued April 25, 1961.

Shockley, W., "Circuit Element Utilizing Semiconductive Materials," U.S. Patent # 2, 569, 347, filed June 17, 1948; issued October 3, 1950; "Semiconductor Amplifier " U.S. Patent # 2, 502, 488, filed September 24, 1948; issued April 5, 1950, reprinted in Proceedings of the IEEE, vol. 86, no. 1, January 1998, pp. 34-36.

① 这里列出的所有专利都可以在美国的专利和商标网站www.uspto.gov上查阅获取。

第2章　信号处理基础知识回顾

本章概要

- 本章介绍信号处理和分析的基础知识。本章对拉普拉斯变换域传递函数（transfer function）、极点（pole）、零点（zero）、阶跃响应（step response）、冲激响应（impulse response）、伯德图等进行了回顾，这些知识对于读者学习后续章节的内容来说是非常必要的。

2.1　拉普拉斯变换、传递函数和零极点图

任何线性时不变系统（linear time-invariant，LTI）的传递函数与零极点图都可以通过使用拉普拉斯变换域的阻抗代替电路中的所有电子元件的方法进行求解。比如，按照下表的电子元件替换规则就可以从电路域变换到拉普拉斯域（*s*域）。

电　路　域	拉普拉斯域（*s*域）
电阻*R*	*R*
电感*L*	*Ls*
电容*C*	1/*Cs*

变换之后得到的电路也可以表述为差分方程的形式，按照式（2-1）进行替换就可以得到电路的差分方程。

$$s \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{2-1}$$

所有集总LTI系统的传递函数都可以表示为拉普拉斯变量*s*的多项式[①]。例如，由多个极点和零点组成的电路系统的典型传递函数就具有式（2-2）的表达形式。

$$H(s)=\frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + 1}{b_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + 1} \tag{2-2}$$

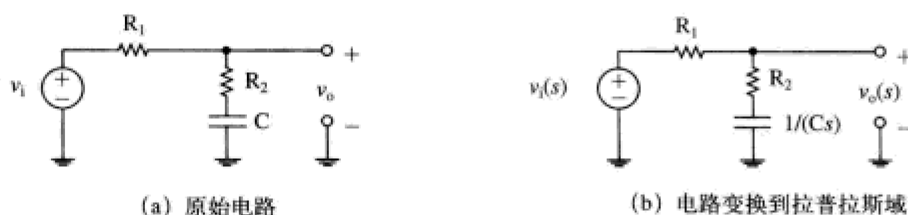
使$H(s)$的分母等于零的*s*取值，即为$H(s)$的极点。使$H(s)$的分子等于零的*s*取值，即为$H(s)$的零点。式（2-2）所示的传递函数具有*n*个零点和*m*个极点。

传递函数的极点和零点的*s*取值既可以是实数也可以是虚数。实轴上的极点将会形成阶跃响应，可以用简单指数（$e^{-t/T}$形式）进行描述，不会出现过冲（overshoot）和振铃现象（ringing）。复极点总是成对出现，如果阻尼作用（damping）足够低的话，电路的瞬态响应（transient response）将会出现过冲和振铃现象。

设想有一个简单电路，如图2-1a所示，由两个电阻和一个电容组成。我们可以将该电路变换到拉普拉斯域，将电容C的阻抗变为1/（*Cs*），就形成图2-1b所示的电路。

根据图2-1b所示的电阻分压关系，可以写出该电路的输入/输出传递函数，如式（2-3）所示。

① 一个集总电路包含任意数量的电阻、电容、电感和其他相关受控源，工作在极低的频率区域，波动现象和传输线效应可以忽略不计。记住，设计人员确实可以从原始电路得到该多项式，只需用元件*Ls*替换电感L，1/（*Cs*）替换电容C，再使用节点分析或其他技术进行求解即可。



（a）原始电路　　（b）电路变换到拉普拉斯域

图2-1　用于求解系统函数、极点和零点的简单RC电路

注：电容变换到拉普拉斯域后的阻抗为1/（Cs）。

$$H_1(s)=\frac{v_o(s)}{v_i(s)}=\frac{R_2+\dfrac{1}{Cs}}{R_1+R_2+\dfrac{1}{Cs}}=\frac{R_2Cs+1}{(R_1+R_2)Cs+1} \tag{2-3}$$

这个传递函数有什么意义呢？在0Hz附近的极低频率处（使$s\to 0$可以进行估计），传递函数可以近似为

$$H_1(s)\big|_{s\to 0}\approx 1 \tag{2-4}$$

这个结果具有明确的意义，电容元件在0Hz频率处变为开路，整个输入信号都到达了输出端。在极高频率处（或者$s\to\infty$），电容元件变为短路，传递函数可以近似为

$$H_1(s)\bigg|_{s\to\infty}\approx\frac{R_2}{(R_1+R_2)} \tag{2-5}$$

这个结果的意义也非常明确，在极高频率处，该电路看起来就像电阻R_1、R_2构成的一个简单分压器。可以按照下面的公式来求解传递函数$H_1(s)$的极点和零点。

$$s_{\text{pole}}=-\frac{1}{(R_1+R_2)C}$$
$$s_{\text{zero}}=-\frac{1}{R_2C} \tag{2-6}$$

该传递函数的零极点图如图2-2所示。

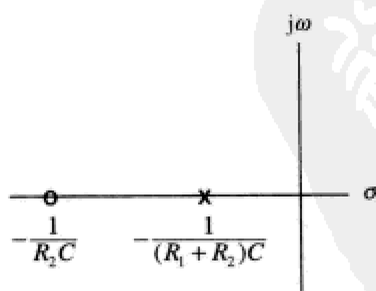


图2-2　上述简单RC电路的零极点图，存在1个低频极点和1个稍高频率的零点

该过程同样可以用于分析由任意数量的电阻、电容、电感和受控源组成更为复杂的模拟电路。

2.2　一阶系统响应

电压驱动RC电路（图2-3a）和电流驱动RC电路是常见的一阶系统。从电路结构上来看，这两种电路形成的输出响应是完全相同的。

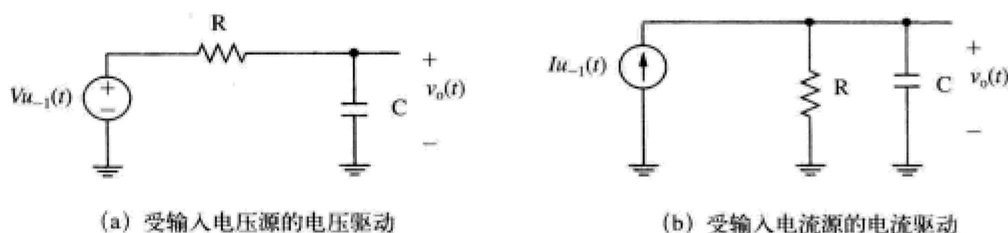


图2-3 一阶RC电路[①]

这两种电路的阶跃响应如式(2-7)所示。

电压驱动RC电路

$$
\begin{aligned}
v_o(t) &= V(1-e^{-t/\tau}) \\
i_r(t) &= \frac{V}{R}e^{-t/\tau} \\
\tau &= RC
\end{aligned}
$$

电流驱动RC电路 (2-7)

$$
\begin{aligned}
v_o(t) &= IR(1-e^{-t/\tau}) \\
i_r(t) &= Ie^{-t/\tau} \\
\tau &= RC
\end{aligned}
$$

电压或电流的上升时间(risetime)定义为输出响应从最终取值的10%上升到最终取值的90%占用的时间。对于一阶系统而言，上升时间由式(2-8)确定。

$$\tau_R = 2.2\tau \tag{2-8}$$

普通一阶集总系统的阶跃响应的10%～90%上升时间定义如图2-4所示。

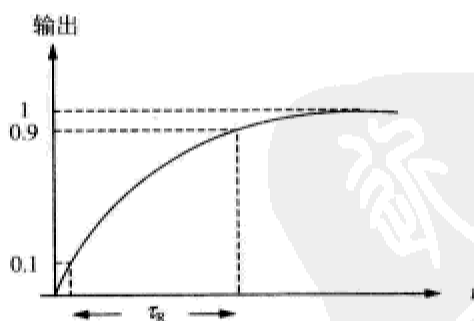


图2-4 一阶系统的单位阶跃响应，注明10%~90%上升时间

电路的带宽定义是：交流输入信号的输出响应的幅度下降到直流幅度的70.7%(或者–3dB)位置的频率。对于一阶系统而言，传递函数可以表述为

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{1}{\tau s+1} \\
\angle H(s) &= -\arctan(\omega\tau)
\end{aligned}
\tag{2-9}
$$

求解其–3dB带宽，得到

① 符号$u_{-1}(t)$表示单位阶跃函数(unit step)。

$$\omega_h = \frac{1}{\tau}$$
$$f_h = \frac{\omega_h}{2\pi} \tag{2-10}$$

这里ω_h的单位是rad/s（弧度/秒），f_h的单位是Hz（赫兹）。我们从这些关系式中可以推导出带宽和上升时间的数学联系。对于一阶系统而言，两者之间的函数关系可以精确表述为

$$\tau_R = \frac{0.35}{f_h} \tag{2-11}$$

在图2-5中，我们可以观察到截止频率为1rad/s的一阶系统的单位阶跃响应和频率响应曲线。

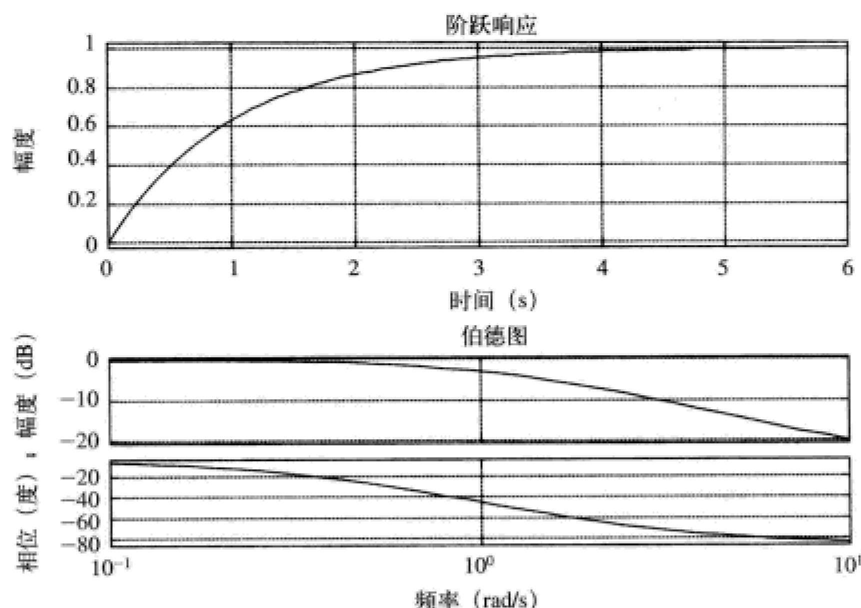


图2-5 一阶RC电路的阶跃响应和频率响应曲线（系统截止频率为1rad/s）

2.2.1 一阶系统的低频和高频响应估计

我们知道，一阶系统的阶跃响应可以表述为

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{2-12}$$

式中τ为一阶系统的时间常数。传递函数的幅度（magnitude）、相位角（angle）和群延迟（group delay）[①]分别如下式所示。

$$H(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\tau + 1}$$
$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}$$
$$\angle H(\mathrm{j}\omega) = -\arctan(\omega\tau) \tag{2-13}$$
$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{-\mathrm{d}\angle H(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\tau}{1 + (\omega\tau)^2}$$

① 群延迟是用来衡量信号频率成分在系统中经历时间长短的测量指标。从数学上讲，系统群延迟就是相位角关于角频率ω的负导数。为了求解一阶系统的群延迟，可以使用下面的恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

现在，我们来分析单极点系统在低频段和高频段的行为特性（注意：低频、高频在这里是相对极点频率而言的）。在高频段，$\omega\tau \gg 1$，可以按照下面的公式来估计传递函数的幅度、相位角和群延迟[①]。

$$\begin{aligned} |H(\mathrm{j}\omega)|_{\omega\tau\gg 1} &\approx \frac{1}{\omega\tau} \\ \angle H(\mathrm{j}\omega)_{\omega\tau\gg 1} &\approx -\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\omega\tau} \\ G(\mathrm{j}\omega)_{\omega\tau\gg 1} &\approx \frac{1}{\omega^2\tau} \end{aligned} \tag{2-14}$$

在高频段，传递函数的幅度随频率按比例减小，滚降比例为－20dB/10倍频程；相位角达到－π/2rad，或者说90°；群延迟随频率降低，较高频率成分比相对较低频率成分的延迟要小。

在低频段，$\omega\tau \ll 1$，传递函数可以近似为[②]

$$\begin{aligned} |H(\mathrm{j}\omega)|_{\omega\tau\ll 1} &\approx 1-\frac{1}{2}(\omega\tau)^2 \approx 1 \\ \angle H(\mathrm{j}\omega)_{\omega\tau\ll 1} &\approx -\omega\tau \\ G(\mathrm{j}\omega)_{\omega\tau\ll 1} &\approx \tau \end{aligned} \tag{2-15}$$

在低频段，传递函数的幅度接近于1；不过，由于极点的作用，存在部分有限的相位移动。比如，在低于极点频率10倍的频率位置，极点对负向相位移动（negative phase shift，或者滞后相位）的影响约为－0.1rad（或者－5.7°）。并且，在远远低于极点频率的位置，负向相位移动与频率大致成线性关系。这就意味着，正如群延迟计算公式揭示的函数关系，高频极点的行为特性与时间延迟特性相似。负向相位移动可能引起严重的后果，比如，在反馈环路中过度的相位移动（extra phase shift）可能会导致振荡。

截止频率为$\omega_c = 1$rad/s的一阶低通滤波器的群延迟曲线如图2-6所示。注意，在低频段

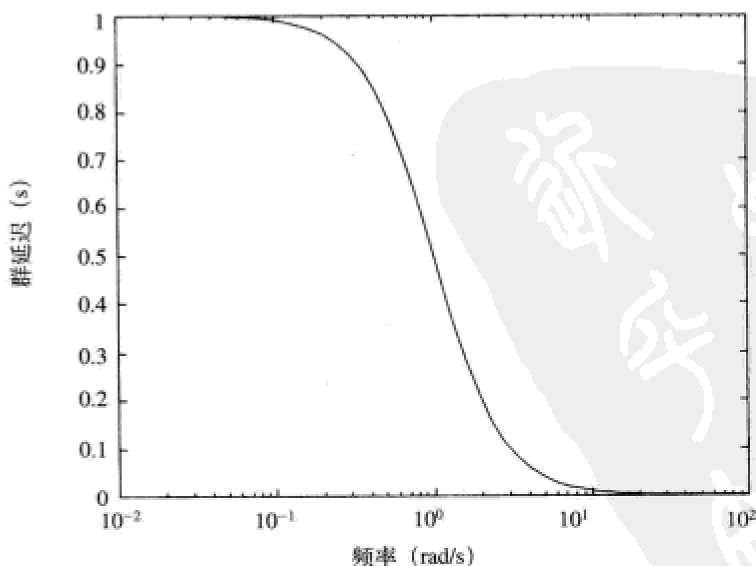


图2-6　截止频率$\omega_c = 1$rad/s的一阶低通滤波器的群延迟曲线

注：在极低频率处（$\omega \ll \omega_c$），其群延迟约为1s。

① 在这里，我们使用了多个三角恒等式。比如，反正切函数的幂级数展开式（power series expansion）为：$\arctan(x) = \pi/2 - 1/x + 1/(3x^3) - \ldots,\ x > 1$。

② 在这里，我们使用了幂级数展开式 $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{x}{2}, x \ll 1$。

（与截止频率相比的低频范围），其群延迟曲线接近平坦。因此，低通滤波器在这段频率范围内具有大致恒定的时间延迟特性。

2.2.2 一阶系统的短时阶跃响应

下面，我们来推导与系统的RC时间常数相比非常短的一阶系统的短时阶跃响应。我们知道，一阶系统的阶跃响应电路如图2-7所示。

$$v_o(t)=V\left(1-e^{\frac{-t}{RC}}\right) \tag{2-16}$$

这里V为输入阶跃电压函数的幅度。假设输入电压在$t=0$时刻发生阶跃变化，我们来推导相比RC时间常数非常短的阶跃响应的行为特性。我们可以利用函数e^x的级数展开式

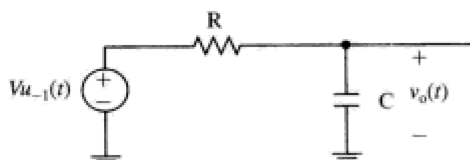


图2-7 一阶RC电路

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \tag{2-17}$$

因此，$t\ll RC$时，阶跃响应可以近似为

$$v_o(t)=V\left(1-\left(1-\frac{t}{RC}-\left(\frac{1}{2!}\right)\left(\frac{t}{RC}\right)^2-\cdots\right)\right)\approx V\left(\frac{t}{RC}\right)\quad (t\ll RC) \tag{2-18}$$

因此，在$t=0$时刻之后，$t\ll RC$的起始时间周期内，阶跃响应看起来是线性的。$t\ll RC$时，电容C的电流可以认为大致为常数。

$$i(t)=\frac{V-v_o(t)}{R}\approx\frac{V}{R}\left(1-\frac{t}{RC}\right)\quad (t\ll RC) \tag{2-19}$$

我们可以在PSPICE软件[①]中使用这个结果来帮助分析全波整流器（full-wave rectifier）的工作特性（如图2-8所示）。输入频率为60Hz、等效电压为120Vrms的正弦波[②]，其峰值电压为±170V。在输入正弦波的正向波峰期间，二极管D_1和D_4导通，向1000μF负载电容充电。在负向波峰期间，二极管D_2和D_3导通。因此，输出负载电压的纹波的基本成分为120Hz。

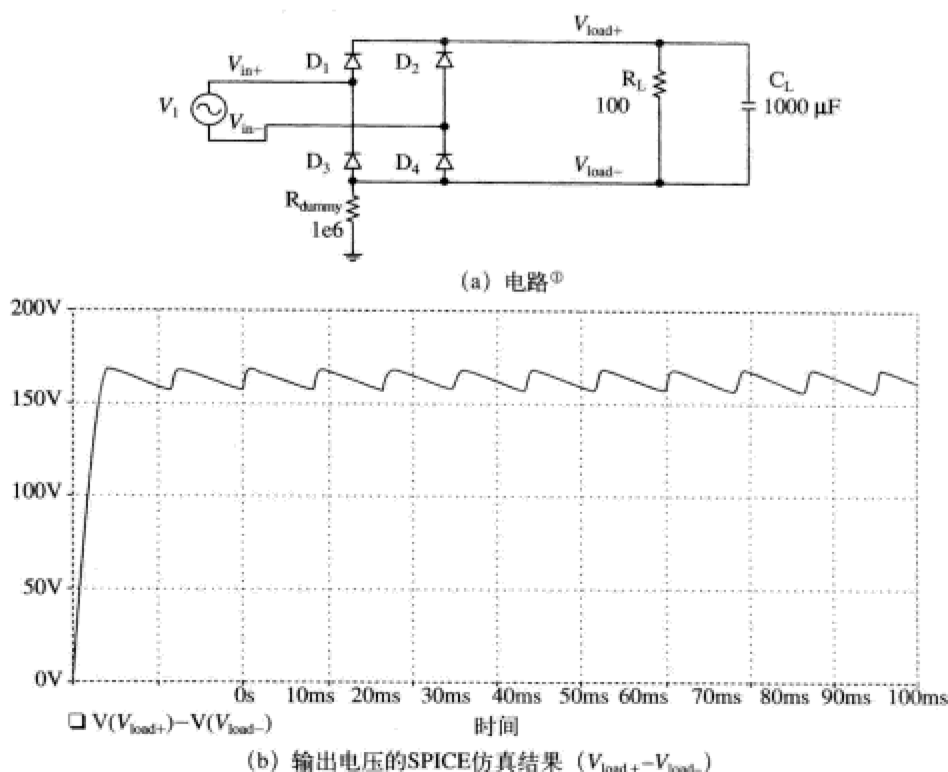
注意，在该电路中有一个R（=100Ω）C（=1000μF）时间常数为100ms的指数衰减分量。因为该时间常数远大于基本纹波频率的周期（1/120Hz=8.3ms），指数衰减“看起来”近似线性地变化，如图2-8的SPICE曲线图所示。我们可以使用下面的推理方法来非常粗略地计算电容器上的纹波电压的幅度。

- 输出电压（忽略纹波）约为170V。
- 负载电阻的电流约为170V/100Ω=1.7A。
- 所有二极管关闭时，电容器的放电时间为8.3ms（这是个非常粗略的值），保持电容（hold-up capacitor）负责向负载电阻供给电流。
- 使用公式$I=C\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，可以求得电容器上的纹波电压为

$$\Delta v_o\approx\frac{I_L T_{\text{discharge}}}{C}\approx\frac{(1.7)(8.3\times10^{-3})}{1000\times10^{-6}}\approx 14\,\text{V} \tag{2-20}$$

① 这些曲线图以及后续的PSPICE分析皆使用Microsim公司的PSPICE8.0评估版软件。

② 该术语的含义是电压均方根。峰值为±170V的正弦波的均方根值约为120Vrms。可替换的术语表示为120VAC，其含义为120Vrms的交流正弦波。



(a) 电路[①]

(b) 输出电压的SPICE仿真结果（$V_{load+}-V_{load-}$）

图2-8 60Hz全波整流器

2.2.3 一阶系统附加额外高频极点

如果一阶系统除低频控制极点之外，还有一个更高频率的第二极点，其行为特性将会如何呢。特别地，让我们首先考虑极点为–1rad/s的一阶系统，其传递函数为

$$H(s)=\frac{1}{(s+1)} \tag{2-21}$$

如果为其附加一个–10rad/s的更高频率的极点，我们再来观察该系统的行为特性。修改后的传递函数H'（s）为

$$H'(s)=\frac{1}{(s+1)(0.1s+1)} \tag{2-22}$$

下面是系统$H'(s)$的零极点图（图2-9），控制极点仍为－1rad/s，更高频率的第二极点为－10rad/s。我们希望新系统$H'(s)$ 的阶跃响应和频率响应受－1rad/s处的极点控制。比如，我们希望系统的10%～90%上升时间约为2.2s，－3dB带宽为1rad/s。

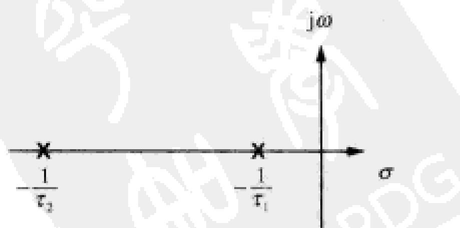


图2-9 一阶系统的零极点图，控制极点在$-1/\tau_1$频率处，更高频率极点在$-1/\tau_2$频率处

一阶系统的阶跃响应（如图2-10所示）显示的上升时间确实是受低频极点控制的。不过，我们留意到阶跃响应存在一个细微之处：修改后的新系统显示，在0~3s时间内，新系统的输出比原始系统的输出滞后。

① 注意，SPICE要求电路和接地平面之间要有直流通路，因此用1MΩ名义电阻（dummy resistor）接地。该电阻对电路工作没有明显影响。

这与我们前面的分析是一致的：与主导极点的频率相比，高频极点表现为频率上的时间延迟。高频极点在−10rad/s处，我们希望$H'(s)$的输出比$H(s)$的输出滞后大致0.1s。

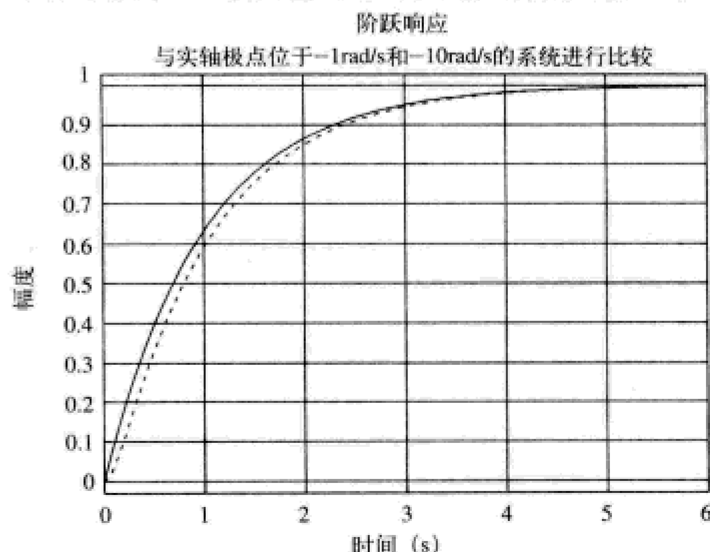


图2-10 附加高频极点的一阶系统（阶跃响应）

注：附加极点后系统的阶跃响应比原始系统滞后。

一阶系统和$H'(s)$的频率响应比较如图2-11所示。我们注意到，正如预计的那样，在低频段，频率响应受低频极点控制。我们还注意到，两个系统的幅度响应良好匹配，由于高频极点的作用，新系统的相位响应出现了部分额外的相位移动。

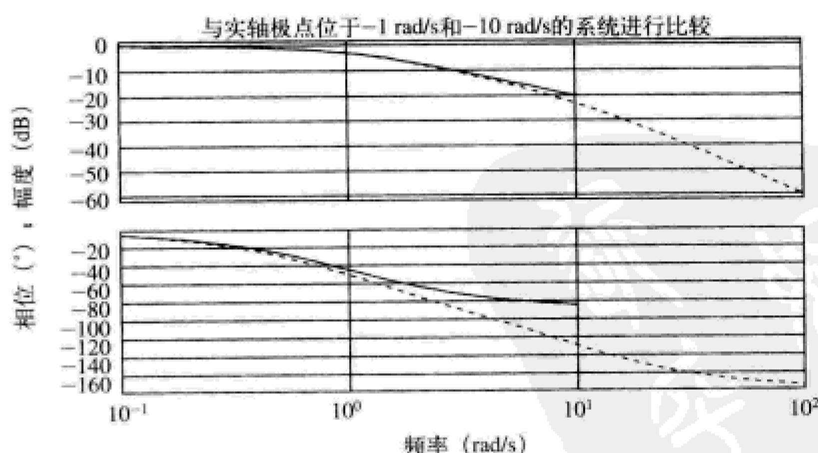


图2-11 附加高频极点的一阶系统的零极点曲线（频率响应）

注：频率低于低频极点的区域，两个传递函数的幅度匹配良好。

2.3 二阶系统

二阶系统有两个极点。对于电阻和电容组成的二阶系统（没有任何电感或者受控源），其极点都在实轴上。在这种特殊情况下，阶跃响应不可能出现过冲和振铃现象。

其他二阶系统可能存在耦合的集总能量存储机制或者受控源，只要阻尼作用不是非常大，其瞬态响应就可能形成过冲和振铃。潜在的欠阻尼系统的实例包括：

- 弹簧振子
- LC电路
- 转动惯量和扭曲弹簧
- 带运算放大器反馈的RC电路
- 磁悬浮（Magnetic suspension，或者磁阻滞）

2.3.1 弹簧振子系统

弹簧振子系统如图2-12所示。系统振动时，能量以质量块M的动能和弹簧拉伸势能形式轮流存储。如果我们设定变量y为弹簧相对自由悬挂平衡位置的位移，则弹簧作用在质量块M上的力为

$$f_y = -ky \tag{2-23}$$

将牛顿定律（Newton's law）应用于运动质量块M，得到

$$f_y = -ky = M\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \tag{2-24}$$

进而得到弹簧振子系统的差分运动方程，即为

$$M\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + ky = 0 \tag{2-25}$$

我们猜测方程2-25的解的形式为[①]

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t) \tag{2-26}$$

将假设解代入差分方程，得到

$$M(-\omega^2 Y_0 \sin(\omega t)) + k(Y_0 \sin(\omega t)) = 0 \tag{2-27}$$

最终求得该方程的解为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \tag{2-28}$$

我们将其定义为弹簧振子系统的振动频率。

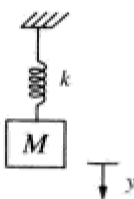


图2-12　无阻尼弹簧振子系统

质量M (kg) 与弹簧系数为k (N/m) 的弹簧耦合在一起，最终振动频率为$\sqrt{k/M}$ rad/s。

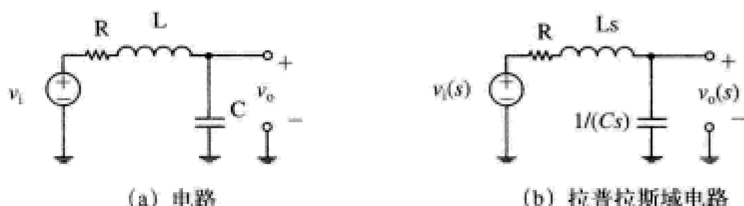
2.3.2 一个二阶电路系统

二阶串联RLC电路如图2-13a所示。变换到拉普拉斯域，形成的电路如图2-13b所示。如果电阻R的阻值非常小（稍后将会定义“非常小”的含义），则该系统是欠阻尼的。其传递函

① 这里就凸现了“直观”一词的作用。我们知道弹簧振子系统以某一固定频率振动。忽略弹簧和空气摩擦损失，系统将永远振动下去。

数可以表述为

$$H(s)=\frac{v_o(s)}{v_i(s)}=\frac{\frac{1}{Cs}}{R+LS+\frac{1}{Cs}}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}=\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1}=\frac{w_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{2-29}$$



(a) 电路　　(b) 拉普拉斯域电路

图2-13 二阶串联RLC电路

该方程属于二阶系统的标准形式，ω_n是电路的“自然频率”，ζ是电路的“阻尼系数（damping ratio，或者阻尼因子）”。串联RLC电路的自然频率和阻尼系数分别为

$$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\zeta=\frac{\omega_n RC}{2}=\frac{1}{2}\frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}=\frac{1}{2}\frac{R}{Z_o} \tag{2-30}$$

自然频率是对系统响应的相对速度的指示，阻尼系数则告诉我们阶跃响应的振荡有多么剧烈，以及频率响应的尖峰程度有多么严重。注意，阻尼系数与串联电阻R相对Z_0的阻值相关。在谐振LC电路中，术语Z_0被多次重复使用，因此称其为谐振电路的“特征阻抗”。

二阶系统的频率响应的幅度和相位分别为

$$H(j\omega)=\frac{1}{\frac{2j\zeta\omega}{\omega_n}+\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}$$
$$|H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2+\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}} \tag{2-31}$$
$$\angle H(j\omega)=-\arctan\frac{\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}=-\arctan\left(\frac{2\zeta\omega\omega_n}{\omega_n^2-\omega^2}\right)$$

传递函数的幅度和相位随阻尼系数ζ的取值变化的关系曲线如图2-14所示。注意，随着阻尼系数的减小，频率响应的尖峰[①]（发生在ω_n频率的附近）变得更高。

① 我们可以找到传递函数出现尖峰的频率点位置为

$$\omega_p=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2},\zeta<0.707$$

如果阻尼系数很小，该频率接近自然频率ω_n。传递函数在尖峰频率点的幅度为

$$M_p=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}},\zeta<0.707$$

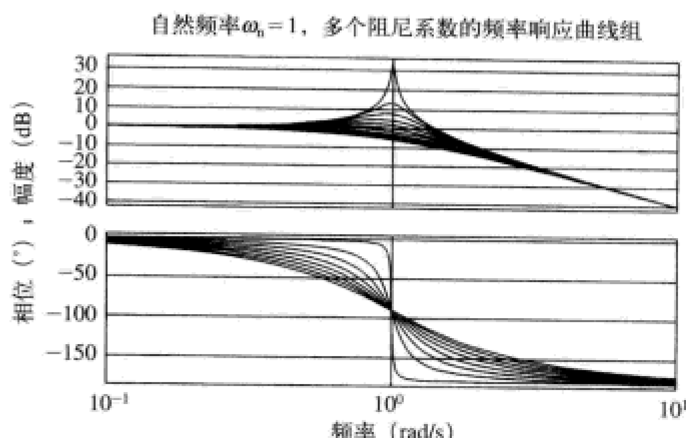


图2-14　二阶系统的频率响应，阻尼系数为0.01, 0.11, 0.21, …1.01，自然频率$\omega_n=1$

注：低阻尼系数的频率响应在1 rad/s附近出现严重的尖峰。

电阻R相比Z_0非常大时，阻尼系数远大于1，属于过阻尼的情况。在过阻尼情况下，求解$H(s)$的极点，得到

$$s_{\text{poles}}=-\omega_n\left[-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}\right] \tag{2-32}$$

注意，极点位置随着阻尼系数ζ的变化而变化。零阻尼时（也就是$\zeta=0$），极点就在$j\omega$轴上$\pm j\omega_n$的位置，系统在该频率点对的位置的阶跃激励响应极度振荡。零阻尼情况下，系统在自然频率ω_n处振荡。临界阻尼时（也就是$\zeta=1$），两个极点在实轴上的相同位置，即$-\omega_n$处。过阻尼情况下（$\zeta>1$），存在一个小于$-\omega_n$的极点和一个大于$-\omega_n$高频极点。欠阻尼、临界阻尼和过阻尼三种情况下的极点位置如图2-15所示。

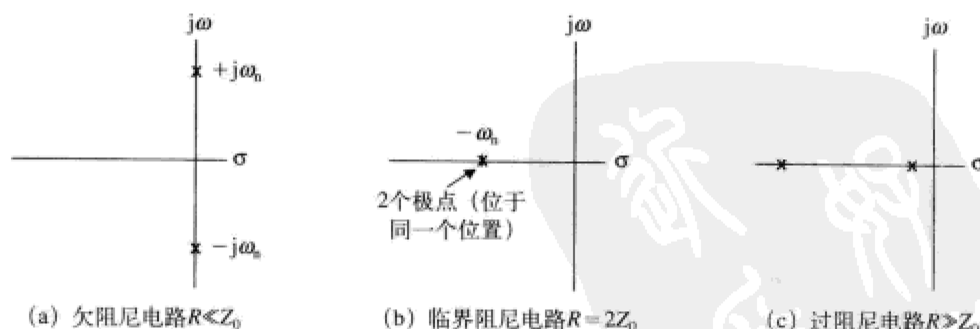


图2-15　串联RLC电路的极点位置图

现在，如果我们恰好在自然频率点（也就是$\omega=\omega_n$）处对系统进行激励，将会发生什么情况呢？系统的响应为

$$\begin{aligned}|H(j\omega)|_{\omega=\omega_n}&=\frac{1}{2\zeta}\\ \angle H(j\omega)_{\omega=\omega_n}&=-\frac{\pi}{2}\end{aligned} \tag{2-33}$$

如果阻尼系数ζ比较低，频率响应则会在自然频率处表现出明显的尖峰响应。

2.3.3 品质因数Q

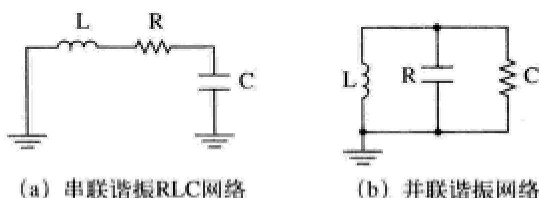
评估二阶系统的另一个常用指标是品质因数（quality factor）Q。品质因数定义为

$$Q=\omega\frac{E_{\text{stored}}}{P_{\text{diss}}} \tag{2-34}$$

这里E_{stored}是系统的峰值储存能量，P_{diss}是平均功耗。首先，我们来观察一个串联谐振网络（如图2-16a所示）。谐振点的品质因数的计算公式为

$$\begin{aligned}
\omega&=\frac{1}{\sqrt{LC}}\\
E_{\text{stored}}&=\frac{1}{2}LI_{\text{pk}}^{2}\\
P_{\text{diss}}&=\frac{1}{2}I_{\text{pk}}^{2}R\\
Q&=\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)\left(\frac{\frac{1}{2}LI_{\text{pk}}^{2}}{\frac{1}{2}I_{\text{pk}}^{2}R}\right)=\frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R}=\frac{Z_{\text{o}}}{R}
\end{aligned} \tag{2-35}$$

在串联谐振电路中，品质因数随着电阻R增大而减小。这是因为大阻值电阻提供更大的阻尼作用。



（a）串联谐振RLC网络　　（b）并联谐振网络

图2-16　谐振网络

下面，再来分析并联RLC网络（如图2-16b所示）。谐振点的品质因数Q的计算公式为

$$\begin{aligned}
\omega&=\frac{1}{\sqrt{LC}}\\
E_{\text{stored}}&=\frac{1}{2}CV_{\text{pk}}^{2}\\
P_{\text{diss}}&=\frac{1}{2}\frac{V_{\text{pk}}^{2}}{R}\\
Q&=\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)\left(\frac{\frac{1}{2}CV_{\text{pk}}^{2}}{\frac{1}{2}\frac{V_{\text{pk}}^{2}}{R}}\right)=\frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}=\frac{R}{Z_{\text{o}}}
\end{aligned} \tag{2-36}$$

并联谐振电路中，则是小阻值电阻提供更大的阻尼作用。

现在，我们再来看看品质因数和阻尼系数之间的函数关系

$$Q=\frac{1}{2\zeta} \tag{2-37}$$

将前面的串联谐振电路的传递函数的方程重写如下，这次使用品质因数Q来表示

$$H(s)=\frac{1}{\frac{s^{2}}{\omega_{\text{n}}^{2}}+\frac{2\zeta s}{\omega_{\text{n}}}+1}=\frac{1}{\frac{s^{2}}{\omega_{\text{n}}^{2}}+\frac{s}{\omega_{\text{n}}Q}+1} \tag{2-38}$$

传递函数的幅度则为

$$|H(s)|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega_n Q}\right)^2}} \tag{2-39}$$

在自然频率点（$\omega=\omega_n$），传递函数的幅度为

$$|H(s)|_{\omega=\omega_n}=Q \tag{2-40}$$

2.3.4 二阶系统的瞬态响应

如图2-17所示的二阶LCR电路，在$t=0$时刻的输入为阶跃函数$v_i(t)$。首先，假设电阻足够小以使系统处于欠阻尼状态（也就是说系统有复极点）。

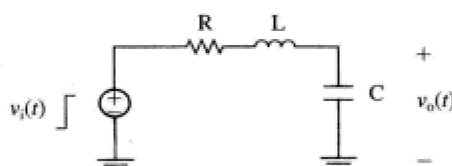


图2-17　阶跃输入二阶系统

其阶跃响应为①

$$v_o(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t+\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)$$
$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2-41}$$

阶跃响应的峰值幅度为

$$P_o=1+e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{2-42}$$

例如，阻尼系数为0.2时，二阶系统的尖峰过冲（或者为超调）约为1.6。

经拉普拉斯分析之后，我们仍可以确定下列关系式成立

$$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\zeta=\frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C}}} \tag{2-43}$$

因此，电阻的阻值相对$\sqrt{L/C}$很小时，系统是欠阻尼的。自然频率$\omega_n=1$，阻尼系数从0.01变化到1.01时，二阶系统的阶跃响应如图2-18所示。

2.3.5 二阶电路系统附加额外的高频极点

如果二阶系统额外附加一个或多个极点，那么其行为特性又将如何呢？其响应与额外附加的极点和谐振极点的接近程度有关。正如前面的分析，高频极点的响应表现为负向相位移

① 详细内容参见James Roberge的著作*Operational Amplifiers: Theory and Practice*, John Wiley出版社1975年出版。

动（即输出相位滞后），响应幅度接近于1，负向相位移动随频率增加大致按比例地减小（与时间延迟一致）。

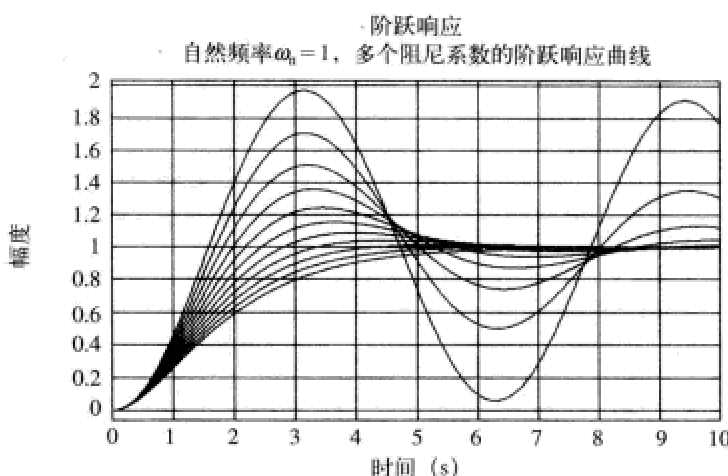


图2-18 二阶系统的阶跃响应，阻尼系数为0.01, 0.11, 0.21, …1.01

如图2-19所示是自然频率$\omega_n=1$ rad/s，阻尼系数$\zeta=0.5$时的二阶系统的阶跃响应曲线。叠加在曲线图上的第二条曲线表示附加极点–10 rad/s的影响。注意，除附加极点的新系统在上升时间区域被延迟（约为0.1s）外，两条曲线匹配得十分良好。这与“高频极点引起的延迟是有限的”结论是一致的。

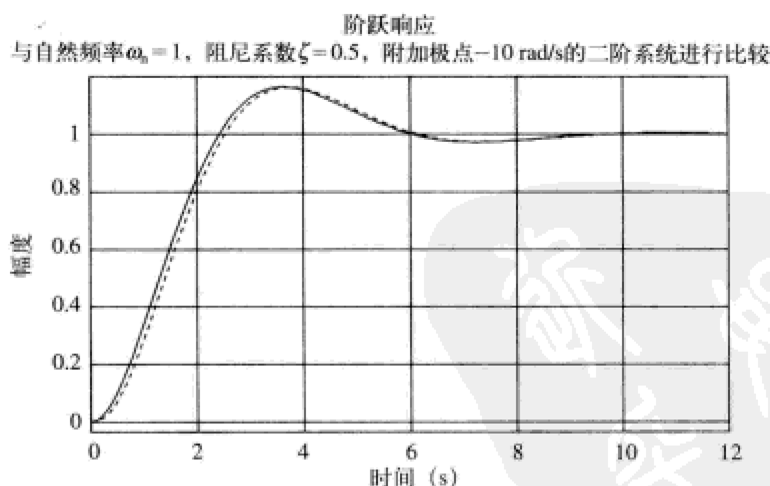


图2-19 自然频率$\omega_n=1$，阻尼系数$\zeta=0.5$，附加极点–10 rad/s的二阶系统的阶跃响应

在图2-20中，我们将可以看到附加较低频率的极点对相同的系统造成的影响。这次附加的额外极点为–2 rad/s。我们注意到，这次对原始系统的影响更为显著。这与预计的结果是一致的，因为附加极点相比原始系统的谐振频率大不了多少。

2.3.6 实轴极点分布间隔较大的二阶系统

实轴极点间隔分布较大的二阶系统如图2-21所示。

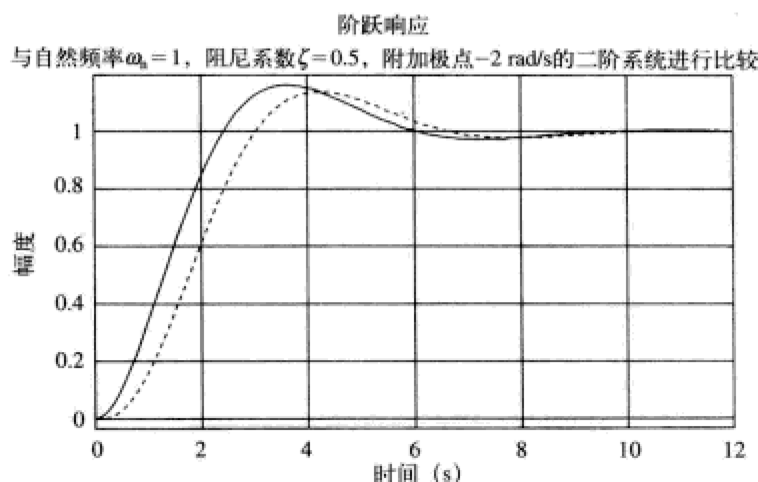


图2-20 自然频率$\omega_n=1$，阻尼系数$\zeta=0.5$，附加极点-2 rad/s的二阶系统的阶跃响应（实线表示原始二阶系统的响应曲线，短划线表示附加额外较高频率极点的二阶系统的响应曲线）

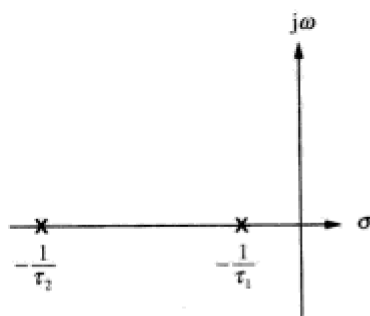


图2-21 实轴极点分布间隔较大的二阶系统

该系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \tag{2-44}$$

这里τ_1是与低频控制极点相关的时间常数，τ_2是更快（非控制）的极点的时间常数。将分母相乘展开，得到

$$H(s)=\frac{1}{\tau_1\tau_2 s^2+(\tau_1+\tau_2)s+1} \tag{2-45}$$

这种情况下，二阶系统与两个级联的一阶系统的行为特性相一致。

2.3.7 从传递函数的分母求解极点的大致位置

现在，我们稍微偏离正题，将要讨论的内容对于下面章节的电路带宽估计有很大帮助。假设我们有一个系统，并且知道它有3个极点，在实轴上分布间隔很远，如图2-22所示。低频极点在$-1/\tau_1$位置，高频极点在$-1/\tau_3$位置，中间极点在$-1/\tau_2$位置，换为另一种说法则是，三个极点间的时间常数关系为$\tau_1\gg\tau_2\gg\tau_3$。该系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{1}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)(\tau_3 s+1)}=\frac{1}{\tau_1\tau_2\tau_3 s^3+(\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3)s^2+(\tau_1+\tau_2+\tau_3)s+1} \quad (2\text{-}46)$$

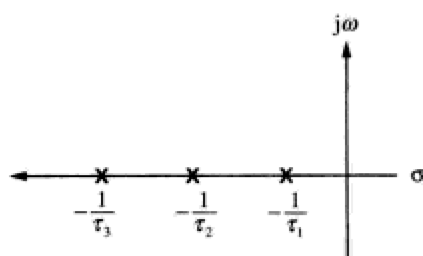


图2-22 在负实轴上分布间隔很大的三极点图

传递函数具有下列形式

$$\begin{aligned} H(s)&=\frac{1}{a_3 s^3+a_2 s^2+a_1 s+1} \\ a_3&=\tau_1\tau_2\tau_3 \\ a_2&=\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3 \\ a_1&=\tau_1+\tau_2+\tau_3 \end{aligned} \quad (2\text{-}47)$$

我们指定极点位置p_{low}、p_{medium}和p_{high}分别表示“低”、“中”和“高”频率。我们可以求解极点的大致位置为

$$\begin{aligned} p_{\text{low}}&\approx-\frac{1}{a_1}\approx-\frac{1}{\tau_1+\tau_2+\tau_3}\approx-\frac{1}{\tau_1} \\ p_{\text{high}}&=-\frac{a_2}{a_3}\approx-\frac{\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3}{\tau_1\tau_2\tau_3}\approx-\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1\tau_2\tau_3}\approx-\frac{1}{\tau_3} \\ p_{\text{medium}}&\approx\frac{a_1}{a_2}\approx-\frac{\tau_1+\tau_2+\tau_3}{\tau_1\tau_2+\tau_1\tau_3+\tau_2\tau_3}\approx-\frac{\tau_1}{\tau_1\tau_2}\approx-\frac{1}{\tau_2} \end{aligned} \quad (2\text{-}48)$$

事实上，只要极点位置都在负实轴上，并且分布间隔很远，我们就可以将该方法推而广之，分析任意阶数的分母多项式。在这种情况下，极点位置为

$$\begin{aligned} p_k&\approx-\frac{a_{k-1}}{a_k} \\ a_0&=1 \end{aligned} \quad (2\text{-}49)$$

比如，有一个5阶系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{1}{10^{-10}s^5+1.111\times10^{-6}s^4+1.122\times10^{-3}s^3+1.122\times10^{-1}s^2+1.111s+1} \quad (2\text{-}50)$$

使用上面的近似计算公式，可以求得极点的近似位置为

$$\begin{aligned} p_5&\approx-\frac{1.111\times10^{-6}}{10^{-10}}\approx-11{,}110 \ \ r/s \\ p_4&\approx-\frac{1.122\times10^{-3}}{1.111\times10^{-6}}\approx-1{,}010 \ \ r/s \\ p_3&\approx-\frac{1.122\times10^{-1}}{1.122\times10^{-3}}\approx-100 \ \ r/s \\ p_2&\approx-\frac{1.111}{1.122\times10^{-1}}\approx-9.9 \ \ r/s \\ p_1&\approx-\frac{1}{1.111}\approx-0.9 \ \ r/s \end{aligned} \quad (2\text{-}51)$$

这个实例系统的所有极点的准确位置[①]分别为－1rad/s、－10rad/s、－100rad/s、－1 000 rad/s和－10 000rad/s。我们发现该方法教给了我们一个粗糙的极点位置估计公式，只要我们的初始假设"极点位置都在负实轴上，并且分布间隔很远"是正确的，就可以放心大胆地使用。

2.4 谐振电路

考虑如图2-23所示的并联LC电路。这是个标准谐振电路，在频率ω_r处振荡，能量在电容的电存储和电感的磁存储之间来回晃荡。我们假设电路的初始条件为：电感电流等于零，电容电压等于某个电压v_c。电感电流可以根据下面的微分方程进行求解

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=\frac{v_c}{L} \tag{2-52}$$

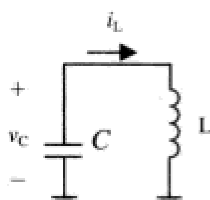


图2-23　无阻尼并联LC谐振电路

类似地，电容电压也可以根据下面的微分方程进行求解

$$\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}=\frac{i_L}{C} \tag{2-53}$$

对电容方程中的电容电压$v(t)$进行微分，并且替换掉$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^2v_c}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-\frac{v_c}{LC} \tag{2-54}$$

现在，我们猜想电压$v(t)$为正弦波，并且具有$v(t)=V_0\sin\omega t$的形式，就可以求解电路的谐振频率了。将这个假设解代入电容电压方程，得到

$$-\omega^2\sin(\omega t)=-\frac{1}{LC}\sin(\omega t) \tag{2-55}$$

这就意味着谐振频率为标准谐振频率（与预期结果一致）。

$$\omega_r^2=\frac{1}{LC} \tag{2-56}$$

2.5 使用能量法分析无阻尼谐振电路

使用能量法可以轻松地解决许多电子工程和机械工程问题。能量以电场形式存储在电容中，以磁场形式存储在电感中，或者存储在运动物体、弹簧以及热物质中等。以多种存储模式存储的能量如表2-1所示。

表2-1　符号列表

存储模式	关　系	注　释
电容/电场存储（electric field storage）	$E_{elect}=\frac{1}{2}CV^2$	C＝电容， V＝电压

① 如果不相信，可以自己动手计算它的乘积，或者使用MATLAB进行解答。

（续）

存储模式	关　系	注　释
电感/磁场存储（magnetic field storage）	$E_{mag}=\frac{1}{2}LI^2=\int\frac{B^2}{2\mu_o}dV$	L＝电感；I＝电流； B＝磁通量密度（Magnetic flux density）（特斯拉（Tesla））
动能（kinetic energy）	$E_k=\frac{1}{2}Mv^2$	M＝质量；v＝速率
转动能量（rotary energy）	$E_r=\frac{1}{2}I\omega^2$	I≡惯量矩（kg · m²）；ω＝转动速度（rad/s）
弹簧	$E_{spring}=\frac{1}{2}kx^2$	k≡弹簧常数（N/m）， x＝弹簧位移
势能（potential energy）	$\Delta E_p=Mg\Delta h$	Δh≡高度变化
热能（thermal energy）	$\Delta E_T=C_{TH}\Delta T$	C_{TH}≡热电容（J/K）， ΔT≡温度变化（K）

使用能量方法，我们可以求解图2-23所示的谐振电路的最大电容电压与最大电感电流的比值。假设电容初始充电到V_o伏，电容存储的能量为$E_C=1/2\times CV^2$，电感存储的能量为$E_L=1/2\times LI^2$，我们则可以写出下面的关系式

$$\frac{1}{2}CV_o^2=\frac{1}{2}LI_o^2 \tag{2-57}$$

电感电流的幅度又意味着什么呢？我们可以求得V_o/I_o的结果为

$$\frac{V_o}{I_o}=\sqrt{\frac{L}{C}}\equiv Z_o \tag{2-58}$$

术语Z_o定义为谐振电路的特征阻抗。假设我们有一个电容和电感组成的电路，$C=1\mu F$，$L=1\mu H$。这意味着它的谐振频率为10^6 rad/s（166.7kHz），特征阻抗为1Ω。图2-24显示该电路的仿真结果，其中电容的初始电压为1V。正如预期的那样，谐振频率为166kHz，最大电感电流为1A。注意，电容电压和电感电流的相位相差90°。这就是无阻尼谐振电路工作在谐振点时的特性。

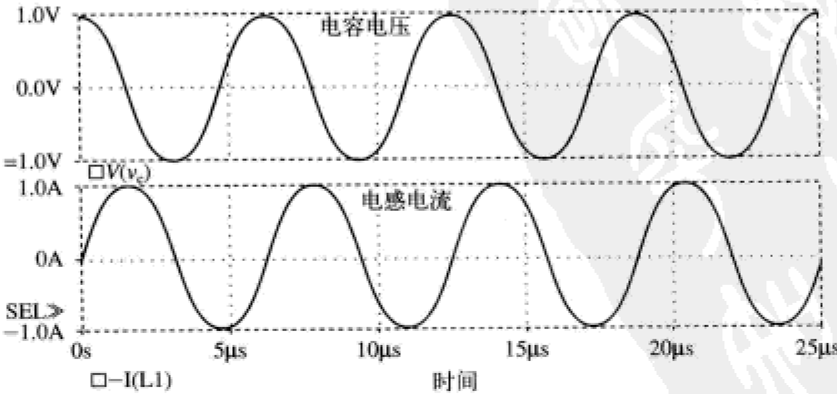


图2-24 并联无阻尼LC电路的PSPICE仿真输出，$L=1\mu H$，$C=1\mu F$，电容的初始电压为1V，电感的初始电流为0。最终谐振频率约为167kHz

我们也可以使用能量方法分析前面估计的简单弹簧振子系统的振荡频率。弹簧中存储的

最大势能为

$$E_p = \frac{1}{2}k(Y_o)^2 \tag{2-59}$$

储存在运动物体中的最大动能为：

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M(\omega Y_o)^2 \tag{2-60}$$

如果使最大动能和最大势能相等，则可得

$$\frac{1}{2}k(Y_o)^2 = \frac{1}{2}M(\omega Y_o)^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \tag{2-61}$$

2.6　传递函数、零极点图以及伯德图

表2-2列出了多种系统的传递函数，以及它们相应的零极点图和频率响应伯德图。

表2-2　传递函数以及相应的零极点图和频率响应伯德图

系统类型	传递函数$H(s)$	零极点图	伯德图
单极点	$\frac{1}{\tau_p s+1}$	$j\omega$, σ, $-\frac{1}{\tau_p}$	$\lvert H(j\omega)\rvert$: 1, ω, $\frac{1}{\tau_p}$; $\angle H(j\omega)$: 0, −45, −90, ω
单零点	$\tau_Z s+1$	$j\omega$, σ, $-\frac{1}{\tau_Z}$	$\lvert H(j\omega)\rvert$: 1, ω, $\frac{1}{\tau_z}$; $\angle H(j\omega)$: +90, +45, 0, ω
超前	$\frac{\tau_Z s+1}{\tau_p s+1},(\tau_z>\tau_p)$	$j\omega$, σ, $-\frac{1}{\tau_p}$, $-\frac{1}{\tau_Z}$	$\lvert H(j\omega)\rvert$, ω; $\angle H(j\omega)$: $\frac{1}{\tau_z}$, $\frac{1}{\tau_p}$, +90, +45, 0, ω
滞后	$\frac{\tau_Z s+1}{\tau_p s+1},(\tau_z<\tau_p)$	$j\omega$, σ, $-\frac{1}{\tau_Z}$, $-\frac{1}{\tau_p}$	$\lvert H(j\omega)\rvert$, ω; $\angle H(j\omega)$: 0, −45, −90, ω

（续）

系统类型	传递函数$H(s)$	零极点图	伯德图
双极点	$\left(\frac{1}{\tau_{p1}s+1}\right)\left(\frac{1}{\tau_{p2}s+1}\right)$		
二阶、低阻尼	$\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right)+1}$		

2.7 级联系统的上升时间

多个系统级联在一起时（如图2-25所示），只要我们知道每个子系统的上升时间，就可以得到整体系统的上升时间。上升时间不是简单的相加。比如，N个系统串联连接在一起，每个系统的上升时间为τ_{R1}, τ_{R2}, $\cdots\tau_{RN}$，级联在一起的总体上升时间τ_R为[①]

$$\tau_R=\sqrt{\tau_{R1}^2+\tau_{R2}^2+\tau_{R3}^2+\cdots\tau_{RN}^2} \tag{2-62}$$

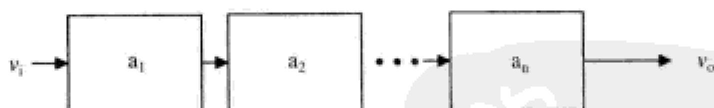


图2-25 级联系统

使用上升时间相加原则，我们可以求得N个相同电路级联在一起的上升时间为单个电路上升时间的$\sqrt{N}$倍。

2.8 本章习题

习题2.1

单极点低通滤波器电路（如图2-26所示）的电阻$R=1\text{k}\Omega$，电容$C=1000\text{pF}$。求解该电路的输入输出传递函数$H(s)$，计算10%~90%上升时间和–3dB带宽。

习题2.2

求解习题2.1的单极点滤波器的相位角和群延迟，并绘制它们的曲线图。

① 级联系统上升时间的详细数学推导可以参考William Siebert的著作*Circuits, Signal and Systems*的第16章，或者Tom Lee的著作*The Design of CMOS Radio-Frequency Integrated Circuits*的第7章。注意，上升时间相加原则只适用于单个系统阶跃响应的行为特性完全正常的情况。

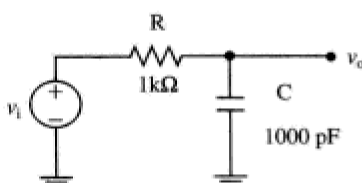


图2-26　单极点滤波器电路

习题2.3

对习题2.1的电路进行仿真，并且验证习题2.1和习题2.2的答案。

习题2.4

设计输入输出传递函数的自然频率$\omega_n = 10^6$rad/s、阻尼系数$\zeta = 0.1$的二阶RLC电路，求出该电路的品质因数Q为多少。

习题2.5

绘制习题2.4电路的传递函数的幅度和相位角仿真曲线。分析幅度响应仿真曲线出现的尖峰与电路品质因数Q的相关性。

习题2.6

弹簧振子系统的质量$M = 10$kg、弹簧系数$k = 10$N/m，求解系统的振动频率。

习题2.7

无阻尼并联谐振电路的电感$L = 10\mu$H、电容$C = 100\mu$F。在$t = 0$时刻，电容C充电到1V，电感L的电流为0A。求解$t > 0$时，电容电压和电感电流，并绘制它们的曲线图。最大电感电流又是多少呢？

习题2.8

RC电路如图2-27所示，该电路受100V输入阶跃函数$v_i(t) = 100u_{-1}(t)$驱动。

(a) 简略描述电阻电流$i(t)$和电容电压$v_c(t)$的变化，并在坐标系中进行描绘。

(b) 电容充电期间，电阻消耗多少能量？

(c) 将电阻增大到10kΩ，重复上面的实验。施加输入阶跃电压函数，电容充满电之后，电阻消耗多少能量？

（提示：求解 (b) 和 (c) 时既有简单的方法，也有繁杂的方法。简单思路是考虑电容器储存的能量和储存的电荷。）

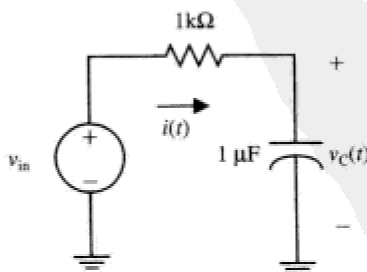


图2-27　习题2.8的RC电路

现在，如果保持电阻10kΩ不变，驱动电压源改为频率10Hz、幅度100V的方波信号（$v_i(t)$的最大值为100V、最小值为0V），解答下列各问。

(d) 简略描述电阻电流$i(t)$和电容电压$v_c(t)$的变化，在坐标系中进行描绘。

(e) 估计电阻消耗多少能量？

(f) 将方波的频率提高到1MHz，经历多个RC时间常数之后，估计电阻消耗多少能量？（提示：50%占空比方波信号包含哪些频谱分量？）

现在，如果保持电阻10kΩ不变，驱动电压源改为交流信号$v_i(s)$，解答下列各问。

(g) 绘制v_o/v_i的伯德图。

(h) v_o/v_i以Hz为单位的–3dB带宽是多少？

(i) 10%~90%上升时间是多少？

(j) 推导带宽和上升时间之间的关系表达式。

习题2.9

LC电路如图2-28所示。

(a) 计算谐振频率。

(b) 简略描述电容电压的阶跃响应，标注坐标轴和刻度值。

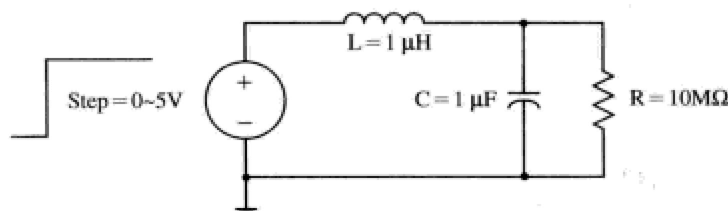


图2-28 习题2.9的LC电路

习题2.10

(a) 求解图2-29a的低通滤波器的10%~90%上升时间。

(b) 两个完全相同的图2-29a低通滤波器电路级联在一起，中间插入缓冲器电路以避免两级电路相互影响降低负载能力。求解整体级联电路的10%~90%上升时间。

(c) 使用PSPICE软件验证 (a) 和 (b) 的结果。



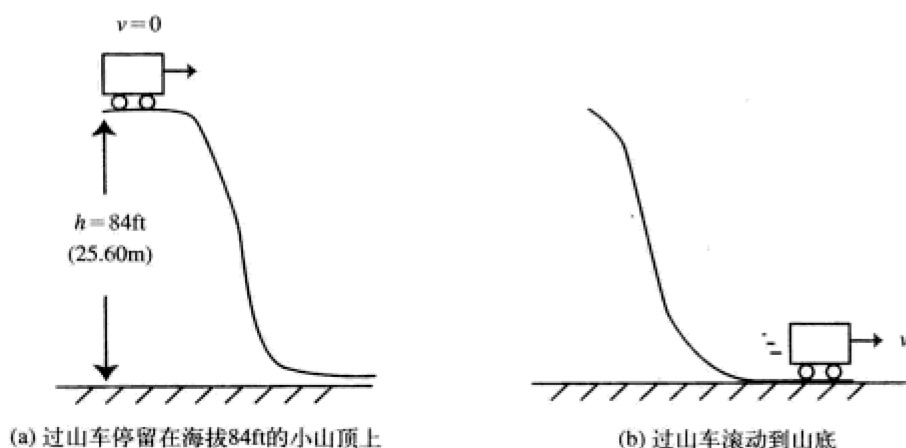
图2-29

习题2.11

有一个单极点低通滤波器RC电路，需要测量其阶跃响应以确定电容C的取值。已知电阻$R = 100\Omega$，手头有一个100MHz带宽示波器以及一个上升时间飞快的阶跃函数发生器。在示波器上测得电路的10%~90%上升时间为5ns，那么电容C的值为多少？

习题2.12

过山车起初停留在海拔84ft (1ft = 0.3048m) 的小山顶上（如图2-30a所示），突然受到非常轻的外力推过小山的边沿，滚到山底（如图2-30b所示）。假设机械和空气摩擦可以忽略不计，小车在山底的速度为多少？



(a) 过山车停留在海拔84ft的小山顶上　　(b) 过山车滚动到山底

图2-30　能量方法问题

2.9　参考文献

Andrews, James, "Low-Pass Risetime Filters for Time Domain Applications," *Picosecond Pulse Labs*, Application note #AN-7a, 1999.

Beranek, Leo L., *Acoustics*, Acoustical Society of America, 1954.

CRC Press, CRC *Standard Mathematical Tables*, 28th edition, 1987.

Guillemin, Ernst, *Introductory Circuit Theory*, John Wiley, 1953.

Johnson, Howard, "Risetime of Lossy Transmission Lines," *EDN*, October 2, 2003, p. 32.

Lee, Thomas H., *The Design of CMOS Radio-Frequency Integrated Circuits.*

Rao, Singiresu S., *Mechanical Vibrations*, 3rd edition, Addison-Wesley, 1995.

Roberge, James, *Operational Amplifiers*: *Theory and Practice*, John Wiley, 1975.

Senturia, Stephen D., and Wedlock, Bruce D., *Electronic Circuits and Applications*, reprinted by Krieger, 1993.

Siebert, William McC., *Circuits, Signals and Systems*, McGraw-Hill, 1986.

第3章 二极管物理学、理想（及非理想）二极管

本章概要

- 本章讲述双极性器件的基本知识，包括半导体物理学基础[①]、半导体内的电子流和空穴流概念、漂移流与扩散流的差异、（电子和空穴的）产生与复合，以及半导体掺杂对载流子浓度的影响。本章后面对理想二极管进行讨论，演示了二极管是如何传导正向电流，又是如何关断反向电压的。只要可能，文中尽量避免繁复的数学推导。不过，文中还是给出了足够的数学细节以帮助读者理解理想二极管重要的尺度定律（scaling law[②]）和函数依赖关系。本章后面还讨论了导致二极管出现非理想特性的诸多因素。本章结尾讨论了负载线概念，并对二极管的特性进行了总结。负载线方法在求解非线性器件电路的工作点时非常有效。负载线技术对于后续章节分析晶体管电路也是非常有帮助的。

3.1 绝缘体、良导体和半导体内的电流

从形成电流的难易程度出发，可以把自然界的材料划分为三大类：绝缘体、导体和半导体。半导体和金属都能够支持大电流，但是这两类材料中电荷流动的机制是不同的。电导体的“良好”程度可以用材料的特性——电阻率[③]或者电导率（电阻率的倒数）来衡量。电阻率是对给定材料在传导电流时能够达到何种程度的一种度量。如果材料中能够得到大量的自由电荷载流子，则该材料就属于良导体。

绝缘体是指不能够很好地支持电流流通的材料，比如石英、橡皮、塑料和某些陶瓷等。换句话说，绝缘体材料的电阻率非常高。绝缘体中电流的电阻之所以非常高是因为它几乎得不到支持电流通过的自由电荷。

良导体很容易支持电流通过。换句话说，要想从良导体中得到充足的电流，根本不需提供非常大的驱动电压。某些金属材料，比如铜、铝、金、银等，是非常好的良导体，因为它们拥有海量的自由电子，每个电子携带负电荷[④]，大小为$-q$，可以轻易地支持电流通过。典型金属材料的电导率比半导体和绝缘体高出许多个数量级。大多数金属材料都是良导体，不过，它们都不是“完美”导体[⑤]，至少在室温时是这样的。

---

① 我们将不会深入到半导体的量子结构，量子结构提供了严格的分析。为了让读者能够深刻理解半导体工作的基本原理，本章建立了更为简单的模型。Shockley和Bardeen的1956年诺贝尔奖演讲很好地回顾了半导体物理学，本章最后注明了该参考文献。

② 也译为缩放定律。——译者注

③ 如果查阅类技术参考书籍（比如*Handbook of Chemistry and Physics*），你将会看到书中常常列出的是各种材料的电导率。电阻率的单位是$\Omega \cdot m$。电导率是电阻率的倒数。

④ 电子携带的电荷为$-q$，$q = 1.6 \times 10^{-19}$C。

⑤ 有些化合物，比如铌钛，在低温时（比如液态氦的温度，4.2K）变为超导电材料。科学家们正在寻找超导体（superconductor）（工作温度低于某一临界温度时，超导体的电阻率为零）。到目前为止，还没有发现能够工作在室温环境的超导体。室温时，铜的电导率约为$5.9 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$，铝的电导率约为$3.5 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$。注意，如果铜、铝与其他金属一起做成合金材料，这些电导率数值将发生非常大的变化，金属材料的电导率随工作温度的降低而增大。

下面简单计算一下铜柱的电阻（如图3-1所示）。铜柱材料的电阻[①]为

$$R=\frac{l}{\sigma A} \tag{3-1}$$

这里l是铜柱的长度，A是其横截面的面积，σ是铜材料的电导率（电导率的单位是$\Omega^{-1}m^{-1}$）。如果将电池与金属柱连接在一起，如图3-1所示，那么金属柱中的电流是从左向右流动的（相应地，电子流动的方向是从右向左[②]）。假设铜柱材料的长度$l=0.1$m，横截面面积$A=10^{-4}m^2$，则其在室温下[③]的电阻约为16.9μΩ。

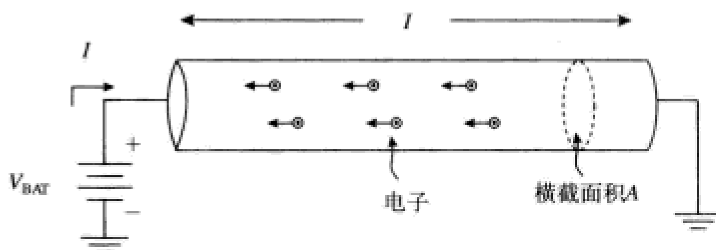


图3-1　施压电池电压后金属柱的电流

注：在金属内，电子的流动携带电流。电子从右向左流动携带负电荷，因此净电流的方向是从左向右。

根据电阻率大小，介于导体和绝缘体之间的是半导体。半导体材料的导电能力相对较好。典型的半导体材料有硅（Si）、锗（Ge）、砷化镓（GaAs）。半导体和金属导体之间的重要差别在于电荷载流子传播电流的方法。在半导体中，有两种电荷载流子支持电流通过，它们是电子（负电粒子，携带$-q$电荷）和空穴（正电粒子，携带$+q$电荷）。本征半导体（intrinsic semicondutor）是尚未掺入杂质的半导体材料。下一节我们将讨论半导体材料中的电子和空穴。

3.2　电子和空穴

如图3-2所示是硅晶格（silicon lattice，也可以称为硅原子晶体矩阵）的理想二维平面结构[④]。每个硅原子有四个外层［“价电子带”（valence band）］电子，以及四个和邻近原子共享的外层电子。这样，每个原子总共有八个“共价”键（covalent bond）。硅晶格的理想化模型以及电子和空穴运动的最终概念掩盖了量子结构效应的诸多细微之处。不过，这个理想模型在解释二极管和晶体管的电流时已被证明是极其有用的，并且是惊人地准确。

在理想晶格中，所有的共价键都是完全填充的，相应的电子都被紧紧地束缚在相邻原子

---

① 这里的计算忽略了金属柱末端接触形成的任何电阻。

② 注意，电子的电荷是负的。因此，电子从右向左流动时，净电流的方向是从左向右。图中标注的是常规的电流方向。

③ 电阻率是电导率的倒数。室温下，铜的电阻率约为$1.7\times10^{-8}\Omega\cdot m$。铜电阻率的温度系数约为$+0.4\%/^{\circ}C$。

④ 硅和锗的晶格结构事实上是钻石型的晶体点阵，每个原子与其最近的四个原子形成共价键。该图是真实晶格的理想化平面化描述。解释半导体内近似载流子流动的方法是由物理学家William Shockley在半导体研究早期（1950年左右）提出的。解释电子形成共价键的物理定律本质上是量子力学，因此必须先解决薛定谔波动方程。Shockley在描述晶体管内的载流子运动时曾经说过：“解释电子共价键对的行为特性的物理定律是量子定律，必须采用波动力学来描述电子的运动”。参见W.Shockley的著作*Transistor Electronics: Imperfections, Unipolar and Analog Transistors*。因此，图3-2和图3-3的模型本质上是有点漫画性质的，不过，它们在揭示半导体内的载流子运动时还是抓住了其物理本质。

核的周围。因此，没有“自由”电荷能够支持硅晶格导电[①]。

现在，在实际半导体的内部，由于硅晶格的随机热运动造成某小部分共价键被破坏（如图3-3所示）。如果向晶格材料施加电压，这些自由电子就能够流动，支持净电流通过。在共价键被破坏之前由电子占据的位置，结果就形成了空穴。空穴携带净的正电荷$+q$，并且空穴还可以在硅晶格内到处移动。换句话说，除了空穴带正电荷以外，空穴的电荷载流子行为特性与电子极其相似。因此，半导体的总电流是自由电子形成的电流和自由空穴形成的电流的累加。

$$J = J_e + J_h \tag{3-2}$$

这里J是总电流密度（单位是A/m^2[②]），J_e、J_h分别是电子电流的密度和空穴电流的密度。

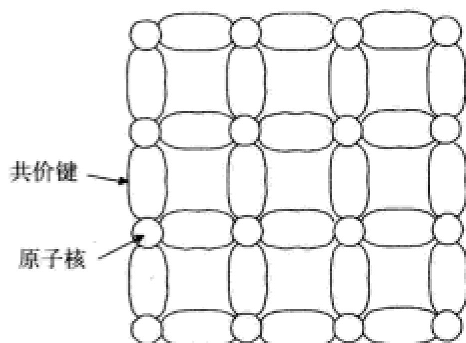


图3-2 理想化的硅晶格结构，所有共价键完全填充

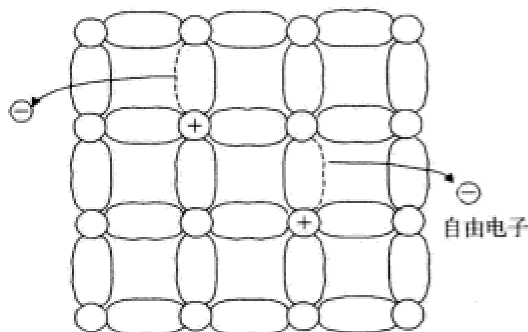


图3-3 某些共价键被破坏的实际硅晶格

注：每个破坏的共价键允许一个带负电荷的电子和带正电荷的空穴移动。

在没有加入任何杂质的完美硅晶格内，我们称之为*本征半导体*，自由电子的数量和自由空穴的数量是相等的，这是因为自由电子和空穴成对出现。规定本征半导体单位体积内电子的数量为n，单位体积内空穴的数量为p。从这个简单推理出发，我们可以得到本征半导体内空穴的数量等于电子的数量，即

$$n = p \equiv n_i \tag{3-3}$$

现在，我们已经定义了*本征载流子浓度*n_i，它的数量就是本征半导体内被破坏的共价键的数目。

更进一步，我们还可以发现，随着温度的升高，遭破坏的共价键的数目会越来越多，这是由更多的热骚动（thermal agitation）造成的。因此，在本征半导体的内部，本征载流子浓度（用$n_i(T)$表示）是温度的函数[③]，即

$$np = n_i^2(T) \tag{3-4}$$

硅材料在室温时的本征载流子浓度n_i的典型值为每立方厘米大约1.5×10^{10}个。本征载流子浓度是温度的强函数，随温度的升高而增大。

① 这是半导体在极低温度下的行为特性。比如，在低温环境中，几乎没有外层共价键遭到破坏（因为晶格如此之冷以至于没有足够的热能使电子颤抖，挣脱束缚）。

② 如果能够计算半导体的电流密度J，则求解其总电流将变得非常简单。只需将电流密度J（单位是A/m^2）乘以总体横截面面积A即可，也就是$I = JA$。

③ 该结果称为“质量作用”定律（mass-action law），在化学上有相似概念。比如，在酸性溶液中，H^+和OH^-的浓度也遵从质量作用定律。

下面做一个简单的思考性实验。将电池与一小块半导体材料连接在一起，这里选用硅材料（如图3-4所示）。本征硅有一小部分①外层共价键被破坏，因此，有一定浓度n_i的自由电子和自由空穴。这些自由电荷能够运动，支持传导电流。电池建立的电场导致自由电子向左运动，空穴向右运动②，本征半导体的总电流等于电池的端点电流I，如图3-4所示。

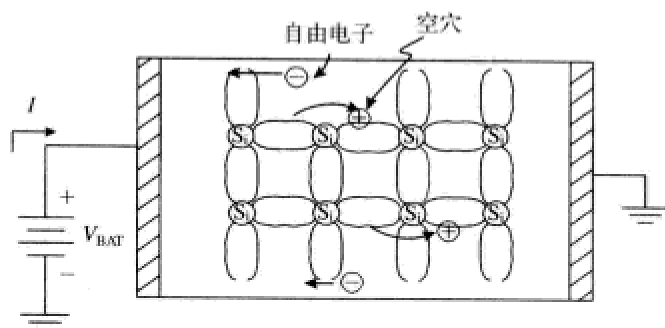


图3-4 电池连接到一小块半导体材料上

注：由于带负电荷的电子和带正电荷的空穴半导体有电流通过。如图中所示，受电池施加电场对电荷的作用力影响，电子从右向左运动，空穴从左向右运动。

3.3 漂移、扩散、复合和产生

半导体内的电荷载流子一旦挣脱束缚，成为自由的带电粒子，可能出现多种情况。一是受电场作用力的影响而发生*漂移作用*。二是如果存在带电粒子密度梯度差则发生*扩散作用*。三是如果电子与空穴相遇，填充空穴，则电子和空穴发生*复合作用*。在上述三种情况发生的同时，由于受热骚动或外部激励③的影响，还将*产生*新的载流子。在半导体内，这四种机制同时发生。漂移、扩散、复合与产生四种作用之间的平衡细节可以告诉我们半导体材料内的净电流。

3.3.1 漂移

如图3-5a所示，电子受到电场$\boldsymbol{E}$的作用，在其上形成了静电力。在该图中，如果电场矢量$\boldsymbol{E}$是从左指向右的方向，则电子受到的作用力是自右向左的。电子的平均漂移速率为

$$v = -\mu_n \boldsymbol{E} \tag{3-5}$$

这里μ_n是一个常用的半导体材料常数④，称之为*电子迁移率*⑤。速率的负号表示电子的漂

① 让我们来看一下被破坏的共价键部分。每立方厘米体积内的硅原子数量约为5×10^{22}个。室温时，每立方厘米约有1.5×10^{10}个自由电子和1.5×10^{10}个自由空穴。因此，只有非常小的一部分（3.33×10^{12}个中约占1个）共价键被破坏。不过，就是这微不足道的部分对半导体的电流却有剧烈的影响。

② 我们可以把空穴想象为真空，共价键从一个位置跳到另一个位置时可以填充这个真空。在这种简单方式中，我们可以把“空穴”想象为载流粒子。

③ 比如，对一小块半导体实施光照，或者对其进行加热，都能够产生电子/空穴对。

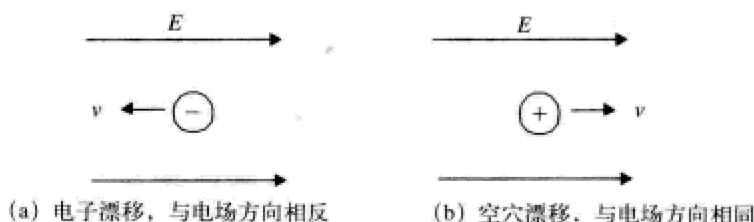
④ 注意，这个“常数”并不是恒定的。它随温度、掺杂水平以及施加电场的电平等因素变化。你或许有疑问，电子为什么有平均漂移速率，为什么不是持续加速到越来越高的速率。完美的半导体周期点阵晶格在绝对零度不存在自由电子。不过，在绝对零度以上，晶格颤抖，运动电子撞击晶格，速度放缓。晶格内的杂质也能够释放运动电子。电子的平均撞击时间间隔称为τ_c，电子的平均漂移速率与电场强度的大小成比例。自由粒子的迁移率为$\mu=q\tau_c/m_{eff}$。这里q为电子的电荷，m_{eff}为运动粒子的有效质量。

⑤ 迁移率的单位是$cm^2/(V\cdot s)$。

移运动与施加电场的方向是相反的。图3-5b所示是空穴受到电场$\boldsymbol{E}$作用的情况，形成的静电力与施加电场的方向相同。空穴的平均速率为

$$v = -\mu_p \boldsymbol{E} \tag{3-6}$$

这里μ_p是空穴的迁移率。注意，电子的迁移率与空穴的迁移率不同。通常，在半导体内电子的迁移率是空穴的2~3倍[①]。



（a）电子漂移，与电场方向相反　（b）空穴漂移，与电场方向相同

图3-5 电场内的电荷载流子

下面，我们来考虑电场内有大量空穴的情况。空穴形成的漂移电流密度为

$$J_{h,\,drift} = q\mu_p p\boldsymbol{E} \tag{3-7}$$

这里p是空穴的浓度（单位体积内的空穴数量），$\boldsymbol{E}$是电场强度。相似地，电子形成的漂移电流密度为

$$J_{n,\,drift} = q\mu_n n\boldsymbol{E} \tag{3-8}$$

3.3.2 扩散

菲克扩散定律描述了粒子在随机热运动的作用下是如何从高浓度区域向低浓度区域扩散[②]的。在密闭房间内的一角打开香水瓶子就可以演示该原理。如果能够等待足够长的时间，香水的气味将弥漫整个房间，这是因为香水分子已经从房间内的高浓度区域扩散到了其他低浓度区域。菲克扩散定律从数学原理上论述了粒子的三维扩散特性，该定律表明粒子的扩散通量与其浓度梯度成正比关系，即

$$\boldsymbol{F} = -D\nabla C \tag{3-9}$$

这里C为扩散粒子的浓度，$\boldsymbol{F}$为扩散通量（每平方厘米每秒的粒子数目），D为扩散常数，其单位是cm^2/s。在一维空间内，菲克定律可以简化为

$$\boldsymbol{F} = -D\frac{dC}{dx} \tag{3-10}$$

因此，带电粒子倾向于沿着浓度梯度下降的方向扩散。在PN结的内部，只要存在携带自由电荷载流子的浓度梯度，也会发生这样的扩散过程。

我们考虑一个思考性实验，可以计算出菲克定律的数学形式（但不是细节）。考虑一片空间区域，那里的自由电荷浓度正在变化，这里假定自由电荷为空穴（如图3-6所示）。空穴正在经受随机热运动。比如，在$x = -x_0$处，从统计学上来讲，一半空穴向左运动，另一半空穴

① 硅在中等掺杂水平和中等电场内的迁移率的典型值为$\mu_n \approx 1360\ cm^2/(V \cdot s)$，$\mu_p \approx 500\ cm^2/(V \cdot s)$。参见R.W.Pierret发表在*Semiconductor Fundamentals*, Vol.1 58页上的论文“Modular Series on Solid State Devices”。

② R.W.Pierret发表在*Semiconductor Fundamentals*, Vol.1（第67～71页）上的论文“Modular Series on Solid State Devices”以及R.Feynman等人的著作*The Feynman Lectures on Physics*, Vol.1的第43章对扩散作用进行了令人满意的直观解释。

向右运动。在$x=+x_0$处也是如此。为了求解$x=0$处的净电流，可以认为$x=0$处的电流为左边电流与右边电流之和，即

$$J(x=0)=k[p(x=-x_o)-p(x=+x_o)]=-k(2x_o)\left[\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right] \tag{3-11}$$

这里k为使得等式成立的某个常数。注意，$x=0$处的净电流与$x=-x_0$和$x=+x_0$处的浓度差成比例。通过上面的数学处理①，我们可以看到，$x=0$处的净电流也与浓度梯度$\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$成比例。现在，我们可以写出空穴扩散电流的熟悉形式

$$J_{\mathrm{h,diff}}=-qD_{\mathrm{p}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{3-12}$$

这里q为电子电荷，D_{p}为空穴的扩散常数②。使用类似的推导方法，我们还可以求解得到电子的扩散电流

$$J_{\mathrm{e,diff}}=qD_{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x} \tag{3-13}$$

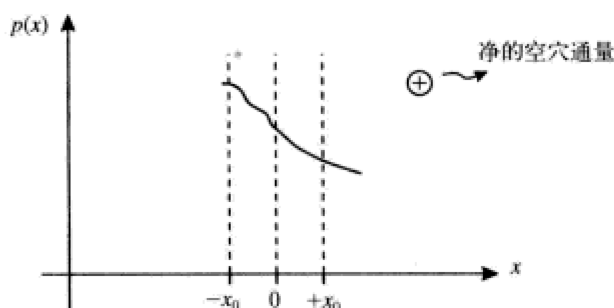


图3-6　空穴浓度梯度，导致净空穴通量自左向右

下面做个关于扩散的实验，如图3-7所示。在$t=0$时刻，在$x=0$处存在高浓度粒子区（该实验中为电子），对半导体材料实施照明或者进行其他激励可以产生这些粒子。这些粒子处于随机热运动状态；有的向左扩散，有的向右扩散。多个时间点的粒子浓度$n(x,t)$如图3-7所示。在$t=t_1$时刻，$x=0$处的最大浓度降低，粒子已经向左向右扩散。在t_2和t_3时刻，粒子的浓度更加减小。随着时间无限增加，各处的粒子浓度趋于相等，扩散终止。关于这个扩散问题，存在完整的闭环形式解③。各处的电子浓度为

$$n(x,t)=\frac{A}{\sqrt{4\pi D_{\mathrm{n}}t}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4D_{\mathrm{n}}t}}+n_0 \tag{3-14}$$

这里A为常数，D_{n}为电子扩散常数，n_0为电子的平衡浓度（equilibrium concentration）。

---

① 这个手工推导过程掩盖了碰撞和平均自由路径等的细节，Feynman在第43章（"The Feynman Lectures on Physics, Vol.1"）进行了很好的讨论。参见本章后面的参考文献。

② 硅在室温时的扩散常数的近似值为$D_{\mathrm{n}}\approx 35\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$，$D_{\mathrm{p}}\approx 12.5\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$。非常有趣的是，扩散和漂移系数满足"爱因斯坦关系"，扩散常数值与迁移率系数的数学关系为$\frac{D_{\mathrm{p}}}{\mu_{\mathrm{p}}}=\frac{D_{\mathrm{n}}}{\mu_{\mathrm{n}}}=\frac{kT}{q}$。在半导体物理学中我们能够多次看到"热电压"$kT/q$，室温时的热电压约为26mV。

③ 参见R.B.Adler等人的论文"Introduction to Semiconductor Physics"，*SEEC* Volume 1, p.174,1964。

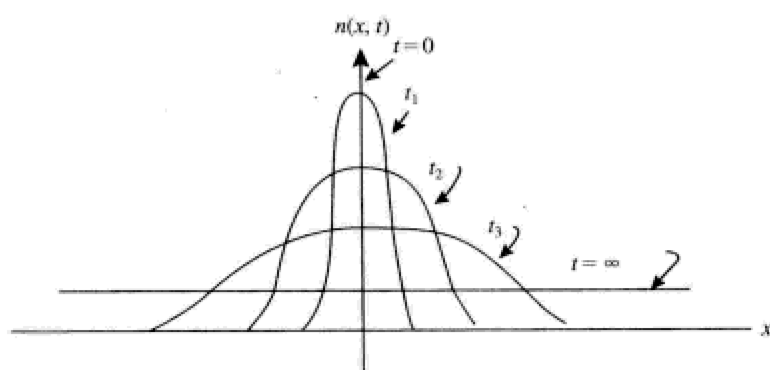


图3-7 扩散思考性实验演示

注：在$t=0$时刻，$x=0$处具有极高的粒子浓度。粒子浓度随时间的增加而减小，$t_3>t_2>t_1$。

1949年设计的著名的Shockley-Haynes实验[①]中（如图3-8a所示），使用光源照射半导体材料的一片区域，同时向半导体材料施加电场E_x。电场E_x与半导体材料左侧施加的电压成正比，方向自左向右。

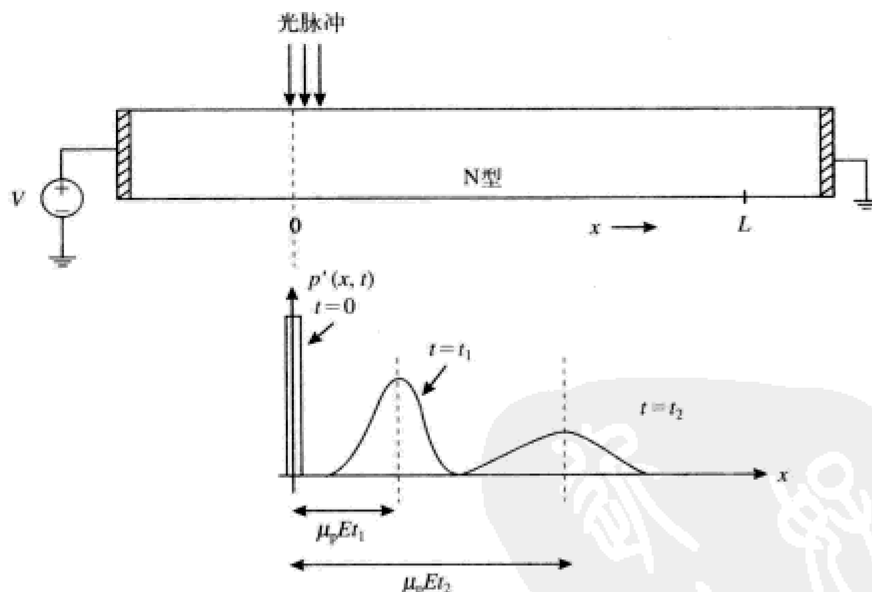


图3-8 Shockley-Haynes演示实验

注：额外空穴的浓度（$p'(x,t)$）以速度μ_p向右运动。这里μ_p是空穴的迁移率。

在$t=0$时刻，打开光源，在$x=0$处形成很高的空穴浓度P_0。关闭光源，半导体内部的浓度梯度导致空穴发生扩散，同时施加的电场导致空穴向右漂移。使用检测装置测量$x=L$处的空穴浓度，可以得到空穴浓度的表达式为

$$p(x,t)=\frac{P_o}{2\sqrt{\pi D_p t}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{(x-\mu_p E_x t)^2}{4D_p t}+\frac{t}{\tau_p}\right)}+p_{no} \tag{3-15}$$

① 这是首次对半导体内少数载流子的漂移和扩散动态过程的直观观察。在Shockley的诺贝尔奖演讲（1956）中，J.R.Haynes和W.Shockley发表在*Physical Review*, vol.75, p.691(1949)上的论文中，以及J.R.Haynes和W.Shockley的另一篇论文"The Mobility and Life of Injected Holes and Electrons in Germanium"，*Physical Review*, vol.81, p.835(1951)中有详尽的描述。此外，在稍早引用的参考文献*SEEC* Volume 1内也有描述。

实验半导体材料内部的空穴浓度的演化过程如图3-8所示。通过观察脉冲中心自左向右运动的速度，可以利用该结果来求解空穴的漂移系数μ_p（即空穴的迁移率）。空穴的漂移系数为

$$\mu_p = \frac{v_x}{E_x} \tag{3-16}$$

这里v_x为脉冲中心自左向右移动的速率。通过观察脉冲展宽的速度也可以求解空穴的扩散系数D_p。

3.3.3 产生和复合

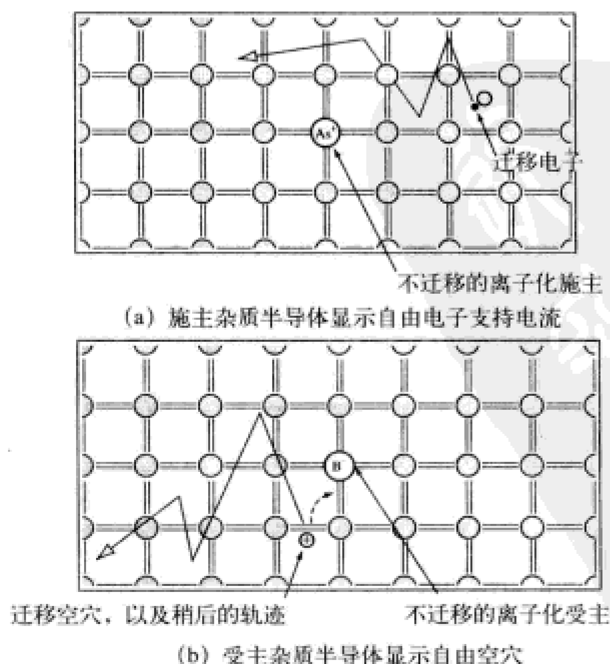
自由电子在晶格内移动，与空穴相遇后会发生什么情况呢？电子倾向于填充空穴，电子和空穴将非常有效地相互消除，该过程称为复合。相似地，生成载流子对的过程称为*产生*。对晶格进行加热，或者使用光源照射半导体材料，都可以产生载流子对。有一点必须理解，在半导体内部，产生和复合过程是一直在进行的，只不过两者处于平衡状态。

3.3.4 半导体内的总电流

在半导体内部，总电流是漂移电流与扩散电流的组合。在给定的晶体管内，空穴和电子都既有漂移成分也有扩散成分，使得这变成了一个极其复杂的过程。因此，在总电流中需要考虑这四种成分。稍后，我们将会研究该过程究竟是如何工作的，现在先来分析半导体的掺杂效应（effect of semiconductor doping）。

3.4 半导体的掺杂效应

半导体材料掺杂之后，非常少量的精选杂质（impurity）会精准地注入到半导体内部，这将导致本征半导体内空穴和电子之间的平衡发生剧烈改变。如图3-9所示。



（a）施主杂质半导体显示自由电子支持电流

（b）受主杂质半导体显示自由空穴

图3-9 施主和受主杂质半导体

3.4.1 施主（donor）掺杂材料

N型半导体的典型掺杂剂（dopant）是化学元素表（如图3-10所示）中的第五列元素，比如磷元素和砷元素。这些第五列元素有5个外围电子。比如，如果硅晶格内的1个硅原子被磷原子取代，将会多出1个外层电子；这个额外电子变得十分自由，可以在晶格内到处运动，其角色就是携带净电荷数为$-q$的电荷的自由迁移粒子。

IIB	III	IV	V	VI
	5 B	6 C	7 N	8 O
	13 Al	14 Si	15 P	16 S
30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se
48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te

图3-10　化学元素周期表节选，显示的第三列和第五列元素常用作半导体的掺杂剂。第三列元素为受主掺杂剂，第五列元素为施主掺杂剂

使用磷元素或者砷元素掺杂的硅半导体材料在本征电子浓度n_i的基础上增大了自由电子的数量。掺杂的另一个作用是打破了电子浓度和空穴浓度之间的平衡，可以得到更多的自由电子，与更多的空穴复合，导致空穴的数量下降。所有这些过程的整体效应是，大量掺杂（$N_D \gg n_i$）[①]的平衡N型半导体材料内的平衡载流子浓度变为[②]

$$n_{no} \approx N_D$$
$$p_{no} \approx \frac{n_i^2}{N_D} \tag{3-17}$$

3.4.2 受主（acceptor）掺杂材料

硼是化学元素周期表中第三列的元素，具有3个外层电子，是P型半导体的典型掺杂剂。因此，硼是“受主”施主。如果硅晶格内的1个硅原子被硼原子取代，外层将缺少1个电子，无法形成共价键。结果是出现一个称为“空穴”的量子“真空”，其作用就是携带净的正电荷的自由迁移粒子。P型半导体平衡时的空穴和电子浓度为

$$p_{po} \approx N_A$$
$$n_{po} \approx \frac{n_i^2}{N_A} \tag{3-18}$$

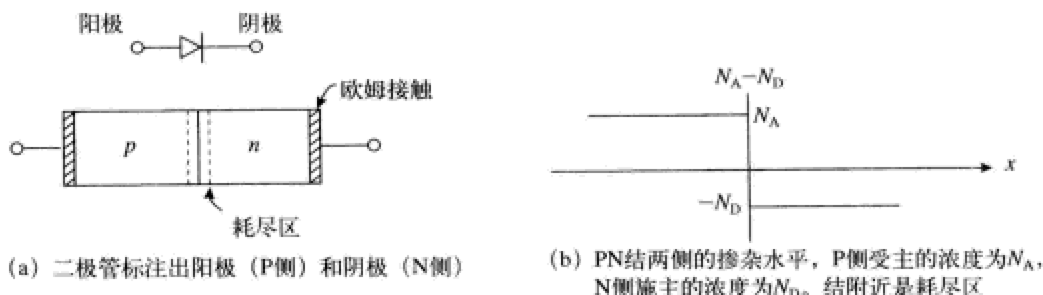
① 这里假定掺杂水平不是很高使得半导体发生退化（degenerate）。关于退化半导体统计学的讨论参见Robert F.Pierret的著作*Modular Series on Solid State Devices*, 卷1, *Semiconductor Fundamentals*, Addison-Wesley于1983年出版。

② 在该术语中，n_{no}是N型半导体材料内自由电子的平衡浓度，p_{no}是N型半导体材料内空穴的平衡浓度。Paul Gray和Campbell Searle的著作*Electronic Principles Physics, Models and Circuits*（John Wiley于1967年出版）也使用了相同的命名规则。

3.5 热平衡状态的PN结

现在，我们可以提出载流子的运动、生成和对消等概念(也就是漂移、扩散、产生和复合)以说明二极管是如何工作的。我们首先考虑“热平衡”（thermal equilibrium）时的情况，即二极管没有连接，没有电流，孤立地安置在实验台上。并且还不对二极管施加外部激励，比如使用光源照射等。

先来考虑理想化的PN结二极管的结构。双极性结型二极管的一维模型如图3-11a所示，由相邻的P区和N区组成，两端有传导性接触，图中同时标注了二极管的电路模型。二极管的阳极（anode）与P区连结在一起，阴极（cathode）则与N区连结在一起。稍后，我们将会讨论图中标注的PN结附近的“耗尽区（depletion region)”的特性。我们先考虑“突变”结[①]的情况，如图3-11b所示，在$x=0$处掺杂水平发生突变。PN结的P型侧是浓度为N_A的受主半导体材料，PN结的N型侧则是浓度为N_D的施主半导体材料。



（a）二极管标注出阳极（P侧）和阴极（N侧）

（b）PN结两侧的掺杂水平，P侧受主的浓度为N_A，N侧施主的浓度为N_D。结附近是耗尽区

图3-11　理想PN结的几何结构

刚开始时，我们考虑二极管两端没有任何外部接触的情况，因此不存在外部施加电压。我们先来做个思考性实验，如果我们将P型半导体材料尽可能地靠近N型半导体材料，会发生什么情况呢？当P型材料与N型材料充分接近时，P型材料内高浓度的空穴将扩散进入N型材料，同时，N型材料内高浓度的电子将扩散进入P型材料。

如果扩散是唯一的载流子运动过程，那么最后在整个二极管的内部电子和空穴的浓度将会相等。不过，当空穴从P侧向N侧扩散时，P侧硅晶格内将出现固定不动的负电荷；当电子从N侧向P侧扩散时，N侧硅晶格内将出现固定不动的正电荷。因此，PN结P侧附近有一定数量的净的负电荷。同理，PN结N侧附近有一定数量的净的正电荷。P侧固定不动的负电荷将阻滞N侧的电子进一步向P侧扩散。相似地，N侧固定不动的正电荷将阻滞P侧的空穴进一步向N侧扩散。后面我们还将看到，我们还可以使用已建立的、与扩散方向相反的势垒电场（barrier electric field）来定量描述这种效应。整个二极管内电子和空穴的平衡浓度曲线如图3-12所示。

PN结附近的净电荷形成电场。电场的作用是阻滞电流进一步通过PN结的壁垒。PN结在平衡状态时的电荷密度、电场强度以及电位差曲线如图3-13所示[②]。在平衡状态，二极管内部的漂移过程和扩散过程建立了微妙的平衡。尽管二极管内存在四种电流成分（电子和空穴的漂移与扩散），但是在外部看来，最终不存在二极管电流。

① 这是PN结的一种近似表示。突变结的掺杂水平在$x=0$处从P型快速变为N型。

② 这些曲线图是根据突变PN结绘制的，假定N侧的掺杂浓度为N_d，P侧的掺杂浓度为N_a。

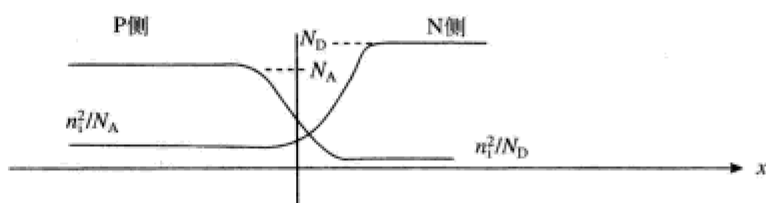


图3-12 未施加电压偏置时，PN结二极管内的载流子浓度曲线在N型侧，远离势垒区的电子浓度约为N_D，空穴浓度约为n_i^2/N_D。在P型侧，远离势垒区的空穴浓度约为N_A，远离势垒区的电子浓度约为n_i^2/N_A

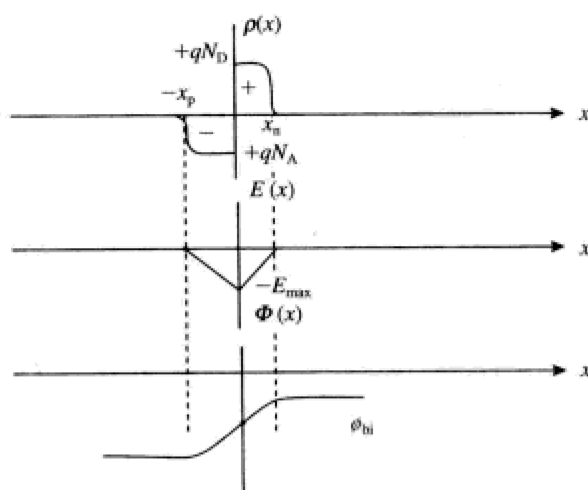


图3-13 理想PN结在热平衡状态时的一维近似曲线。这些曲线图标注了耗尽区的电荷密度$\rho(x)$、电场强度$E(x)$以及结电势$\Phi(x)$的函数变化关系

漂移–扩散过程导致在PN结附近的区域，自由载流子的数目极其缺乏。因此可以将PN结两侧从$-x_p$到$+x_p$的区域称为耗尽区，如图3-13所示。

我们可以使用式（3-19）所示的一维高斯定律来求解电场$E(x)$。

$$\frac{\mathrm{d}E(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{-\rho(x)}{\varepsilon_{Si}} \tag{3-19}$$

这里$\rho(x)$为净电荷，ε_{Si}为硅材料的介电常数（dielectric permittivity）。因为净电荷$\rho(x)$在P侧和N侧的取值是分段固定的，所以电场$E(x)$在P侧和N侧是分段线性（piecewise linear）的，如图3-13所示。可以得到PN结的最大电场发生在$x=0$处，其大小为

$$|E_{max}|=\frac{qN_d x_p}{\varepsilon_{Si}}=\frac{qN_a x_n}{\varepsilon_{Si}} \tag{3-20}$$

相似地，还可以通过对电场进行积分来求解PN结的电势（potential），这是因为

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}=-E(x) \tag{3-21}$$

PN结在未施加偏置电压时，在耗尽区存在一个电压Φ_{bi}，称之为*内建电位差*（built-in potential）。该电压是由阻滞迁移电子和空穴扩散通过PN结的电场形成的结果。PN结的内建电位差为

$$\phi_{bi}=\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right) \tag{3-22}$$

我们将会看到kT/q项在半导体中经常出现，这里k是波尔兹曼常数（Boltzmann's constant），T是以开尔文为单位的绝对温度（absolute temperature），q是电子的电荷。这个“热电压（thermal voltage）”数值在室温时约为26mV。

3.6 施加正向偏置电压的PN结

当我们想使二极管正向偏置时，要在二极管的正极（P侧接触点）和负极（N侧接触点）之间施加一个正向电压。在正向偏置状态下，漂移和扩散之间的微妙平衡将会发生剧烈改变，二极管内将会有净电流通过。施加正向偏置电压（也就是在P侧相对N侧施加了一个正向电位差）降低了PN结处的势垒电场的幅度。势垒电场减小时，从P侧向N侧注入空穴，以及从N侧向P侧注入电子，都将变得更加容易。这就导致存在净的正向电流从二极管流过。

如图3-14所示是分别是正向偏置（$V>0$）、反向偏置（$V<0$）以及零偏置（$V=0$）条件下的PN结的电荷、电场以及电压曲线。零偏置时（也就是没有向二极管施加电压时），二极管内耗尽区的电压就是其内建电位差Φ_{bi}。因为二极管内漂移和扩散的各种电流成分恰好相互抵消，不存在净的二极管电流。PN结的电场势垒曲线如图3-14所示。

反向偏置时，施加的偏置电压与PN结的内建电位差Φ_{bi}同向叠加在一起。这就意味着，反向偏置时PN结的电场势垒变得更高，耗尽区也变得更宽。在更高的反向偏置电压作用下，耗尽区宽度再次增大，最大电场强度也同时增大。如果持续加大反向偏置电压，电场强度也将越来越大，直至PN结被反向击穿（breakdown）。硅材料PN结的势垒电场强度达到3×10^5V/cm时，PN结将被反向击穿。

正向偏置时，受施加电压的影响，PN结电场势垒减小。电场势垒的减小使得空穴能够从P侧注入到N侧，电子能够从N侧注入到P侧。之后，注入的载流子向远离PN结的方向扩散，建立净的二极管电流，称之为二极管的*正向电流*（forward current）。后面我们将会看到，当二极管正向偏置时，二极管的电压与电流成指数关系。

如图3-15所示是二极管正向偏置时，半导体内N侧和P侧的少数载流子[①]浓度曲线。正向偏置时，由于耗尽区宽度变小，电场势垒减小，电子从N侧注入P侧，空穴从P侧注入N侧。注入到P侧的电子继续向左边扩散，注入到N侧的空穴继续向右边扩散。扩散形成自左向右的净的二极管电流。详细分析[②]告诉我们，二极管电压与耗尽区边沿的额外少数载流子浓度成指数关系，即

$$
\begin{aligned}
n'(-x_p) &= n(x) - n_{po} = A\left(e^{\frac{qV_D}{kT}} - 1\right) \\
p'(x_n) &= p(x) - p_{no} = B\left(e^{\frac{qV_D}{kT}} - 1\right)
\end{aligned}
\tag{3-23}
$$

① 我们来讨论这里显示的载流子为什么是“额外少数载流子”。假设二极管P侧的电子浓度为n'。因为电子在二极管的P侧是少数，所以n'个电子是少数载流子。当然，这里假定注入载流子的浓度相比多数载流子浓度N_A是很小的，即$n'\ll N_A$。描述这种情况的专业术语叫*低水平注入*（low-level injection）。我们之所以称绘制的载流子浓度n'是“额外的”，是因为这些载流子超过了P侧的平衡浓度n。记住，P侧的载流子平衡浓度为$p\approx N_A$，$n\approx n_i^2/N_A$。

② 参见Pierrets的著作*Modular Series on Semiconductor Devices*，卷II，*The PN Junction Diode*，pp.48-50。因子kT/q（k=波尔兹曼常数，T=以开尔文为单位的绝对温度，q=电子的电荷）在半导体中多次重复出现。室温时（300K），kT/q的数值约为26mV。

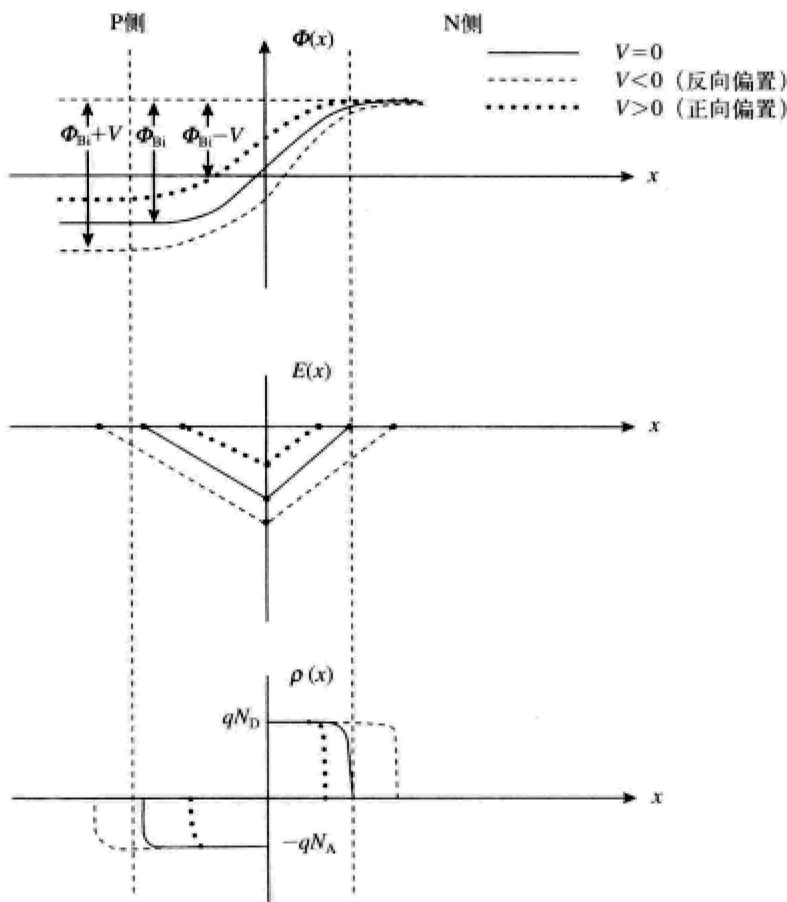


图3-14 零偏置、正向偏置以及反向偏置下PN结的耗尽区，标明了耗尽区的电荷密度$\rho(x)$、电场强度$E(x)$以及结电位差$\Phi(x)$的变化曲线。反向偏置时，耗尽区宽度增大，最大电场也同时增大。正向偏置时，则正好相反

这里A和B是与掺杂水平以及本征载流子浓度[①]有关的常数，n_{po}是P侧远离PN结的电子浓度，p_{no}是N侧远离PN结的空穴浓度。

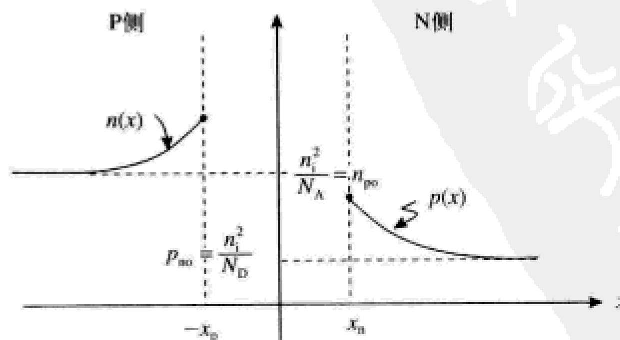


图3-15 正向偏置时PN结内少数载流子的浓度曲线

注：n_{po}是P侧远离PN结的电子浓度，p_{no}是N侧远离PN结的空穴浓度。

① 详细分析表明$A=n_i^2/N_A$，$B=n_i^2/N_D$，这里N_A是P侧的受主浓度，N_D是N侧的施主浓度。

现在，我们要将正向偏置二极管的零散讨论集中在一起，来推导二极管电压和电流之间的指数关系。实现这一点的关键结论如下：

- 空穴从P侧注入N侧，电子从N侧注入P侧。
- 注入的这些空穴在耗尽区的两侧形成浓度梯度。
- 耗尽区边沿的额外少数载流子的浓度与二极管的偏置电压V_D服从指数关系。
- PN结的浓度梯度形成了额外少数载流子的扩散电流。实质上，注入载流子向远离PN结的方向扩散。载流子扩散过程中，会与少数载流子复合。曲线的形状沿着远离PN结的方向服从指数衰减关系[1]，即

$$p'(x)=p(x=x_n)e^{\frac{-x'}{L_p}}$$

- 扩散电流是少数载流子电流的主导成分。换句话说，少数载流子的扩散电流比其漂移电流大得多。这是由于少数载流子的浓度比较小造成的（由前面讲述的质量作用定律得到）。不过，少数载流子的浓度梯度很大，扩散起主要作用。

正向偏置二极管的各种电流成分的关系曲线如图3-16所示。首先关注P侧的电子电流，标号为J_e。我们知道，因为这些电子电荷是从N侧注入的，耗尽区附近存在电子浓度梯度。该浓度梯度导致出现扩散电流。实质上，电子在P侧向远离PN结的方向扩散（图中向左扩散）。这就是图中标注的电流J_e。随着额外少数载流子的扩散离去，它们在P区材料内与空穴进行复合。这就导致出现了图中标注的净的空穴电流J_h。

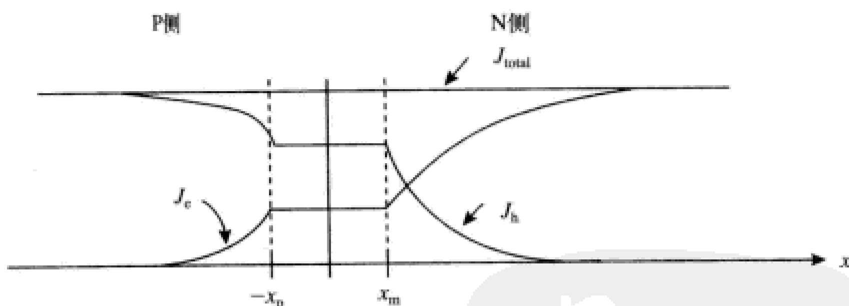


图3-16　正向偏置时二极管内的多种电流成分

注：J_e是由电子流动形成的电流密度（A/m^2），J_h是由空穴流动形成的电流密度，J_{total}是总电流密度。

假定穿过耗尽区的电子电流J_e和空穴电流J_h固定不变。我们还假设耗尽区是如此缺乏电荷，以致在耗尽区不会发生复合现象。

那么，现在二极管的电压和电流之间的指数关系又会怎么样呢？因为我们知道，二极管的总体电流是电子电流和空穴电流之和，又因为我们假设穿过耗尽区的电子电流和空穴电流固定不变，我们可以写出二极管的电流公式

$$J_{total}=J_e(x=-x_p)+J_p(x=x_n) \tag{3-24}$$

电流$J_e(x=-x_p)$和$J_p(x=x_n)$的各个成分受扩散过程控制，并且我们知道浓度梯度与PN结的偏置电压有关，即

[1] L_p是少数载流子空穴的扩散路程长度。它是对空穴扩散进入N区材料发生复合之前远离PN结的距离的度量。从数值上讲，$L_p=\sqrt{D_h\tau_h}$，这里D_h是空穴的扩散常数，τ_h是少数载流子的生命周期，或者说是额外载流子的特征衰减周期。

$$J_e(x=-x_p) \propto e^{\frac{qV_D}{kT}}$$
$$J_p(x=x_n) \propto e^{\frac{qV_D}{kT}} \tag{3-25}$$

因此，我们可以理解理想二极管的电压−电流指数关系的推导过程。电子电流J_e、空穴电流J_p以及通过二极管的总体电流如图3-16所示。

3.7 反向偏置二极管

二极管反向偏置时，PN结耗尽区边沿的少数载流子浓度受到抑制，低于平衡时的浓度，如图3-17所示。正如前面所述，存在一个很大的电场壁垒，抑制电流通过PN结。3.8节我们将会看到，二极管反向偏置时的导通电流很小很小，但是又不是无限小。

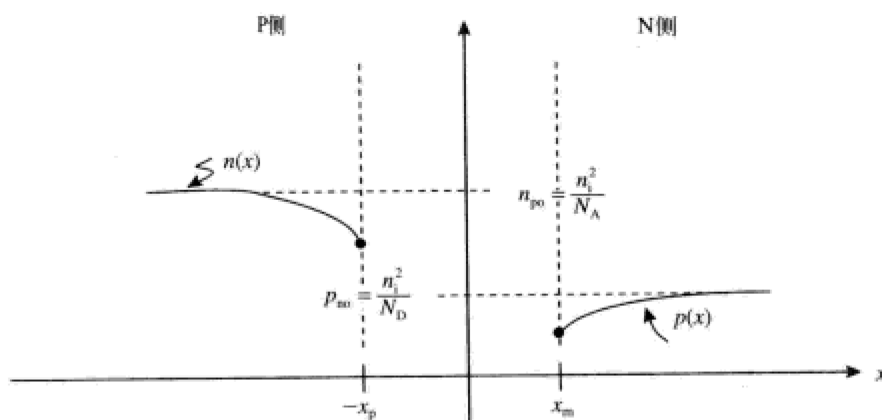


图3-17 反向偏置时的少数载流子浓度

3.8 理想二极管方程

前面我们曾经讲述过，在二极管耗尽区边沿测得的电流密度J_e和J_h的数值都与二极管的电压成指数关系。由于总体电流是这两种电流成分之和，因此二极管的总体电流与其偏置电压也有相同的函数依赖关系。该结论可以总结为熟悉的Shockley方程，即

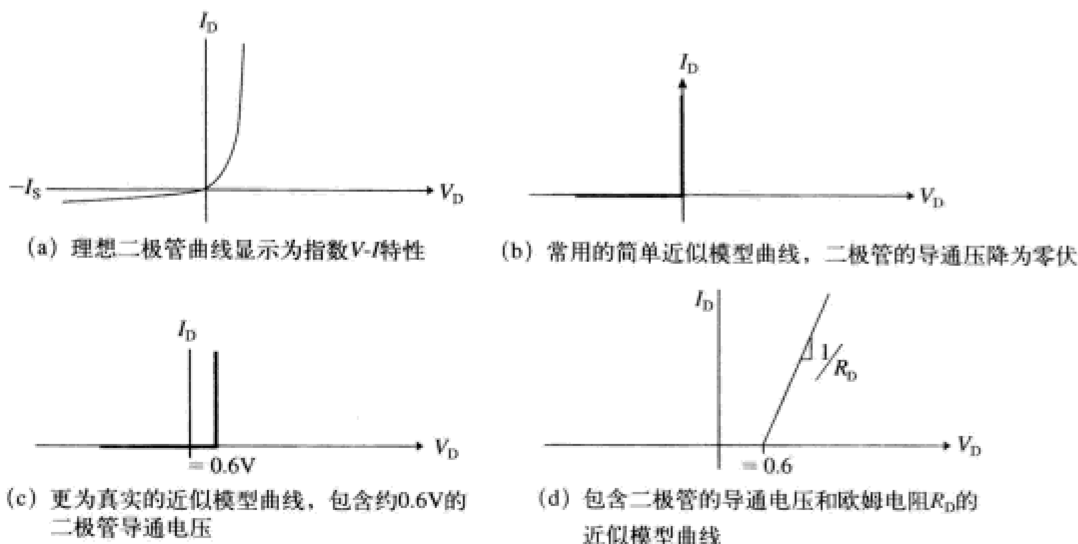
$$I_D = J_{total}A = I_S\left(e^{\frac{qV_D}{kT}} - 1\right) \tag{3-26}$$

这里J_{total}为电流密度（A/m^2），A为PN结的横截面面积，I_S为二极管的饱和电流（saturation current），信号二极管的饱和电流I_S的典型取值为10^{-15}A。二极管正向偏置时，如果$V_D \gg kT/q$，则二极管的电流可以近似为

$$I_D \approx I_S e^{\frac{qV_D}{kT}} \quad (V_D \gg kT/q) \tag{3-27}$$

如果二极管的反向偏置电压$V_D \ll -kT/q$，则二极管反向饱和，其反向饱和电流为$-I_S$。

理想二极管的总体电流为偏置电压的函数，其关系曲线如图3-18a所示。常用近似曲线如图3-18b所示。有时也使用更接近真实情况的理想化曲线，如图3-18c所示，该曲线图使用的是约0.6V的二极管结电压。甚至还可以设置二极管曲线的斜率，将二极管的欧姆电阻特性（理想二极管分析时没有考虑电阻的影响）包含在内，如图3-18d所示。



（a）理想二极管曲线显示为指数V-I特性

（b）常用的简单近似模型曲线，二极管的导通压降为零伏

（c）更为真实的近似模型曲线，包含约0.6V的二极管导通电压

（d）包含二极管的导通电压和欧姆电阻R_D的近似模型曲线

图3-18　二极管的I_D与V_D关系曲线，显示了多种近似情况

详细分析表明理想二极管的电流−电压关系为

$$I_D = qAn_i^2\left(\frac{D_p}{N_D L_p}+\frac{D_n}{N_A L_n}\right)\left(e^{\frac{qV_D}{kT}}-1\right)=I_S\left(e^{\frac{qV_D}{kT}}-1\right) \tag{3-28}$$

这里A为PN结的横截面面积，D_p和D_n分别为空穴和电子的扩散常数，L_p和L_n分别为空穴和电子的扩散路程。I_S项为二极管的反向饱和电流。

3.9　二极管内的电荷存储

二极管内有多种电荷存储机制。首先是耗尽区电荷存储，二极管正向偏置、反向偏置都可以实现耗尽区电荷存储。电荷存储在二极管PN结附近的偶极层（dipole layer）。

二极管正向偏置时，电荷存储在P侧和N侧的中性区域（neutral region）。我们曾经看到，载流子从PN结的一侧注入到另一侧，然后扩散开去，因此存在一个“扩散电容”控制中性区域存储的电荷数量。下面我们将逐一讨论这些电荷存储机制。

耗尽电容

早前，我们曾经看到，施加到二极管的偏置电压变化导致耗尽区宽度的变化，并由此导致耗尽区电荷数量的变化。让我们通过图3-19的示意图重新温习这方面的内容。首先，二极管的反向偏置电压从V_1增大到V_2时，耗尽区宽度增大。我们可以将此想象为PN结耗尽区存储电荷数量的变化。N侧电荷的净变化为$\Delta Q+$，P侧电荷的净变化为$\Delta Q-$。我们知道，电容等于电荷对电压的微分，因此可以求解得到二极管的结电容为

$$C_j=\frac{dQ}{dV} \tag{3-29}$$

详细分析表明结电容的大小可以表述为

$$C_j=\frac{C_{jo}}{\left(1-\frac{V_D}{\phi_{bi}}\right)^m} \tag{3-30}$$

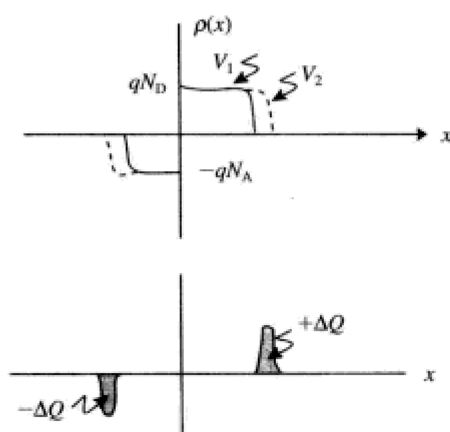


图3-19 二极管结电容成因的示意图

注：随着反向偏置电压从V_1增大到V_2，耗尽区宽度增大导致结两侧的耗尽电荷增大$+\Delta Q$和$-\Delta Q$。

在这里，二极管的PN结为突变结时，$m=1/2$；为线性渐变结时，$m=1/3$。C_{jo}项为零电压时的二极管电容，Φ_{bi}为PN结内建电位差。典型的信号二极管的结电容与电压的关系曲线如图3-20所示。注意，随着反向偏置电压增大，结电容减小[①]。

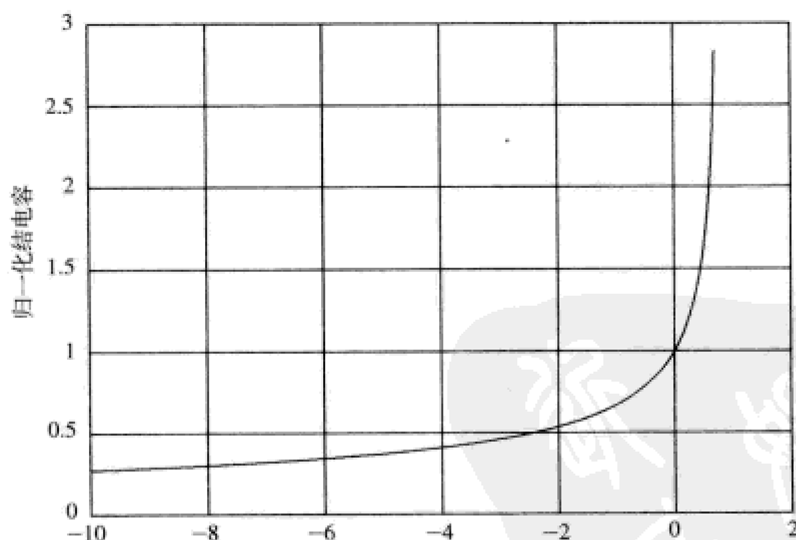


图3-20 突变结二极管的结电容与二极管电压的关系曲线，$\Phi_{bi}=0.8\text{V}$，$C_{jo}=1$

3.10 正向偏置二极管内的电荷存储

二极管正向偏置，传导正向电流时，在中性的P区和N区存储电荷。如果二极管电流增大，存储的电荷也必须随之增加。施加到二极管上的电压升高时，二极管电流增大，存储在扩散电容内的电荷也随之增加。这些作用如图3-21所示。

P区存储的电荷是Δn曲线以下的区域，称为Q_{fn}。相似地，N区存储的电荷是Δp曲线以下的区域，称为Q_{fp}。二极管正向电压从V_{D1}升高到V_{D2}。存储电荷曲线Δn、Δp的高度也随之升高，

① 这个简单的结电容方程在$V_D<\Phi_{bi}$时非常准确。注意，该方程表明，$V_D\to\Phi_{bi}$时，结电容无限制地增大。

这是因为从耗尽区注入了更多电荷。其结果就是，二极管内的总体存储电荷（$Q_{fn}+Q_{fp}$）随着二极管电压从V_{D1}升高到V_{D2}而增加。二极管总体存储电荷的数量随二极管电压的变化关系可以用等效的电容模型来进行建模。该电容有时也称为正向偏置二极管的*扩散电容*（diffusion capacitance）。

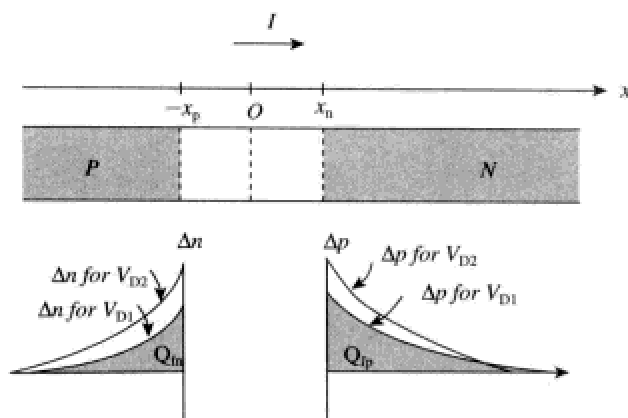


图3-21　短二极管正向偏置时的额外少数载流子浓度

注：随着二极管正向电压从V_{D1}升高到V_{D2}而增加，电子和空穴浓度增大。

这些电荷从PN结向远处扩散，为二极管的总体电流I贡献电流成分。注意，电子自右向左扩散，空穴自左向右扩散，产生的净电流方向从左向右。

二极管的正向电流与扩散电容成正比，即

$$C_d \propto I_D \tag{3-31}$$

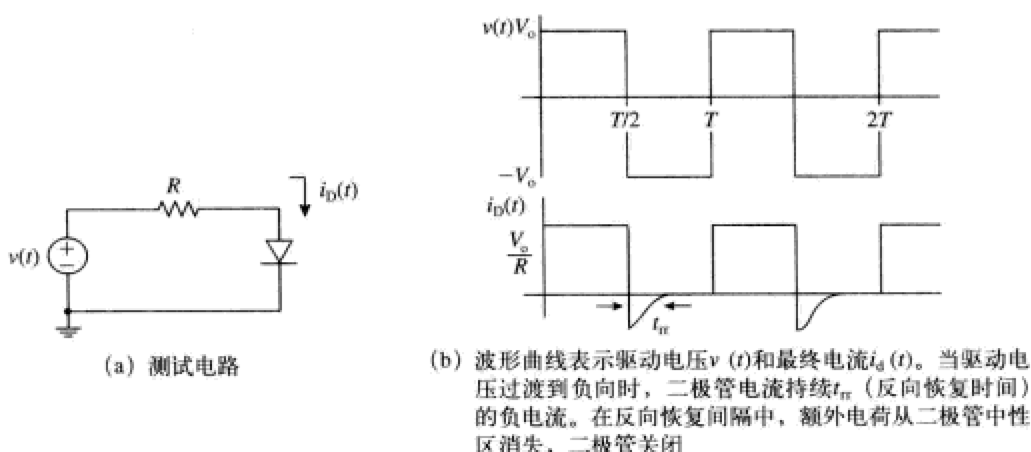
比例常数的细节与二极管的特殊构造有关。

3.11　双极性二极管的反向恢复

二极管正向导通时，如果突然将偏置电压反向，你可能期望二极管电流马上降为零。但是，如果你实地做一下这个实验，对二极管电流进行监视，可能发现二极管电流实际上出现了短暂的负电流脉冲，这个短暂时间称为*反向恢复*（reverse recovery）时间。反向恢复是二极管扩散电容存储电荷的直接结果。在二极管关闭之前，必须释放掉这些电荷。

如图3-22的实验演示了反向恢复过程。电压源$v(t)$通过电阻R对二极管进行重复性脉冲供电。假设脉冲电压的幅度V_o远远大于二极管的导通电压（约为0.7V）。当输入电压过渡到正向时，二极管电流受电阻R限制，达到最大电流，约为V_o/R。

反向恢复发生在输入电压从$+V_o$过渡到$-V_o$的$t=T/2$时刻。观察二极管电流曲线$i_d(t)$，可以看到在时间周期t_{rr}内二极管的电流为负，即为*反向恢复时间*。在反向恢复过程中，存储在扩散电容内的电荷被释放掉，二极管关闭。



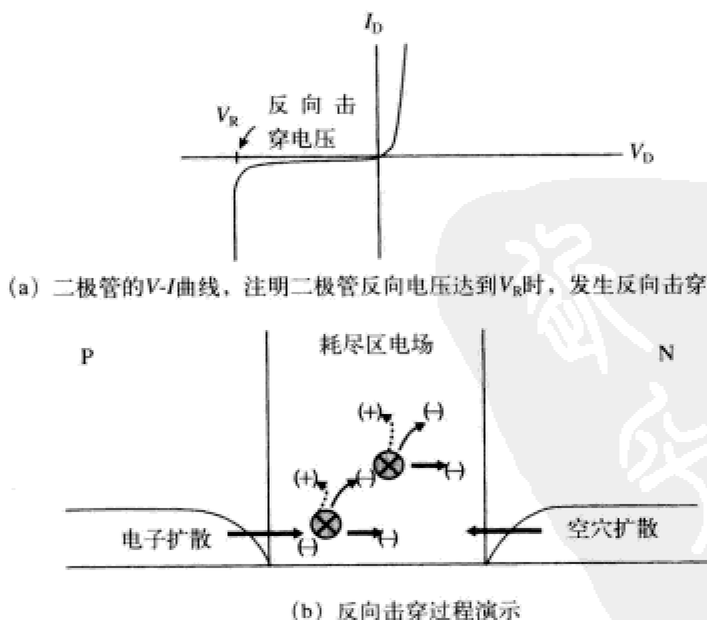
（a）测试电路

（b）波形曲线表示驱动电压v (t)和最终电流i_d (t)。当驱动电压过渡到负向时，二极管电流持续t_{rr}（反向恢复时间）的负电流。在反向恢复间隔中，额外电荷从二极管中性区消失，二极管关闭

图3-22　演示反向恢复过程的测试电路

3.12　反向击穿

反向偏置二极管只能承载非常小的反向电流。在反向电压升高到足够大之前，这是正确的，这个足够大的反向电压被称为反向击穿电压（如图3-23a所示）。二极管的反向偏置电压达到反向击穿电压水平时，PN结承载的反向电流剧烈增加。如果没有限流机制，极大的反向电流将烧坏二极管器件。



（a）二极管的V-I曲线，注明二极管反向电压达到V_R时，发生反向击穿

（b）反向击穿过程演示

图3-23　二极管反向击穿电压

在信号二极管内，反向击穿主要是雪崩击穿（avalanche breakdown）效应。在反向偏置的PN结内部，施加的反向电压直接施加到耗尽区电场。耗尽区电场达到临界电场E_{max}时，耗尽区内的载流子达到充足的速度，以足够大的撞击力去碰撞晶格，导致生成其他电子–空穴对。

这些新生成的电子–空穴对再在电场内加速，再去碰撞晶格，又生成新的电子–空穴对。该过程导致二极管电流随反向电压的升高而急剧增大。

3.13 二极管数据手册

本节，我们将研究廉价的高速开关二极管1N914[①]的数据手册。二极管的最大标称值（如图3-24所示）显示该二极管的最大反向电压为100V，正向电流为200mA。短期最大峰值电流为500mA。这些数字是小信号开关二极管典型的极限工作参数。

最大标称值

额定值	符号	取值	单位
反向电压	V_R	100	Vdc
正向电流	I_F	200	mAdc
正向峰值浪涌电流	I_{FM}(浪涌)	500	mAdc

图3-24 二极管1N914的极限工作参数

下面，我们再来观察一下它的基本电气特性（如图3-25所示）。我们又一次看到它的最大反向电压（反向击穿电压）为100V。在反向电压为75V时，注明反向漏电流为5mA。我们还可以看到二极管的电容信息，稍后将在图表中以更好的形式显示二极管的结电容信息。我们还可以看到该二极管的反向恢复时间非常快，t_{rr}<4ns，该数值是使用如图3-26所示的测试电路进行测试得到的。

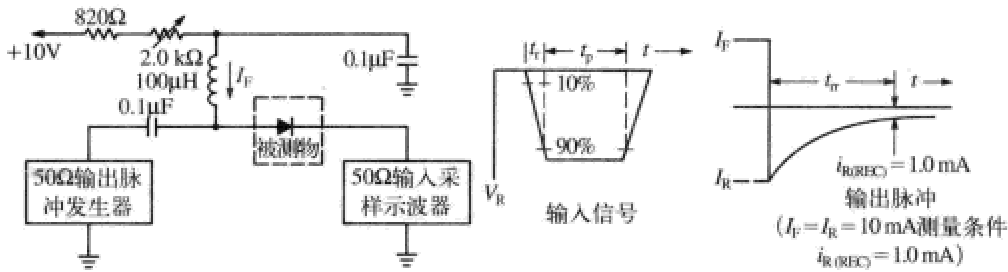
电气特性（除非有其他明确说明，测量环境温度为$T_A=25^\circ C$）

特性	符号	最小值	最大值	单位
关闭特性				
反向击穿电压 ($I_R=100\ \mu$Adc)	$V_{(BR)}$	100	–	Vdc
反向电压漏电流 ($V_R=20$ Vdc) ($V_R=75$ Vdc)	I_R	 – –	 25 5.0	 nAdc μAdc
二极管电容 ($V_R=0$ V, $f=1.0$ MHz)	C_T	–	4.0	pF
正向电压 ($I_F=10$ mAdc)	V_F	–	1.0	Vdc
反向恢复时间 ($I_F=I_R=10$ mAdc)	t_{rr}	–	4.0	ns

图3-25 二极管1N914的电气特性

二极管1N914在多种工作温度下的正向特性曲线和反向特性曲线如图3-27所示。正向电压特性曲线表明二极管电压的负温度系数大致为–2mV/°C。固定集电极电流不变，温度升高时，二极管电压大致按照该数值减小。正向电压特性曲线图还表明，由于二极管内欧姆电阻的降压作用，理想二极管模型无法解释大电流处的附加曲率。

① 详细的数据手册节选来自On Semiconductor（安森美半导体）公司的二极管MMDL914，是通孔型二极管1N914的表贴版本。On Semiconductor公司授权使用。



注：1. 2.0kΩ电位器用来将二极管的正向电流调节到10mA。
2. 输入脉冲可以调节以使$I_{R(peak)}$等于10mA。
3. $t_p \gg t_{rr}$。

图3-26 二极管1N914的反向恢复时间测试电路

反向漏电流曲线说明了一个事实，即二极管的反向漏电流随着温度的升高而急剧增大。

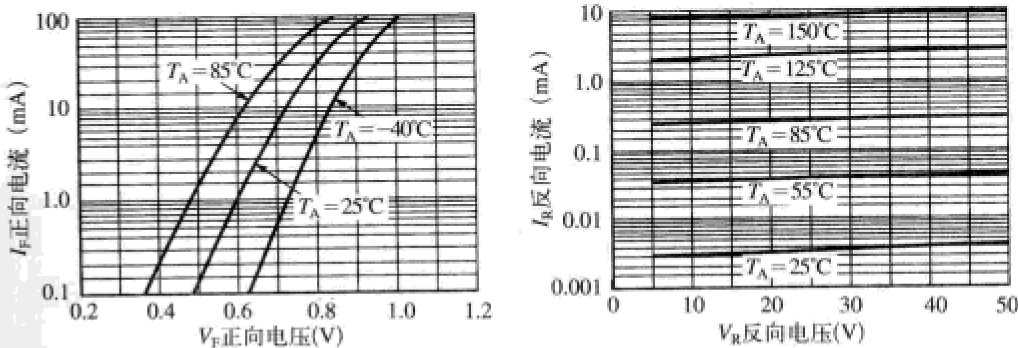


图3-27 二极管1N914的正向特性曲线和反向特性曲线

如图3-28所示，二极管在反向区域内的电容曲线表明，随着反向偏置电压升高，二极管的结电容非线性地减小。

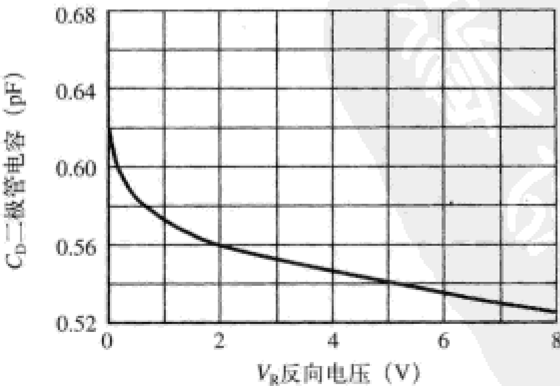


图3-28 二极管1N914的反向区域电容曲线

二极管的热功率特性（如图3-29所示）表明，环境温度为25°C时，器件的最大耗散功率为200mW。如果环境温度高于25°C，则需要降额使用这个最大耗散功率指标。

二极管的热功率特性

特　性	符　号	最 大 值	单　位
T_A＝25°C时在FR-5电路板上的总体器件耗散功率。高于25°C时降额使用	P_D	200 1.57	mW mW/°C
PN结相对周围环境的热电阻	$R_{\theta JA}$	635	°C/W
PN结的温度和存储温度	T_J, T_{stg}	−55到150	°C

图3-29 二极管1N914的热功率特性

3.14 肖特基二极管

我们在本章所做的分析完全集中在由PN结构成的双极性二极管上。还有另外一类二极管，称为肖特基二极管，由金属半导体结构成。我们不再深入研究其细节，而是留给读者自己进行讨论。双极性二极管与肖特基二极管的比较如表3-1所示。

双极性二极管在工作电流下的典型正向电压约为0.6V左右，肖特基二极管的正向电压相对较低，通常为0.4V。

前面曾经说明，双极性二极管存在反向恢复问题。肖特基二极管则没有该问题。

表3-1 双极性二极管和肖特基二极管比较

比较项目	双极性二极管	肖特基二极管
典型正向电压	＞0.6V	约0.4V
是否存在反向恢复？	是	否
典型额定电压	＜几kV	＜100V

3.15 本章习题

习题3.1

在室温环境中，理想的二极管正向偏置，如果想使它的正向电流增大10倍，那么求解它的正向电压应该增大的倍数。

习题3.2

某突变PN＋结二极管内的少数载流子的电子浓度$N_D = 10^{16}\text{cm}^{-3}$，本征空穴浓度$N_A = 10^{15}\text{cm}^{-3}$。如果击穿电场$E_{max} = 3\times10^5\text{V/cm}$，求解其击穿电压。假设近似为突变结，硅的本征载流子浓度为$n_i = 1.5\times10^{10}\text{cm}^{-3}$，二极管工作在室温环境，注意施加偏置电压$V_D$时，耗尽区的总体宽度为

$$x_n + x_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{Si}(\Phi_{bi} - V_D)}{q}\left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D}\right)} \tag{3-32}$$

习题3.3

突变PN结的参数为$N_A = 10^{17}\text{cm}^{-3}$，$N_D = 10^{16}\text{cm}^{-3}$，$A = 10^{-3}\text{cm}^2$。求解正向电流$I_D = 10\text{mA}$时的正向电压。该二极管工作温度为300K，假设其迁移率为$\mu_n = 1400\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$，$\mu_p = 400\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$，少数载流子的生命周期为$\tau_n = \tau_p = 10^{-6}\text{s}$，本征载流子浓度为$n_i = 1.4\times10^{10}\text{cm}^{-3}$。

习题3.4

室温时（298K），二极管的反向饱和电流为$I_S = 15\text{nA}$。假设温度每升高10°C，二极管反

向电流增大1倍。分为绘出在室温（27°C左右，300K）和升高到150°C（423K）的两种情况下，偏置电压在$-10V < V_D < +0.5V$范围内变化时的I_D/V_D曲线。

习题3.5

本题学习使用负载线[①]。将上面习题3.3的理想二极管应用于某个简单电路，+12V电压源经1kΩ电阻对二极管进行正向偏置。假设二极管工作在室温环境（300K），因此$kT/q = 26mV$。使用下述方法求解二极管的电流和电压。

（a）首先，假设二极管的导通常数电压为0.6V，不考虑二极管电流。求解给定假设下的二极管电流I_D。

（b）进行更为细致的分析，假设二极管的反向饱和电流$I_S = 10^{-10}A$，用迭代法解二极管方程和电阻负载线方程以求出二极管电流和二极管电压。

（c）绘制二极管电流/电压负载线，在曲线图中标注工作点的位置。

习题3.6

考虑图3-30的二极管电路。偏置电流源I_D用来设置二极管的偏置电压，小信号交流电流源i_d也连接到二极管。二极管电压既包含直流成分V_D，也包含小信号变化成分v_d，二极管的总体电流为

$$i_D = I_S\left(e^{\frac{qv_D}{kT}} - 1\right) \tag{3-33}$$

二极管电流和二极管电压可以表述为直流成分与变化成分的叠加。

$$\begin{aligned} i_D &= I_D + i_D \\ v_D &= V_D + v_d \end{aligned} \tag{3-34}$$

假设二极管偏置在线性放大区域，小信号交流电流源i_d值非常小。

（a）求解小信号电压与小信号电流之比v_d/i_d。

（b）绘制v_d相对i_d的低频小信号模型。

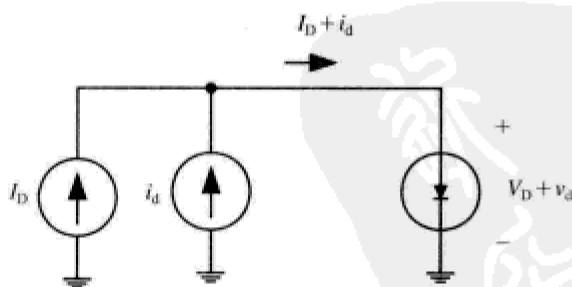


图3-30 习题3.6的二极管电路

习题3.7

如图3-31所示电路包含二极管1N4001。绘出负载线，求解二极管电流以及二极管耗散功率。

习题3.8

如图3-32电路所示，使用120VAC电压源驱动二极管1N4004。（120VAC电压源为正弦信号，频率60Hz，正向峰值电压+170V，负向峰值电压−170V）。注意，该电路使用的是

① 负载线方法是求解非线性问题的常用的曲线图方法。通过绘制二极管特性曲线与叠加外部电阻的负载曲线，标注两条曲线的交点，就可以确定电路的工作点。该方法在分析晶体管电路时也非常有用。

1N4004，因为它有足够大的最大额定电压。

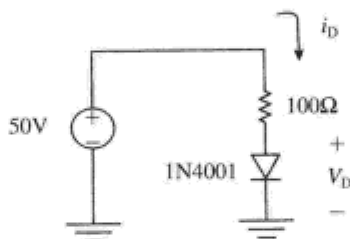


图3-31 习题3.7的二极管1N4001电路

（a）绘制输入电压$v_{in}(t)$、二极管电流$i_D(t)$、二极管电压$v_D(t)$随时间的变化曲线。可以忽略反向恢复过程。

（b）分别计算二极管和电阻的平均耗散功率。为了求解二极管的耗散功率，要计算二极管平均电流$\langle i_D \rangle$。二极管的耗散功率①为

$$P_{DIODE} \approx \langle V_D \rangle \langle i_D \rangle$$

这里V_D为二极管的导通电压。不要进行艰难的积分，只需选择合理的二极管导通电压值$\langle V_D \rangle$。

为了求解电阻的耗散功率，我们使用：

$$P_{RESISTOR} = I_{D,RMS}^2 R$$

$$I_{D,RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (i_D(t))^2 \, dt}$$

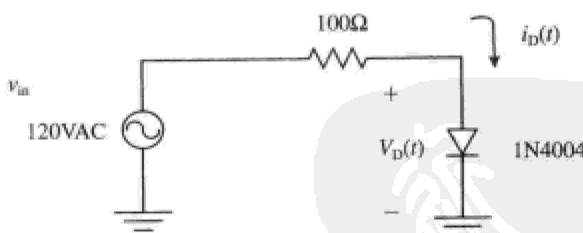


图3-32 习题3.8的交流二极管1N4004电路

3.16 参考文献

Adler, R. B., Smith, A. C., and Longini, R. L., *Introduction to Semiconductor Physics*, Semiconductor Electronics Education Committee, volume 1, John Wiley, 1964.

Bardeen, John, "Semiconductor Research Leading to the Point Contact Transistor," December 11, 1956, from *Nobel Lectures Physics*, 1942-1962, Elsevier Publishing, available from the Nobel e-museum at Web: *http://www.nobel.se/physics/laureates/1956/*

Brattain, Walter H., "Surface Properties of Semiconductors," December 11, 1956, from *Nobel Lectures Physics*, 1942-1962, Elsevier Publishing, available from the Nobel e-museum at Web: *http://www.nobel.se/physics/laureates/1956/*

① 这是个非常粗略的近似。为了得到更为精确的答案，我们可以做积分 $P_{DIODE} = \frac{1}{T}\int_0^T v_d(t) i_d(t) dt$。

Feynman, Richard, Leighton, Ralph, and Sands, Matthew, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, 1963.

Gray, P. E., DeWitt, D., Boothroyd, A. R., and Gibbons, J. F, *Physical Electronics and Circuit Models for Transistors, (SEEC volume 2)*, John Wiley, 1964.

______, *Physical Electronics and Circuit Models of Transistors*, Semiconductor Electronics Education Committee, volume 2, John Wiley, 1964. Hannay, N. B., editor. *Semiconductors*, American Chemical Society Nomograph Series, Reinhold Publishing Corp., 1959.

Gray, Paul, and Searle, Campbell, *Electronic Principles Physics, Models and Circuits*, John Wiley, 1967.

Haynes, J. R. and Shockley, W, "The Mobility and Life of Injected Holes and Electrons in Germanium," *Physical Review*, vol. 81, p. 835, 1951.

______, *Physical Review*, vol. 75, p. 691, 1949.

Pierret, Robert F., *Modular Series on Solid State Devices, Volume 1: Semiconductor Fundamentals*, Addison-Wesley, 1983.

Shockley, William, "Transistor Electronics: Imperfections, Unipolar and Analog Transistors," *Proceedings of the IRE*, vol. 40, no. 11, November, 1952, pp. 1289-1313, reprinted in *Proceedings of the IEEE*, vol. 85, no. 12, December 1997, pp. 2055-2080.

______, "Circuit Element Utilizing Semiconductive Materials," U.S. Patent # 2,569,347, issued September 25, 1951 and "Semiconductor Amplifier," U.S. patent 2,502,488, issued April 5, 1950, found in "Semiconductor Amplifier Patent," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. l,p.36.

______, "Transistor Technology Evokes New Physics," December 11, 1956, from *Nobel Lectures Physics, 1942-1962*, Elsevier Publishing, available from the Nobel e-museum at Web: http:*//www.nobel.se/physics/laureates/1956/*



第4章　双极性晶体管模型

本章概要

- ❑ 本章以前面一章建立的二极管器件模型为基础，推导了理想的双极性晶体管模型。这里，我们并没有推导完整的晶体管方程，而是从理想二极管的推导结论出发，直观地论述了双极性晶体管的工作过程。本章虽然只讨论了NPN型晶体管，但是得出的结论与PNP型晶体管的分析结果是密切相关的。本章主要讨论了双极性晶体管在“线性放大”区（forward active region）的工作特性，这是因为晶体管工作在该区域时可用作放大器。在后面的章节中，我们还会扩展讨论晶体管在饱和区（saturation region）和截止区（cutoff region）的工作特性。

4.1　历史点滴

20世纪40年代后期，贝尔实验室①在双极性晶体管方面做出了开创性工作，这主要归功于实验室的William Shockley、William Brattain、James Bardeen以及其他成员。这个研究小组（由Shockley领导）接受了贝尔实验室领导部门规划的挑战性任务，要发明固态开关以取代机械继电器（relay）。起初，研究小组将他们的精力主要集中在锗材料制造的器件上。第一片能够演示晶体管效应和电流放大作用的器件是1948年展示的“点接触（point contact）”晶体管②（如图4-1所示），该器件有一个锗晶体基，晶体基上表面有相距很近的黄金接触点。Bardeen和Brattain使用该器件演示了电流放大作用。

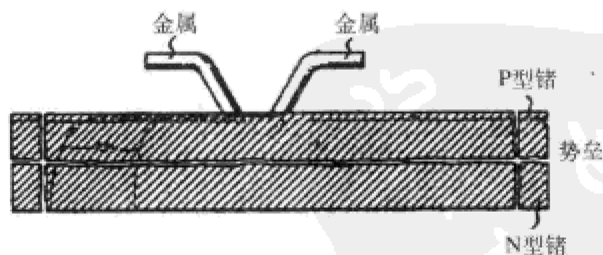


图4-1　点接触晶体管示意图，来自美国专利第2524035号（1948年6月17日）

稍后不久，Shockley意识到两个半导体PN结组成的器件也能演示电流放大作用。这一想法引导着他在晶体管研究方面的进展，如图4-2所示，这是第一片双极性结型晶体管（bipolar junction transistor，BJT），并且也争议性地认为这是第一片实用的晶体管设计。Shockley把他

---

① 也就是Bell Telephone Labs（贝尔电话实验研究所），其位于新泽西州的Murray Hill。点接触晶体管的物理结构、性能和物理学原理在W.D.Bevitt的著作“Transistors Handbook”第3章以及Lo等人的著作“Transistor Electronics”第1.14节中有描述。

② 是John Bardeen最先使用了专业术语emitter、base和collector。比如，在NPN型晶体管中，发射极发射电子，集电极收集电子。基极则是锗晶体基。参见W.F.Brinkman等人的著作“A History of the Invention of the Transistor and Where It Will Lead Us”。John Bardeen在1956年的诺贝尔颁奖大会上的演讲中给出了描述点接触晶体管发明和实现的极好参考文献。

设计的器件以及许多实用的放大电路都申请了专利保护。他在简化和描述二极管与晶体管内载流子运动的基本物理学原理方面具有杰出的能力。他的原创性工作以及小组内其他同事的研究工作共同推动了20世纪下半叶的半导体发明。

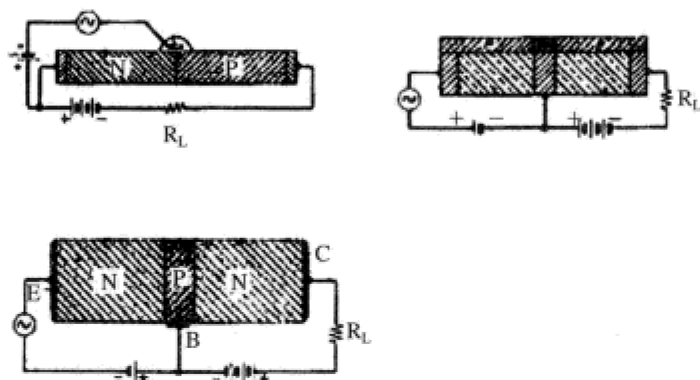


图4-2 Shockley的晶体管，来自美国专利第2569346号（1951年9月25日）

4.2 基本NPN型晶体管

我们通过仔细思考双极性晶体管的一维基本结构，来讨论它的某些物理学原理。基本NPN型晶体管的结构（各部分不成比例）如图4-3所示，由N型发射极（emitter）区、P型基极（base）区和N型集电极（collector）区组成，通过良导电性的金属触点与外部电路连接在一起。该图形属于漫画性质的示意图，不能说明晶体管是如何制造的。不过，它提供了一个有用的晶体管接口框架，便于我们分析它的工作特性。在本章中，我们假设晶体管的一维几何结构（x方向）就是如此。

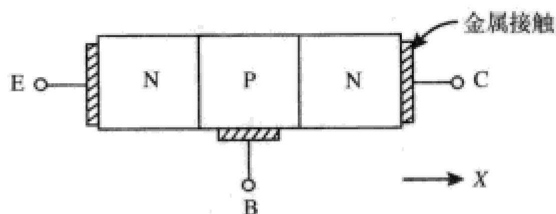


图4-3 基本NPN晶体管结构，标出了发射极（E）、基极（B）和集电极（C）

现在，我们来说明BJT器件在热平衡（thermal equilibrium）状态下的工作特性。热平衡状态就是说晶体管没有外部连接，因此没有净电流通过。回忆前面一章的学习，我们知道在半导体材料内存在漂移电流和扩散电流成分。如果没有任何净电流从任何一个端点通过，那么就是漂移电流和扩散电流达到了精确的微妙平衡，在任何端点都看不到电流。因此，空穴漂移电流和空穴扩散电流相互平衡抵消，电子漂移电流和电子扩散电流相互平衡抵消。

我们首先将注意力集中在基极-射极结上（base-emitter junction，基极和发射极之间的PN结）。我们知道该PN结存在阻碍电流流动的电场势垒。现在，如果我们按照图4-4所示的方式连接NPN型晶体管，也就是在基极－射极结上增加一个正电压偏置。这个正向偏置电压的作用就是减小基极－射极结的电场势垒。

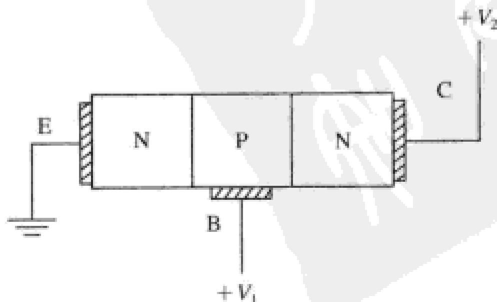


图4-4 基极-射极结正偏的基本NPN型晶体管

既然我们已将基极-射极结正偏，减小了

电场势垒，那么电子从发射极区注入到集电极区时受到的阻力也就减小了。如图4-5所示，现在，电子从发射极注入，穿越基极区，被集电极收集。因为每个电子携带单位负电荷，NPN型晶体管内的电流方向习惯标注为从集电极到发射极，如图中所示。

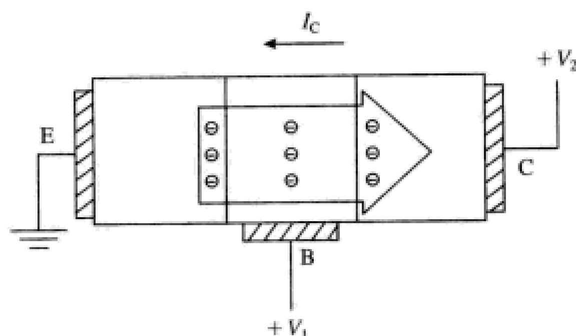


图4-5　基极–射极结正偏、集电极–基极结反偏的基本NPN型晶体管

我们再来分析基极电流的成因。我们知道正向偏置晶体管的要求是，必须存在小而有限的基极电流I_B以支持集电极电流I_C的存在。晶体管的电流增益β_F定义为

$$\beta_F = \frac{I_C}{I} \tag{4-1}$$

存在基极电流的原因到底是什么呢？基极电流的每项组成成分如图4-6所示[①]，总体基极电流由三种成分构成，分别标注为I_{B1}、I_{B2}、I_{B3}。

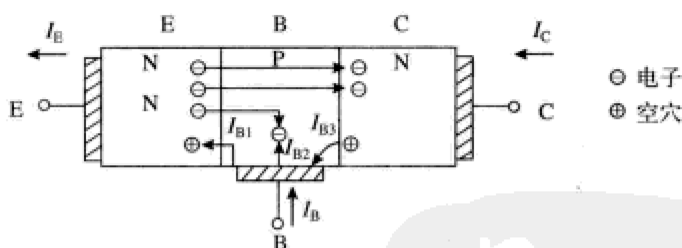


图4-6　NPN型晶体管，工作在正向放大区，标明基极电流成分I_{B1}、I_{B2}、I_{B3}

发射极将大量电子注入到基极区。这其中的大部分电子成功地扩散过基极区（因为基极区非常薄[②]），到达集电极区。不过，也有一小部分注入的电子与基区内的空穴复合。因此，需要基极电流成分I_{B2}以补充基极的空穴的浓度。

另一项基极电流成分I_{B1}是由从基极注入到发射极的空穴构成的。

集电极N区的热骚动也产生了空穴。部分空穴跨越反向偏置的集电极－基极结进入基极区。第三项基极电流成分I_{B3}就是由这些跨过反向偏置集电极－基极结注入到基极的空穴构成的。该项基极电流成分属于反向偏置集电极－基极结的反向漏电流（reverse leakage current）。

净的总体基极电流I_B是这三项电流成分之和，在设计良好的晶体管内，基极电流I_B通常

① Gerold Neudeck在著作“The Bipolar Junction Transistor, Modular Series on Solid State Devices”, Volume 3, pp.8-10中给出了对相似构造的PNP型晶体管的极好描述。

② 事实上，晶体管的工作模式与基极非常薄密切相关，如此才能使大部分注入电子跨越基极区。如果基极区非常宽，晶体管的行为特性就像两个背靠背的二极管，所有注入电子将在基极复合。

只占整体集电极电流的很小一部分。信号晶体管的直流电流增益通常为100以上[①]。

工作在正向放大区的PNP型晶体管如图4-7所示，图中标注了基极电流成分。交换NPN型晶体管内的电子和空穴的作用，就是PNP型晶体管内的电子和空穴的作用。

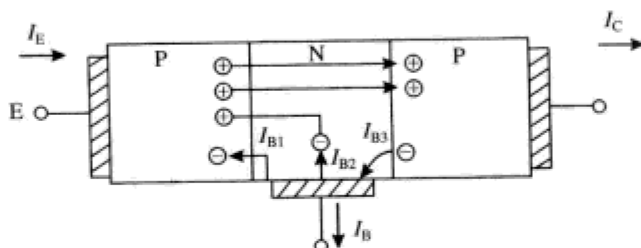


图4-7 基本PNP型晶体管，工作在正向放大区，标明整体基极电流I_B的所有成分

PNP型晶体管的集电极电流是由发射极注入到基极并且扩散跨过基极的空穴构成的。基极电流成分I_{B2}是由流进基极的、与发射极扩散到基极的空穴进行复合的电子构成的。基极电流成分I_{B1}是由从基极注入到发射极的电子构成。基极电流成分I_{B3}则是由集电极产生的跨过集电极–基极结到达基极的电子构成的。

图4-8中标注了NPN型晶体管各个端点的常用变量。工作在线性放大区的NPN型晶体管的端点电流都是正向的（正如该图中定义的电流方向）。基极–射极结正向偏置，V_{BE}约为0.7V，集电极–基极结反向偏置，$V_{BC} \leqslant 0\text{V}$。

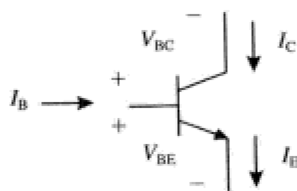


图4-8 标注了端点变量的NPN型晶体管模型[②]

4.3 处于不同工作区的晶体管模型

我们将一个NPN形晶体管安置在波形记录器（curve tracer）上（如图4-9所示），就可以测量到晶体管存在四个工作区域。

- 截止区（cutoff region），$I_B = I_C = 0$，$V_{BE} \ll 0.7\text{V}$。晶体管实质上处于关闭状态。
- 正向放大区（forward active region），或者叫线性工作区，$I_C = \beta_F I_B$，$V_{BE} = 0.7\text{V}$左右。
- 饱和区（saturation region），V_{CE}非常小，基极–射极结和集电极–基极结均正向偏置。
- 反向放大区（reverse active region）（图表中未标出），集电极和发射极的作用相互交换，实质上，晶体管被用于"反向"工作状态[③]。

晶体管工作在正向放大区时[④]，用来描述集电极电流和基极电流的方程为

$$I_C = I_S\left(e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - 1\right)$$
$$I_B = \frac{I_C}{\beta_F} \tag{4-2}$$

① 典型信号晶体管才是如此。比如晶体管2N3904在$V_{CE} = 1\text{V}$、$I_C = 10\text{mA}$时，直流电流增益β_F（数据手册中标注为h_{FE}）为100~300。此外，出于功率晶体管其他方面的设计考虑，其直流电流增益β_F通常在10以下。直流电流增益β_F也经常随集电极的电流与偏置水平变化。集电极电流非常大或者非常小时，β_F都将减小。

② 也有书本中标注I_E反方向穿进。

③ 注意，如果在常规晶体管电路中，交换集电极和发射极的管脚，器件依然是晶体管。但是，电流增益β_F将变得非常小，速度也同时大为降低。晶体管通常优化为工作在正向放大区。

④ 记住，反向饱和电流I_S是理想PN结反偏引起的漏电流。

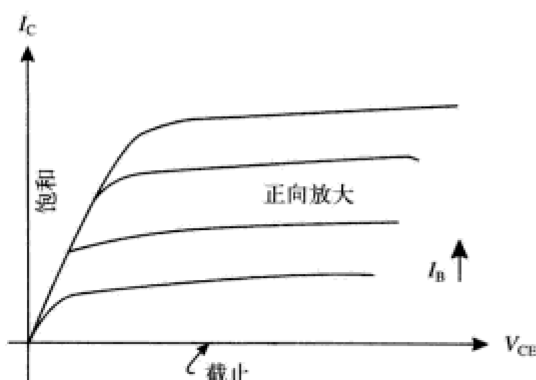


图4-9 波形记录器测量的NPN型晶体管曲线。它有三个工作区：正向放大区、截止区和饱和区。没有标注反向放大区

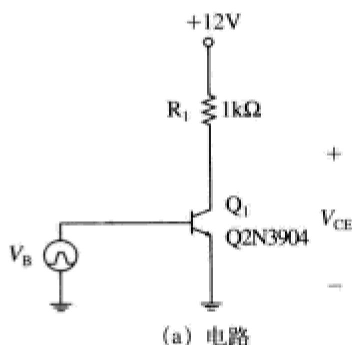
在晶体管放大器的常见工作模式中，晶体管常工作在正向放大区，即

$$I_C \approx I_S e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} \tag{4-3}$$

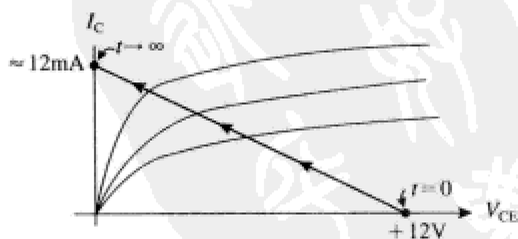
为了方便理解晶体管在多个工作区的工作模式，我们使用一个简单的电阻负载的NPN型晶体管电路来做个思想实验（如图4-10a所示）。刚开始时，假设晶体管的基极电压$V_B=0V$。在$t=0$时刻，基极电压缓慢上升，如图所示。在该思想实验中，我们将假设斜坡信号（ramp）的上升速度足够慢，以保证晶体管的带宽限制不会对实验结果产生影响①。

如图4-10b所示是晶体管的特性曲线（characteristic curve），以及叠加在一起的1kΩ电阻负载线。在$t=0$时刻之前，晶体管的直流工作点位于图中的位置A处。此时，晶体管处于截止状态，不存在集电极电流，$V_{CE}=12V$，如图中所示。

$t=0$之后的某一时刻，基极电压V_B上升到0.4V左右②，晶体管导通，开始传导集电极电流。晶体管处于该工作区期间，也就是晶体管工作在正向放大区，即图中标注为B区。集电极继续电流增大时，受1kΩ电阻压降的影响，晶体管的集电极和发射极之间的电压下降。



（a）电路

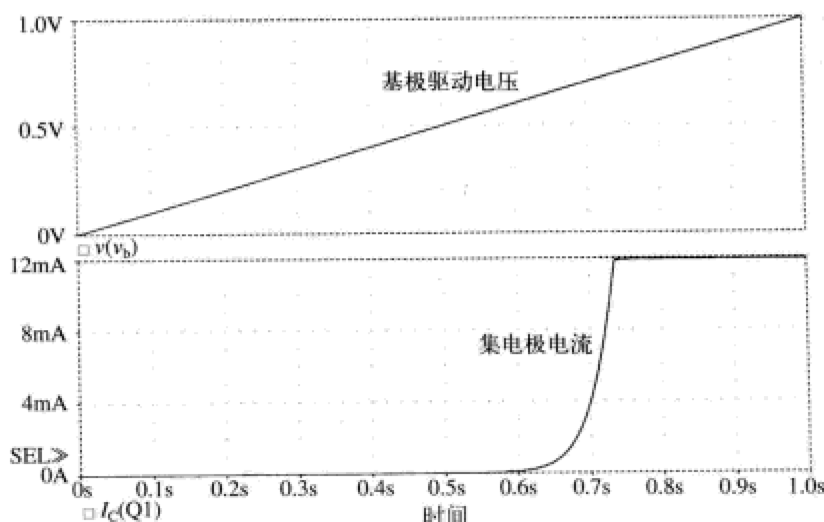


（b）在晶体管伏安特性曲线上的开关轨迹

图4-10 电阻负载的NPN型晶体管电路

① 在该实验中，我们使用的斜坡信号在1s内从0V变化到1V。

② 作为经验方法，我们通常假设二极管的正向导通电压约为0.7V，晶体管偏置在正向放大区的基极−发射极压降约为0.7V。这是正向偏置PN结的特征。不过，晶体管确实在更低的某个电压点开始导通。我们估计晶体管的导通起点电压$V_{BE}\approx 0.4V$。



(c) PSPICE仿真曲线图

图4-10 (续)

随着基极电压继续升高，集电极电压继续下降，直至到达曲线图中的C区。此时晶体管饱和。当晶体管饱和时，集电极和发射极之间存在一个相对较低的电压降（低于0.25V左右）。随着基极电压进一步升高，晶体管的直流工作点在饱和区越陷越深，直至到达最大的集电极电流，约12mA左右。

如图4-10c所示是该实验仿真得到的晶体管开关曲线图，我们绘制了基极电压和集电极电流随时间变化的关系曲线。注意，集电极电流的变化曲线与预计相同，基极电压V_B上升到0.4V左右时，晶体管开始导通，最终达到最大的集电极电流，约为12mA左右。

4.4 双极性晶体管的低频增长模型

双极性晶体管的低频增长模型是从大信号模型（large signal model）直接得出的。我们将对晶体管伏安特性曲线的直流工作点附近区域进行线性化处理，以得到适应端点电压和端点电流微小变化的近似直线模型。

假设我们有一个适当直流偏置的电阻负载的NPN型晶体管电路，工作在正向放大区的中间[①]。我们首先假设晶体管的所有端点变量都包括一个直流分量和一个小信号变化分量，即

$$
\begin{aligned}
i_C &= I_C + i_c \\
i_B &= I_B + i_b \\
v_{BE} &= V_{BE} + v_{be} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{4-4}
$$

这里，等式左边的项表示整体变量，右边的两项分别表示直流（或者偏置点）分量和小信号分量。在图4-11中我们使用集电极电流演示了这种假设。

在图4-12a中，我们演示的晶体管电路采用基极电池电压源V_{BIAS}进行直流偏置，输入交流电压信号v_{sig}的频率为1kHz，峰峰值幅度为1mV。偏置电压V_{BIAS}约为0.7V[②]，不过，为了方便

① 至少在最开始的时候，我们要忽略如何将晶体管偏置设置到该工作点，并使该偏置点在温度和元件变化时保持稳定的实践问题。

② SPICE仿真时使用的V_{BIAS}实际值为706.5mV，该偏置电压值能够形成约5mA的偏置电流。

演示，我们假设该偏置电压是可以调节的，以使晶体管的集电极电流为5mA。这需要将晶体管的直流工作点偏置设置到正向放大区的中间，如图4-12b所示。之后，我们使输入信号v_{sig}进行摆动，作正弦变化，如图4-12c所示。

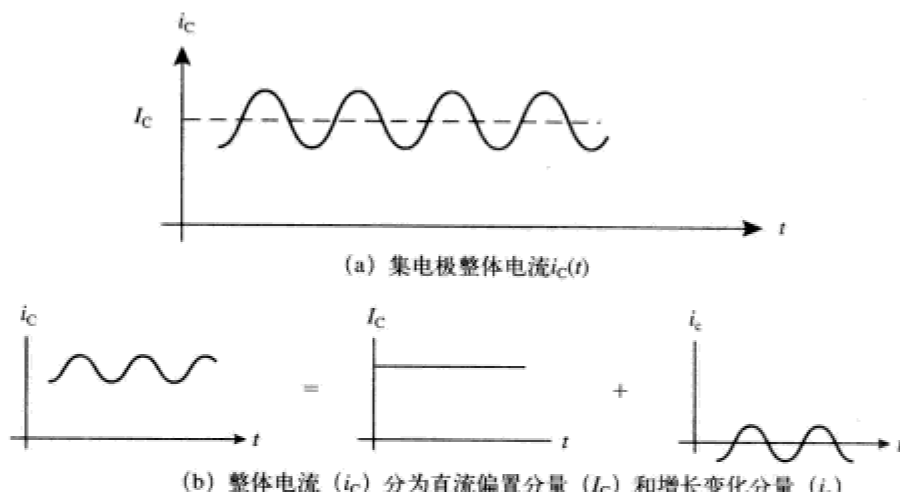


图4-11　演示集电极整体电流（i_C）、直流偏置电流（I_C）和增长分量电流（i_c）的曲线图

从偏置设置在正向工作区的晶体管的集电极输出电流，我们又一次发现基极-发射极电压与集电极电流之间的函数关系，即

$$I_C + i_c \approx I_S e^{\frac{q(V_{BE}+v_{be})}{kT}} = I_C e^{\frac{qv_{be}}{kT}} \tag{4-5}$$

如果我们假设直流工作点电压V_{BE}远远大于kT/q，就可以粗略地忽略晶体管指数电压-电流方程中的“–1”项。如果我们限制小信号v_{be}的变化（small signal variation），要求其比kT/q（室温时为26mV）小，就可以使用近似关系式$e^x \approx 1+x$，进而得到

$$I_C + i_c \approx I_S e^{\frac{q(V_{BE}+v_{be})}{kT}} = I_C\left(1+\frac{qv_{be}}{kT}\right) \tag{4-6}$$

继续求解集电极电流的小信号分量i_c，得到

$$i_c = I_C\left(\frac{qv_{be}}{kT}\right) = g_m v_{be} \tag{4-7}$$

这里，我们定义了一个比例常数g_m，它使集电极电流的小信号变化i_c与偏置电压的小信号变化v_{be}相关。这个专业术语g_m常称为晶体管的跨导（transconductance），其单位为A/V（即1/Ω）。

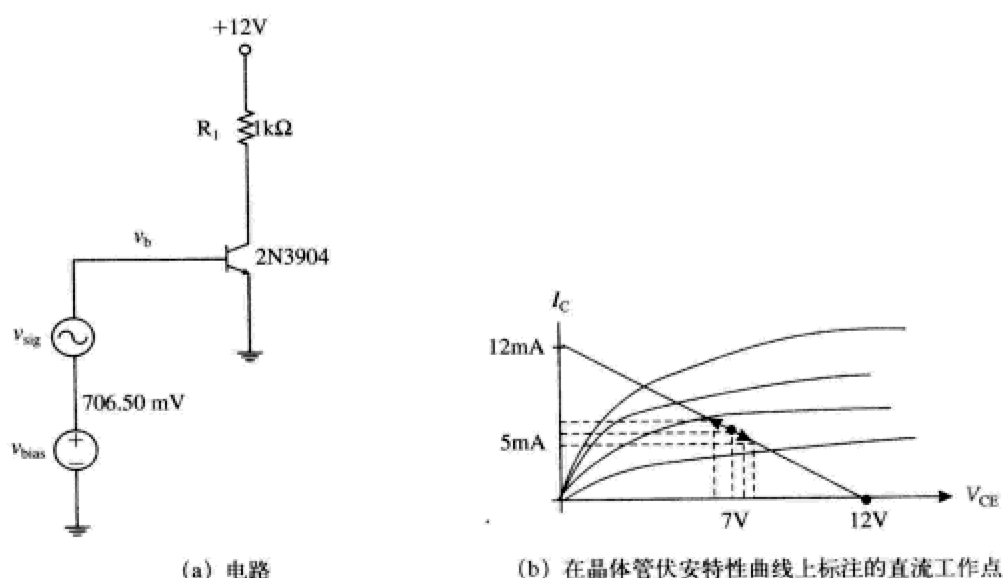
现在，我们将注意力集中到晶体管基极电流的小信号变化上。我们知道，如果集电极电流发生了小信号变化，同时意味着基极电流也发生了相应比例的小信号变化。基于该推理，可以将基极电流的小信号变化描述为

$$i_b \approx \frac{i_c}{h_{fe}} = \frac{g_m}{h_{fe}} v_{be} = \frac{v_{be}}{r_\pi} \tag{4-8}$$

这里，h_{fe}为晶体管的小信号电流增益[①]（晶体管数据手册中常用h_{fe}表示，教科书中则常用β_0表示）。图4-13所示的信号模型紧紧抓住了集电极电流和基极电流方程的函数依赖关系。

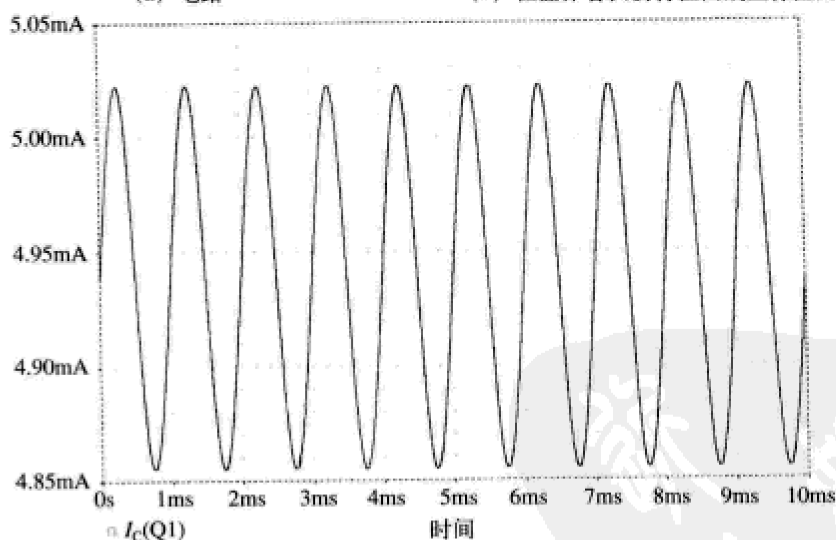
① 不要把小信号增益（β_0或h_{fe}）与直流增益（β_F或h_{FE}，也叫工作点增益）混淆在一起。

这个所谓的“混合π”模型（hybrid-pi model）在求解晶体管放大器的中间带增益时非常有用，在后续章节中我们将经常使用它。



（a）电路

（b）在晶体管伏安特性曲线上标注的直流工作点



（c）上述电路的PSPICE仿真曲线图，显示的是骑在4.95mA左右的直流偏置电流上的集电极交流输出电流

图4-12 偏置在正向放大区的电阻负载NPN型晶体管电路

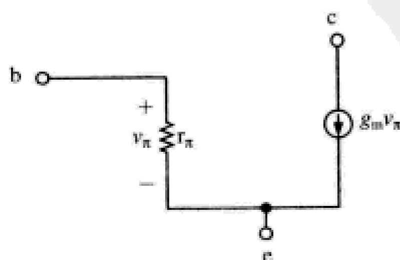


图4-13 双极性晶体管的低频增长模型，标注了基极（b）、集电极（c）和发射极（e）三个端点

综上所述，可以得到双极性晶体管的低频增长模型的参数计算方法如下

$$g_m = \frac{|I_C|}{kT/q} = \frac{|I_C|}{V_{TH}}$$
$$r_\pi = \frac{h_{fe}}{g_m} \tag{4-9}$$

4.5 双极性晶体管的高频增长模型

我们知道前面推导的双极性晶体管的低频增长模型是不完整的，因为它没有带宽约束机制。现在，我们再来考虑双极性晶体管的某些带宽限制因素。

首先，我们知道PN结本身存在一个与其特性相关的电容，正如我们在第3章讨论的那样。因此，我们料想，在双极性晶体管内也存在与基极－射极结和集电极－基极结相关的结电容。第3章的讨论已经揭示了这些结电容[①]与结电压的函数依赖关系。

其次，当晶体管偏置在正向放大区时，在基极存储有电荷（如图4-14所示）。随着v_{BE}上下变化，存储在基极区的额外电子浓度（n'）也上下变化。在该讨论过程中，我们将假设发生在v_{BE}上的变化足够慢，以使基极区的额外电子浓度（n'）可以建模为静态的三角形分布序列。这就是所谓的“伪静态（quasi-static）”近似，在后续章节中，当我们讨论晶体管的大信号开关效应时将会多次应用到这个近似模型。

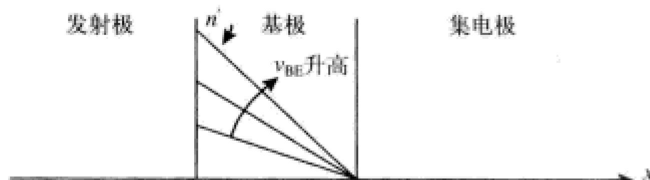


图4-14 偏置在正向放大区的晶体管的基极区存储的电荷。随着晶体管基极－发射极电压v_{BE}升高，基极区的额外电子浓度（n'）也增大

这些存储在基极区的电荷可以建模为与晶体管的直流偏置电平相关的电容。具体到NPN型晶体管，则是随着v_{BE}的升高，存储在基极区的额外少数载流子浓度（n'）也逐渐增大，如图4-14所示。

双极性晶体管内部的多种电荷存储机制的电路模型如图4-15所示。该模型中存在下列电容：

- C_{je}：基极－发射极耗尽电容（depletion capacitance）；
- C_b：基极扩散电容（diffusion capacitance）；
- C_{jc}：基极－集电极耗尽电容。

接下来，我们对该模型做几点修改（如图4-16所示）。首先，我们将电容C_{je}和C_b组合为单个电容，命名为C_π。其次，重新命名电容C_{jc}，称为C_μ。最后，再增加基极扩展电阻r_x（base spreading resistance）。这样就可以将基极欧姆接触以及部分基极二维电流效应的影响用该电阻进行建模表示。将基极扩展电阻r_x包含到该模型中是非常必要的，这是因为晶体管电容C_π和C_μ必须通过该电阻进行充电。如果忽略了r_x，那么在某些电路拓扑结构中，晶体管电路模型的相对带宽将是过分乐观的。

① 这些结电容也称为空间电荷电容或者耗尽电容。

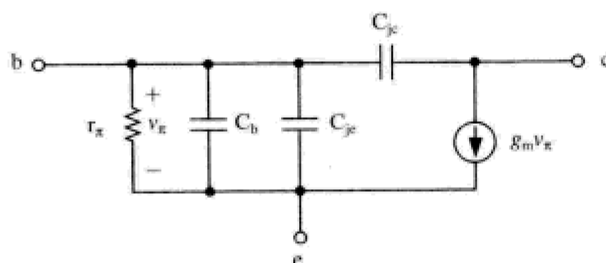


图4-15 标明电荷存储元件C_b（基极扩散电容）、C_{je}（基极－发射极耗尽电容）、C_{jc}（基极－集电极耗尽电容）的晶体管模型

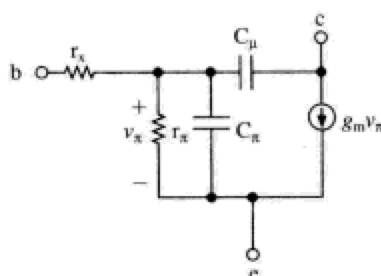


图4-16 双极性晶体管的高频增长模型。在该模型中，我们将电容C_{fe}和C_b组合为单个电容C_π，电容C_{jc}重新命名为C_μ，并且增加了基极扩展电阻r_x

现在，我们如何从晶体管数据手册中确定电容C_π和C_μ的大小呢？C_μ的大小相对容易得到，因为它恰好是集电极－基极结电容。首先，需要确定集电极－基极结电压在直流工作点的取值。然后，只需从数据手册中读取晶体管在这个给定的基极－集电极偏置电压下的集电极－基极结电容的取值，即可得到C_μ的大小。

为了得到电容C_π的大小，需要利用数据手册中的某些晶体管信息。如果阅读晶体管数据手册，你将会发现一个数值列表，该表有时也称为*过渡频率*（transition frequency）表或者*电流增益－带宽乘积*（current gain-bandwidth product）表。如果我们察看晶体管的电流增益－频率关系曲线，将看到类似图4-17的曲线图。晶体管的电流增益－带宽乘积的数值大小就是将二极管的小信号电流增益外推至单位增益时的频率点的取值。

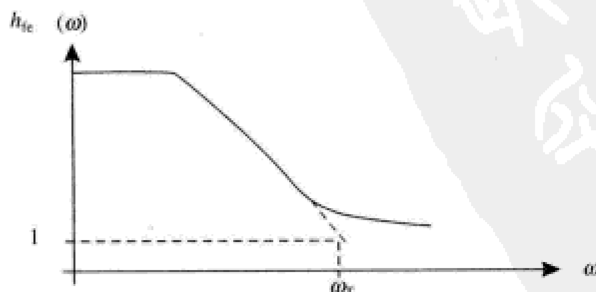


图4-17 增长电流增益$h_{fe}(\omega)$与频率关系曲线。在频率点ω_T处，外推曲线达到单位电流增益

我们可以使用如图4-18所示的简单电路来帮助理解电容C_π的求解方法。首先，为了简化求解过程，我们忽略电阻r_x的影响。我们来求解当基极受增长电流i_b驱动时，集电极增长电流i_c的大小。

因为电容C_μ的右侧接地，电压v_π可以简化为

$$v_\pi = i_b \frac{r_\pi}{r_\pi(C_\pi + C_\mu)s + 1} \tag{4-10}$$

因此，集电极电流为

$$\begin{aligned} i_c &= g_m v_\pi + i_f \\ &= g_m i_b \frac{r_\pi}{r_\pi(C_\pi + C_\mu)s + 1} - i_b \frac{r_\pi C_\mu s}{r_\pi(C_\pi + C_\mu)s + 1} \\ &= \frac{(h_{fe} - r_\pi C_\mu s) i_b}{r_\pi(C_\pi + C_\mu)s + 1} \end{aligned} \tag{4-11}$$

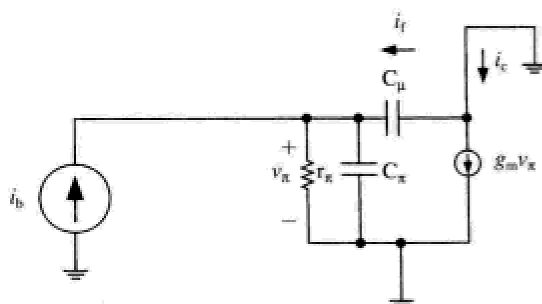


图4-18　晶体管的增长模型，以求解电流增益-带宽乘积f_T

注意，经过电容C_μ的反馈作用，在右半平面的$\omega_Z = +1/(r_\pi C_\mu)$处产生了一个零点，该零点的频率比$\omega_T$高。因为零点频率比我们感兴趣的频率范围高①，我们可以忽略掉该零点，将传递函数（transfer function）近似为

$$\frac{i_c}{i_b} \approx \frac{h_{fe}}{r_\pi(C_\pi + C_\mu)s + 1} \tag{4-12}$$

对于远高于断点频率的频率点，我们可以利用$h_{fe} = \beta_0 = g_m r_\pi$这一事实，得到

$$\frac{i_c}{i_b} \approx \frac{g_m r_\pi}{r_\pi(C_\pi + C_\mu)s} = \frac{g_m}{(C_\pi + C_\mu)s} \tag{4-13}$$

因此，得到电流增益下降到单位1时的角频率幅度为

$$\omega_T \approx \frac{g_m}{(C_\pi + C_\mu)} \tag{4-14}$$

最后，根据晶体管数据手册的参数信息和直流偏置工作点的信息求解电容C_π和C_μ的诀窍可以总结为

$$\begin{aligned} &C_\mu \approx C_{jc} \qquad \text{（在数据手册的偏置电压}V_{BE}\text{处得到）} \\ &C_\pi = \frac{g_m}{\omega_T} - C_\mu \end{aligned} \tag{4-15}$$

比如晶体管2N3904的工作参数为：$I_C = 10\text{mA}$，$h_{fe} \approx 100$，$\omega_T = 2\pi \times 300 \times 10^6 \text{rad/s} = 1.885 \times 10^9 \text{rad/s}$。那么，晶体管的电流增益$h_{fe}$在$\omega = 1.885 \times 10^7 \text{rad/s}$处开始下降。如图4-19所示。

① 该频率点高于晶体管电流增益下降到单位1时的频率点。因此，为了数学简化，我们简单地将其扔掉。

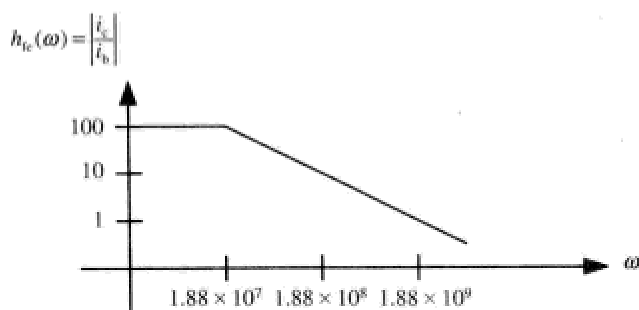


图4-19 晶体管2N3904的小信号电流增益$h_{fe}(\omega)$与频率关系曲线

4.6 阅读晶体管数据手册

下面我们来试着练习阅读可从商业渠道获取的信号晶体管的数据手册（比如2N3904[①]），并从中提取重要的晶体管参数信息。2N3904是一款廉价的信号晶体管，其电流增益-带宽乘积约为300MHz，采用常用的TO-92塑料封装（如图4-20所示），1、2、3脚分别为发射极、基极和集电极。

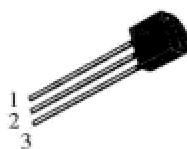


图4-20 TO-92塑料封装的晶体管2N3904

4.6.1 大信号参数（β_F、$V_{CE,SAT}$）

我们最先关注的晶体管大信号参数是直流电流增益β_F（如图4-21所示）。数据手册中[②]常将该参数称为"h_{FE}"。如图4-21所示的图表说明晶体管2N3904的h_{FE}具有中等水平的集电极电流。比如，集电极电流为10mA时，h_{FE}的典型数值为300，最低为100。图4-21b也说明了h_{FE}随集电极电流的这种变化，以及随温度的变化。注意，h_{FE}随温度的升高而增大，至少在适度大小的集电极电流时是这样的。集电极电流很低时，h_{FE}下降，这是由基极-射极结内（基极-发射极）耗尽区的载流子复合造成的。集电极电流很高时，h_{FE}也下降，这主要归因于发射极电流的拥挤现象（crowding）。

晶体管2N3904的饱和电压数值如图4-22所示。注意，深度饱和状态下，$V_{CE,SAT}$的数值可以低至0.1V以下，这主要与基极电流驱动下的基极饱和程度有关。

4.6.2 小信号参数（h_{fe}、C_μ、C_π和r_x）

晶体管的小信号β参数（教科书中称为β_0，数据手册中称为h_{fe}）与大信号电流增益β_F不同。如果知道集电极电流I_C的直流偏置数值，大信号β_F参数就可以告诉我们基极电流I_B的偏置数值。小信号β_0参数则是告诉我们晶体管围绕工作点附近的变化情况，即

① 本书使用On Semiconductor公司（www.onsemi.com）的晶体管数据手册，但是Philips、Fairchild、Vishay、National等公司也生产相同的器件。本章将从该数据手册中提取信息，这些信息与晶体管偏置设置和小信号建模的主题密切相关。至于下面一章的电荷控制模型以及晶体管开关效应内容，将从该数据手册提取更多信息。On Semiconductor公司的授权使用。

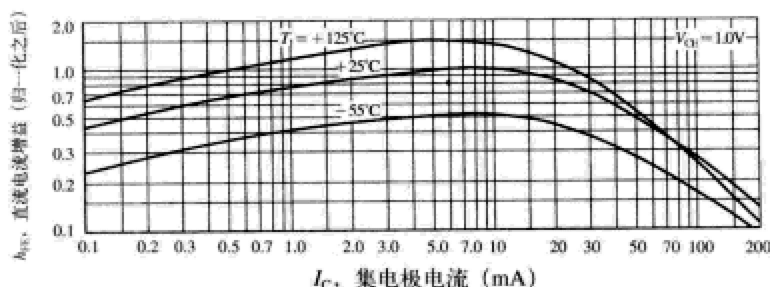
② 出于历史原因，在教科书和期刊中常用专业术语β_F表示直流电流增益，在晶体管数据手册中则是用h_{FE}。

$$\beta_o = h_{fe} = \frac{\partial i_c}{\partial i_b}\bigg|_{I_C} \tag{4-16}$$

特性

直流电流增益（备注2）		h_{FE}			—
(I_C=0.1 mAdc, V_{CE}=1.0 Vdc)	2N3903		20	–	
	2N3904		40	–	
(I_C=1.0 mAdc, V_{CE}=1.0 Vdc)	2N3903		35	–	
	2N3904		70	–	
(I_C=10 mAdc, V_{CE}=1.0 Vdc)	2N3903		50	150	
	2N3904		100	300	
(I_C=50 mAdc, V_{CE}=1.0 Vdc)	2N3903		30	–	
	2N3904		60	–	
(I_C=100 mAdc, V_{CE}=1.0 Vdc)	2N3903		15	–	
	2N3904		30	–	

（a）数据手册中的数值

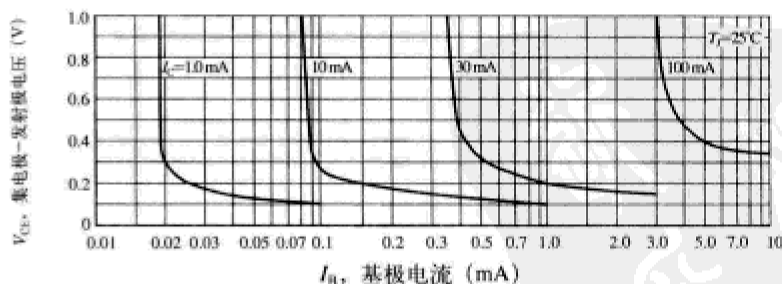


（b）曲线图。注意直流电流增益随着温度以及集电极偏置电流数值变化的变化（On Semiconductor公司的授权复印）

图4-21　晶体管2N3904数据手册中关于直流电流增益h_{FE}的信息（也称为β_F）

集电极-发射极饱和电压（备注2）	$V_{CE(sat)}$			Vdc
(I_C=10 mAdc, I_B=1.0 mAdc)		–	0.2	
(I_C=50 mAdc, I_B=5.0 mAdc)		–	0.3	

(a)



(b)

图4-22　晶体管2N3904数据手册中关于饱和特性$V_{CE,SAT}$的信息。注意，随着过度驱动的基极电流增大，饱和电压降低

如果使用波形记录器对NPN型晶体管进行测量，可以得到类似图4-23的曲线。假设Q点就是电路将要使用的晶体管直流工作点。使用波形记录器，可以求解该工作附近的小信号β参数h_{fe}，即

$$h_{fe} = \frac{\Delta i_c}{\Delta i_b}\bigg|_{I_C} = \frac{I_{C3} - I_{C1}}{I_{B3} - I_{B1}} \tag{4-17}$$

晶体管2N3904数据手册中的h_{fe}信息如图4-24所示。如果知道集电极电流的直流偏置值，

就可以求解跨导g_m。如果知道跨导g_m和小信号β参数h_{fe}，就可以求解r_π。

$$r_\pi = \frac{h_{fe}}{g_m} \tag{4-18}$$

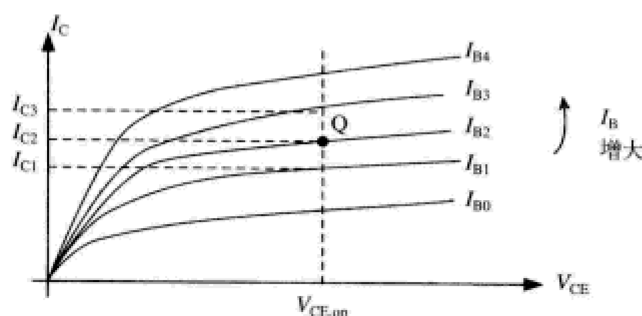
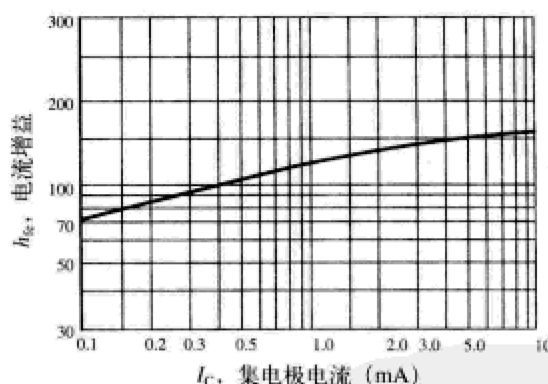


图4-23 波形记录器方法求解晶体管的小信号电流增益h_{fe}。围绕工作点Q进行测量

小信号电流增益 (I_C=1.0 mAdc, V_{CE}=10 Vdc, f=1.0kHz)	2N3903 2N3904	h_{fe}	50 100	200 400	–

(a) 数据表



(b) 曲线。注意，h_{fe}随着集电极电流的偏置水平变化

图4-24 晶体管2N3904数据手册中关于小信号参数β_0（或者h_{fe}）的信息

晶体管2N3904的耗尽电容信息如图4-25所示。曲线C_{obo}是集电极－基极结电容，曲线C_{ibo}则是基极–射极结电容。

基极扩展电阻r_x的信息通常不能直接从晶体管数据手册上得到。某些晶体管的数据手册确实提供了其他一些信息，比如晶体管2N2222的数据手册提供了如图4-26a所示的集电极基极时间常数（collector base time constant）信息。在下面的例子中我们将会看到如何通过该时间常数来求解r_x。设集电极基极时间常数为150ps，即

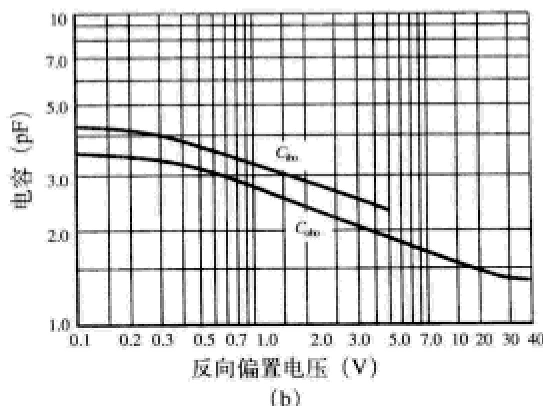
$$r_b C_c \approx r_x C_\mu = \tau_{cb} = 150 \times 10^{-12} \tag{4-19}$$

我们注意到，数据手册特别规定这个集电极基极时间常数是在集电极–基极反向偏置电压$V_{CB}=20$V时测得的。现在我们再来察看C_{cb}与频率的关系曲线（如图4-26b所示），发现在该反向直流偏置电压点，$C_{cb}=C_\mu=3.4$pF。下面，我们就可以估计基极扩展电阻了，即

$$r_x \approx \frac{\tau_{cb}}{C_\mu} = \frac{150\times10^{-12}}{3.4\times10^{-12}} \approx 44\Omega \tag{4-20}$$

输出电容(V_{CB}=5.0 Vdc, I_E=0, f=1.0 MHz)	C_{obo}	–	4.0	pF
输入电容(V_{EB}=5.0 Vdc, I_C=0, f=1.0 MHz)	C_{ibo}	–	8.0	pF

(a)



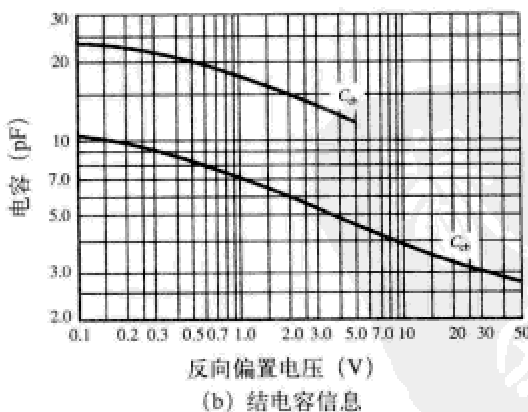
(b)

图4-25　晶体管2N3904数据手册中关于小信号参数β_0（或者h_{fe}）的信息。随着PN结上反向偏置电压的升高，结电容减小

注意，这个r_x值为发射极电流为20mA时（也就是集电极电流）的近似值。受电流集边效应影响，该数值随集电极电流剧烈变化。集电极电流比较低时，r_x值将会稍高一些，不过两者之间具体的函数依赖关系取决于器件的制造细节。

集电极基极时间常数 (I_E=20 mAdc, V_{CB}=20 Vdc, f=31.8 MHz)	r_bC_c	–	150	ps

(a) 在数据手册上发现的时间常数



(b) 结电容信息

图4-26　晶体管2N2222[①]数据手册中关于集电极基极时间常数的信息

综上所述，为了得到合适的晶体管小信号模型，最好按照下列过程执行：

- 根据集电极电流I_C和基极－集电极电压V_{CE}求解直流工作点数值。如果晶体管工作在正向放大区，则继续求解小信号参数。
- 求解晶体管跨导g_m。

① 数据来源为On Semiconductor公司（www.onsemi.com）的晶体管数据手册。本书转载已经通过了On Semiconductor公司的授权。

- 根据设定的集电极偏置电流，在晶体管数据手册上查找小信号参数h_{fe}。
- 计算电阻r_{π}。
- 在晶体管数据手册上查找输出电容C_{obo}（也就是集电极-基极结电容[①]）。小信号电容$C_{\mu}=C_{obo}$。
- 在晶体管数据手册上查找电流增益-带宽乘积f_T（或者ω_T）。注意f_T与集电极电流的大小相关。
- 计算电容C_{π}。
- 缺乏其他任何辅助信息时，合理猜测基极扩展电阻r_x的数值。

4.7 “混合π”模型的限制

“混合π”模型的几个基本限制在于，只有在信号频率远远低于晶体管的电流增益-带宽乘积f_T时才是有效的。下面我们以晶体管2N3904为例，来说明该项限制的含义。

晶体管2N3904的数据手册说明其电流增益-带宽乘积f_T为300MHz。（注意，该值随集电极电流水平变化，不幸的是，在这本特定的数据手册上又没有发现其随电流变化的规律。）如图4-27所示是某典型晶体管的电流增益-带宽乘积f_T随集电极电流变化的关系曲线。在较低的集电极电流范围内，结电容C_{je}和C_{jc}起主要作用，f_T随集电极电流近似线性地增大。在非常高的集电极电流范围，由于高水平注入效应的影响，f_T减小[②]。

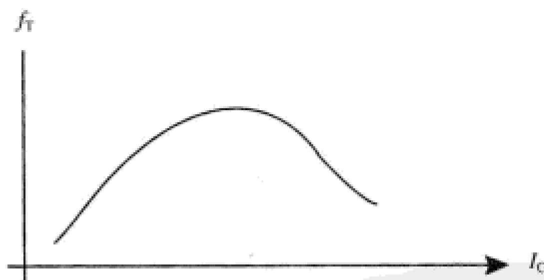


图4-27 小信号晶体管的参数f_T随集电极电流变化的假想关系曲线

4.8 本章习题

习题4.1

晶体管电路如图4-28所示，求解晶体管的集电极电流和小信号参数g_m以及r_{π}，并且画出低频小信号模型。假设大信号电流增益$\beta_F=100$，小信号电流增益$h_{fe}=150$，基极电阻$r_x=200\Omega$。假设晶体管工作在室温环境。

习题4.2

某晶体管的集电极电流$I_C=10$mA，$h_{fe}=200$，求解并绘制其低频增长模型。假设晶体管工作在室温环境。假设晶体管的基极电阻$r_x=0\Omega$。

习题4.3

某晶体管的小信号参数$f_T=500$MHz，$C_{jc}=1$pF，$h_{fe}=100$。当晶体管的集电极电流偏置为

① 有些制造商使用不同的名字。比如，在晶体管2N2222的数据手册中将集电极－基极结电容命名为C_{cb}。

② 参见John Choma, Jr.的文章“A Curve-Fitted Circuits Model for Bipolar f_T Roll-Off at High Injection Levels”, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, April 1976, pp.346-348.

1mA时，求解并绘制其高频增长模型。假设晶体管的基极电阻$r_x = 50\Omega$。

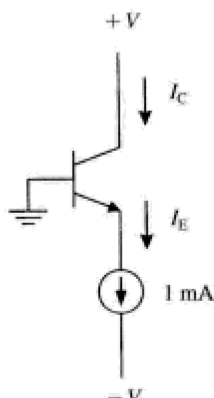


图4-28 习题4.1的晶体管电路

习题4.4

使用晶体管2N3904的数据手册信息，假设晶体管的集电极电流偏置在5mA，集电极−基极电压为5V，求解其小信号模型。

习题4.5

考虑图4-29所示的晶体管电路。晶体管的基极电压经偏置电流源I_B设置，并且与交流小信号电流源i_b连接在一起。其结果是集电极电流既包含直流分量I_C，也包含小信号变化分量i_c。

(a) 利用小信号高频模型绘制其小信号模型（也就是要包含C_π和C_μ），不过要忽略基极电阻r_x（也就是假设r_x非常小）。

(b) 根据g_m、C_π和C_μ计算小信号电流增益$i_c(s)/i_b(s)$。

(c) 利用合理近似和（b）的结果，根据g_m、C_π和C_μ计算小信号电流增益$i_c(s)/i_b(s)$的幅度下降到单位1时的频率ω_T（以rad/s为单位）的大小。（提示：应该使用图表方法进行求解而避免复杂的计算。）

(d) 假定晶体管为2N3904，集电极电流偏置在$I_C = 10\text{mA}$，从数据手册上利用最少的数据信息来绘制i_c/i_b的幅度曲线，并且在曲线图上标注出频率ω_T，标记所有断点。

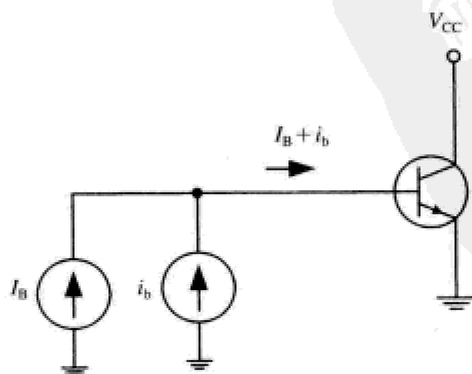


图4-29 习题4.5的晶体管电路

4.9 参考文献

Bardeen, John, "Semiconductor Research Leading to the Point Contact Transistor," December 11, 1956, from *Nobel Lectures Physics, 1942-1962*, Elsevier Publishing, available from the Nobel e-museum at Web: *http://www.nobel.se/physics/laureates/1956/*

Bardeen, J., and Brattain, W. H., "Physical Principles Involved in Transistor Action," *Physical Review*, vol. 75, 1949, p. 1208.

Bevitt, W. D., *Transistors Handbook*, Prentice-Hall, 1956.

Brinkman, W. F, et al., "A History of the Invention of the Transistor and Where It Will Lead Us."

Choma, John, Jr., "A Curve-Fitted Circuits Model for Bipolar f_T Roll-Off at High Injection Levels" *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, April 1976, pp. 346-348.

Fair, R. B., "History of some early developments in ion-implantation technology leading to silicon transistor manufacturing," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 1, January 1998, pp.111-137.

Gough, Russell, "High-Frequency Transistor Modeling for Circuit Simulation," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. SC-17, no. 4, August 1982, pp. 666-670.

Gray, P. E., DeWitt, D., Boothroyd, A. R., and Gibbons, J. F., *Physical Electronics and Circuit Models of Transistors*, Semiconductor Electronics Education Committee, volume 2, JohnWiley, 1964.

Gray, Paul E., and Searle, Campbell L., *Electronic Principles: Physics, Models and Circuits*, JohnWiley, 1969.

Gray, Paul R. and Meyer, Robert G., *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, 2d edition, John Wiley, 1984.

Greeneich, E. W., "An Appropriate Device Figure of Merit for Bipolar CML," *IEEE Electron Device Letters*, vol. 12, 1991, p. 18.

Hurkx, G. A. M., "The Relevance of f_T and f_{max} for the Speed of a Bipolar CE Amplifier Stage," *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 44, no. 5, May 1997, pp. 775-781.

Lo, A. W., Endres, R., Zawels, J., Waldhauer, T., and Cheng, C., *Transistor Electronics*, Prentice-Hall, 1955.

Muller, Richard S., and Kamins, Theodore I., *Device Electronics for Integrated Circuits*, 2d edition, John Wiley, 1986.

Neudeck, Gerold W., *Modular Series on Solid State Devices, The Bipolar Junction Transistor*, Addison-Wesley, 1983.

On Semiconductor website: *http://www.onsemi.com*

Pritchard, R. L., "Transistor equivalent circuits," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 1, January 1998, pp. 150-162.

Sansen, Willy, and Meyer, Robert, "Characterization and Measurement of the Base and Emitter Resistances of Bipolar Transistors," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. SC-7, no. 6, December 1972, pp. 492-498.

Searle, C. L., Boothroyd, A. R., Angelo, E. J., Jr., Gray, P. E., and Pederson, D. O., *Elementary Circuit Properties of Transistors*, Semiconductor Electronics Education Committee, volume 3, John Wiley, 1964.

Shockley, William, "Transistor Technology Evokes New Physics," December 11, 1956, from *Nobel Lectures Physics, 1942-1962*, Elsevier Publishing, available from the Nobel e-museum at Web: *http://www.nobel.se/physics/laureates/1956/*

Sze, S. M., *Physics of Semiconductor Devices*, 2d edition, John Wiley, 1981.

Warner, Raymond M., "Microelectronics: Its Unusual Origin and Personality," *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 48, no. 11, November 2001, pp. 2457-2467.

第5章 基本双极性晶体管放大器及其偏置设置

本章概要

- 本章内容涵盖一些基本的晶体管电路结构，包括共射极放大器、发射极跟随器（简称射随器）、共基极放大器和差分放大器。此外，还详细讨论了晶体管电路直流偏置设置的重要问题——如何连接晶体管以使它工作在正向放大区。

5.1 晶体管偏置设置

为了从晶体管中获取有用的放大功能，通常要把晶体管的直流偏置电压设置在正向放大区（forward-active region，FAR）。晶体管工作在正向放大区可以提供电流增益，所以具有放大作用。偏置设置过程可以把晶体管放大器的直流工作点调整到正向放大区内某个已知的可重现点。如果晶体管放大器经过了正确的直流偏置设置，其输出端的直流偏置电平就不会随时间、温度或者元件变化发生严重漂移。

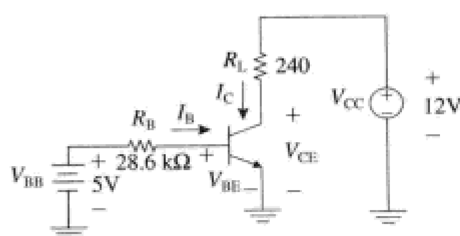
我们先来考虑如图5-1a所示的简单偏置电路。偏置电压$V_{BB}=5\text{V}$将基极电流I_B设置为

$$I_B=\frac{V_{BB}-V_{BE}}{R_B}\approx\frac{5-0.7}{28.6\,\text{k}\Omega}\approx 150\,\mu\text{A} \tag{5-1}$$

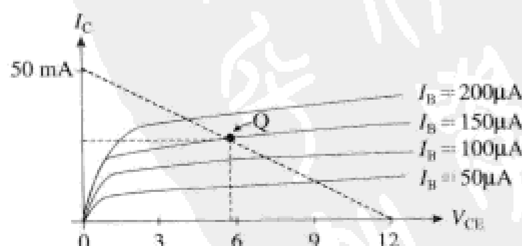
这个起始条件的计算假设，晶体管的基极－发射极电压为$V_{BE}=0.7\text{V}$，如果晶体管偏置在正向放大区，并且基极－发射极结正向偏置，则这个电压值是近似准确的。假设该晶体管的直流电流增益$\beta_F=175$，这意味着晶体管的集电极电流为

$$I_C=\beta_F I_B=\beta_F\left(\frac{V_{BB}-V_{BE}}{R_B}\right)\approx 175\times 150\,\mu\text{A}=26.25\,\text{mA} \tag{5-2}$$

负载电阻$R_L=240\Omega$，集电极电流流过该电阻形成6.3V的电压降，因此集电极－发射极电压$V_{CE}=5.7\text{V}$。该电路的静态工作点（quiescent operating point）标记为Q，如图5-1b所示。工作点Q是晶体管特性曲线与240Ω电阻的负载线叠加形成的交点。



(a) 电路



(b) 240Ω电阻的负载线与晶体管特性曲线叠加在一起。静态工作点标记为Q，Q点的坐标为$I_C=26.25\text{mA}$、$V_{CE}=5.7\text{V}$

图5-1 直流偏置设置电路实例

这种形式的简单偏置设置电路存在诸多实际设计难点。第一，如何产生偏置电源电压

V_{BB}？在该电路中，主电源$V_{CC}=12V$，因此需要辅助供电电源来提供5V电压用于基极电压偏置设置。

第二，还存在集电极电流随晶体管电流增益的变化而变化的问题。正如集电极电流的偏置电流方程所示，集电极电流与晶体管的直流电流增益β_F成比例。如果β_F发生变化，集电极电流也按比例变化。如图5-2所示是晶体管2N3904在三种不同工作温度下的电流增益曲线。因此，正如图中所示，晶体管的直流电流增益随温度和集电极电流水平的变化而变化。

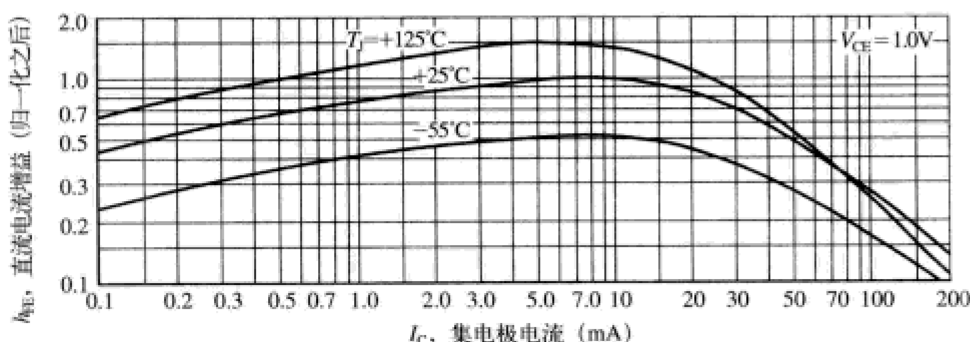


图5-2 晶体管2N3904的直流电流增益β_F（数据手册中称为h_{FE}）变化曲线（On Semiconductor公司授权使用）

第三，由于晶体管基极－发射极电压V_{BE}的变化导致集电极电流发生变化。对于典型晶体管而言，在固定晶体管集电极电流偏置水平的测量条件下，晶体管的工作温度每上升1°C，基极－发射极电压V_{BE}大致降低2mV[①]。

采用稍显复杂的直流偏置设置电路设计可以显著地降低晶体管V_{BE}和β_F的变化对偏置设置的影响。考虑图5-3a所示的电路，在晶体管的基极端使用基极偏置电阻分压器R_{B1}和R_{B2}来设

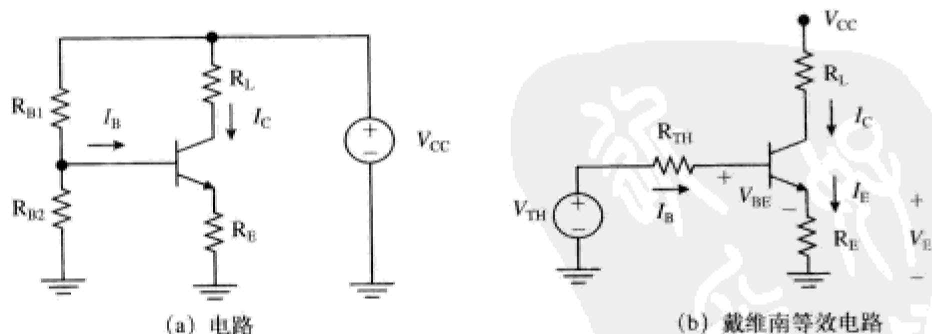


图5-3 可选择的偏置设置电路

① 参见Robert J. Widlar的文章"An Exact Expression for the Thermal Variation of the Emitter Base Voltage of Bi-Polar Transistors", *Proceedings of the IEEE*, January 1967, pp.96-97。Widlar在文章中将晶体管电压V_{BE}表述为温度的函数

$$V_{BE}(T)=V_{G0}\left(1-\frac{T}{T_0}\right)+V_{BE0}\left(\frac{T}{T_0}\right)+\frac{nkT}{q}\ln\left(\frac{T_0}{T}\right)+\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_C}{I_{C0}}\right)$$

这里V_{G0}是外推带隙电压（在0K时其值约为1.2V），T是以K为单位的温度，T_0是V_{BE0}和I_{C0}点的参考温度，n为过程相关常数，介于1.5和3之间。室温时，V_{BE}的温度系数约为−2mV/K，或者近似为−3000ppm/°C。

定偏置电压，并且增加了发射极电阻R_E。我们将会看到，如果设计合理，R_{B1}、R_{B2}以及R_E的元件组合将使该晶体管电路的直流偏置工作点更稳定，与前一电路相比，受温度、V_{BE}和β_F变化的影响明显减小。

该电路的戴维南等效电路如图5-3b所示，图中各等效元件的取值为

$$R_{TH} = R_{B1} \| R_{B2}$$
$$V_{TH} = V_{CC}\left(\frac{R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}}\right) \tag{5-3}$$

利用戴维南等效电路，可以计算得到基极电流为

$$I_B = \frac{V_{TH} - V_{BE} - V_E}{R_{TH}} \tag{5-4}$$

发射极电阻R_E两端的电压V_E为①

$$V_E = I_E R_E = \left(\frac{\beta_F + 1}{\beta_F}\right) I_C R_E \tag{5-5}$$

联立这些方程，解得

$$I_C = \beta_F \left[\frac{V_{TH} - V_{BE} - \left(\frac{\beta_F + 1}{\beta_F}\right) I_C R_E}{R_{TH}}\right] \approx \beta_F \left[\frac{V_{TH} - V_{BE} - I_C R_E}{R_{TH}}\right] \tag{5-6}$$

最后，得到集电极电流为

$$I_C \approx \beta_F \left(\frac{V_{TH} - V_{BE}}{R_{TH}}\right)\left(\frac{1}{1 + \frac{\beta_F R_E}{R_{TH}}}\right) \approx \frac{(V_{TH} - V_{BE})}{\left(R_E + \frac{R_{TH}}{\beta_F}\right)} \tag{5-7}$$

既然我们在这个直流偏置设置电路设计中使用了额外的电阻，那么该设计就有很大的自由度来保证$V_{TH} \gg V_{BE}$，$R_E \gg R_{TH}/\beta_F$。在这些假设下，集电极电流的偏置水平可以近似为

$$I_C \approx \frac{V_B}{R_E} \tag{5-8}$$

我们来直观测量一下该电路是如何保证集电极偏置电流的稳定性的。如果集电极电流I_C受直流电流增益β_F增大的影响，或者受V_{BE}减小的影响而增大，这就意味着发射极电流I_E也依次增大。我们从基极－发射极的KVL方程知道，发射极电流I_E的增大将导致基极电流I_B减小。基极电流的减小反过来又将使集电极电流保持稳定。

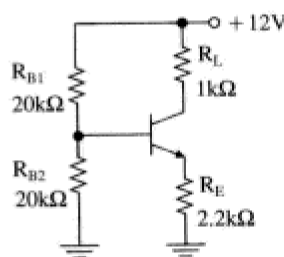
例题5.1：直流偏置设置实例

对于如图5-4所示的电路，如果直流电流增益β_F从40增大到200，我们来求解集电极电流的变化。这里假设$V_{BE}=0.7\text{V}$。

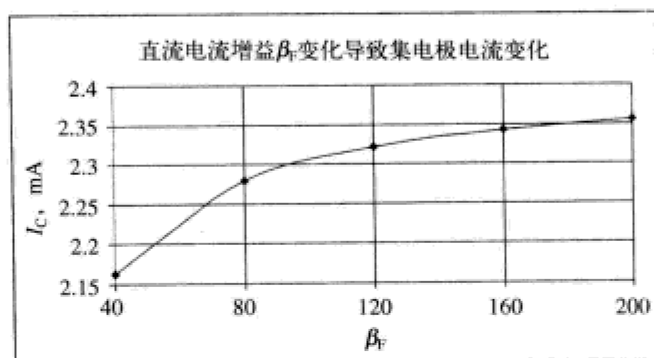
对于该电路来说，$V_{TH}=6\text{V}$，$R_{TH}=10\text{k}\Omega$。如图中所示，晶体管电流增益β_F以5倍因数变化，而集电极电流I_C仅发生了微小变化（20%左右）。

① 注意作者已经给定的电流极性，这可能与某些教科书上不同。我们可以这样理解，如果β_F非常大，则集电极电流和发射极电流近似相等。两者之间的实际关系为

$$I_B + I_C = I_E \Rightarrow \frac{I_C}{\beta_F} + I_C = I_E \Rightarrow I_E = \left(\frac{\beta_F + 1}{\beta_F}\right) I_C$$



（a）电路



（b）当直流电流增益β_F从40变化到200时，集电极电流的变化曲线

图5-4 偏置设置电路实例

5.2 某些晶体管放大器

5.2.1 共射极放大器

共射极放大器（common-emitter amplifier）是广泛使用的增益电路模组。利用混合π电路模型，我们可以求解共射极放大器的工作点、增益以及小信号带宽等参数和指标。如图5-5所示是晶体管2N3904的共射极放大电路。首先，我们将采用不同的方法来计算放大器的带宽，这里使用节点方程方法来进行求解。我们将暂时忽略直流偏置设置电路的细节，并且假设晶体管器件的参数如下：

- $f_T=300\text{MHz}$；$\omega_T=1.89\times10^9\text{rad/s}$
- 基极扩展电阻$r_x=100\Omega$
- 小信号电流增益$h_{fe}=150$
- 集电极－基极结电容$C_\mu=20\text{pF}$
- 集电极电流偏置$I_C=2\text{mA}$
- 环境温度$T_A=300\text{K}$

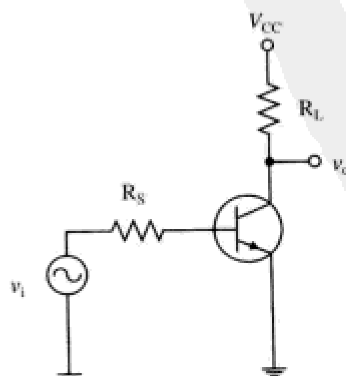


图5-5 共射极放大器（忽略偏置设置电路细节）。我们假设没有画出的额外元件将该晶体管偏置设置在正向放大区。注意，除非特别说明，节点电压比如V_{CC}、v_o等都是相对地进行测量的

晶体管放大器受源电阻$R_S = 1\text{k}\Omega$驱动，集电极电阻$R_L = 1\text{k}\Omega$。本章和下一章的目标是通过多种方法来求解放大器增益和带宽等指标。

我们注意到环境温度是300K，因此热电压$V_T=kT/q \approx 26\text{mV}$。晶体管的集电极电流偏置设置为2mA，可以计算得到下列小信号参数

$$
\begin{aligned}
g_m &= \frac{|I_C|}{V_{TH}} = \frac{2\,\text{mA}}{26\,\text{mV}} = 0.077\Omega^{-1} \\
r_\pi &= \frac{h_{fe}}{g_m} = \frac{150}{0.077\Omega^{-1}} = 1950\Omega \\
C_\pi &= \frac{g_m}{\omega_T} = -C_\mu = \frac{0.077}{2\pi(300\times10^6)} - 2\,\text{pF} = 38.8\,\text{pF}
\end{aligned}
\tag{5-9}
$$

该放大器的小信号模型如图5-6所示，其中，图5-6a将用于求解该放大器的低频增益，图5-6b用于求解该电路的高频带宽界限。

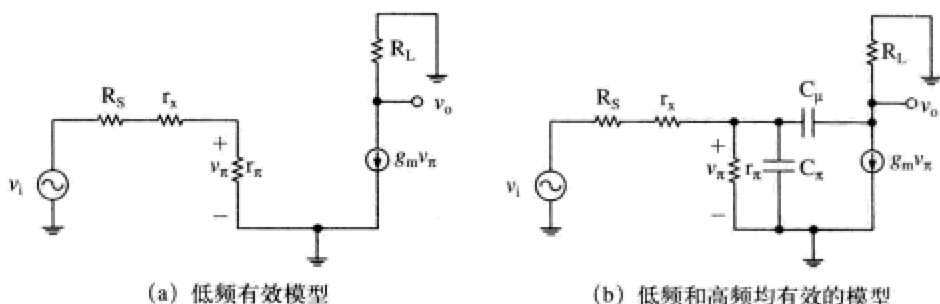


图5-6　共射极放大器的小信号模型

1. 共射极放大器的低频增益

利用图5-6a给出的低频小信号模型，我们来求解该放大器的低频增益（频率足够低以致晶体管的内部电容不会造成影响）。

输出电压v_o为

$$v_o = -g_m v_\pi R_L \tag{5-10}$$

分压器给出的节点电压v_π为

$$v_\pi = v_i \frac{r_\pi}{R_s + r_x + r_\pi} \tag{5-11}$$

将这两式结合在一起，很容易得到该放大器的低频增益，即

$$\frac{v_o}{v_i} = -(g_m R_L)\left(\frac{r_\pi}{R_s + r_x + r_\pi}\right) = -(0.077)(1000)\left(\frac{1950}{1000+100+1950}\right) \approx -49 \tag{5-12}$$

2. 共射极放大器的高频带宽界限

为了求解包括晶体管内部电容C_π和C_μ的影响在内的放大器响应，需要根据图5-6b所示的电路模型进行大量的繁复计算。节点v_π和v_o处的节点方程为[①]

$$
\begin{aligned}
&1)\ (v_i - v_\pi)G_s' - v_\pi(g_\pi + C_\pi s) + (v_o - v_\pi)C_\mu s = 0 \\
&2)\ (v_\pi - v_o)C_\mu s - v_o G_L - g_m v_\pi = 0
\end{aligned}
\tag{5-13}
$$

这里

① 在许多实例中，使用电导的数学形式比使用电阻要简单一些。

$$
\begin{aligned}
G_s^{'} &= \frac{1}{R_s + r_x} \\
g_\pi &= \frac{1}{r_\pi} \\
G_L &= \frac{1}{R_L}
\end{aligned}
\tag{5-14}
$$

将方程组5-13写成矩阵形式，得到

$$
\begin{aligned}
&1)\ -v_\pi[G_s^{'} + g_\pi + (C_\pi + C_\mu)s] + v_o C_\mu s = -v_i G_s^{'} \\
&2)\ v_\pi(C_\mu s - g_m) - v_o(G_L + C_\mu s) = 0
\end{aligned}
\tag{5-15}
$$

或者

$$
\begin{bmatrix} -[G_s^{'} + g_\pi + (C_\pi + C_\mu)s] & C_\mu s \\ C_\mu s - g_m & -(G_L + C_\mu s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_\pi \\ v_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -v_i G_s^{'} \\ 0 \end{Bmatrix}
\tag{5-16}
$$

利用克莱姆法则[①]解得输出电压v_o为

$$
v_o = \frac{\det\begin{bmatrix} -[G_s^{'} + g_\pi + (C_\pi + C_\mu)s] & -v_i G_s^{'} \\ C_\mu s - g_m & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} -[G_s^{'} + g_\pi + (C_\pi + C_\mu)s] & C_\mu s_s \\ C_\mu s - g_m & -(G_L + C_\mu s) \end{bmatrix}}
\tag{5-17}
$$

这里，符号“det”代表矩阵的行列式（determinant of the matrix）。求解传递函数v_o/v_i得到

$$
\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = -(g_m R_L)\left(\frac{G_s^{'}}{G_s^{'} + g_\pi}\right)\left[\frac{1 - \dfrac{C_\mu}{g_m}s}{\dfrac{R_L C_\pi C_\mu}{G_s^{'} + g_\pi}s^2 + \dfrac{1}{G_s^{'} + g_\pi}[R_L(g_m + g_\pi + G_s^{'})C_\mu + C_\pi + C_\mu]s + 1}\right]
\tag{5-18}
$$

将这个复杂的表达式分解为下列多项有很大益处[②]：

- $-g_m R_L$项就是源电阻和基极电阻为0Ω时的直流增益。这也是电阻性负载共射极放大器能够提供的最大增益。
- 第二个增益项是退化项，这是由于基极电阻r_x和源电阻R_S降低了电阻r_π的负载效应造成的影响。
- 第三项在右半平面的频率点$+g_m/C_\mu$处存在一个零点，该频率点高于晶体管的电流增益-带宽乘积ω_T。稍后我们将会看到，该零点的频率是如此之高，我们完全可以忽略它的影响。
- 第三项的分母表明该系统存在两个极点。

该放大器的增益为−49。MATLAB仿真（如图5-7所示）表明极点和零点的位置在下列频率点处

$\omega_z = +3.84 \times 10^{10}\text{rad/s}$

$\omega_{p1} = -7.2 \times 10^{7}\text{rad/s}$

---

① 克莱姆法则将在第16章讨论。

② 在将表达式拆分为若干分组时，作者力争按照合理的方式将其表述为有意义的项。这服从R.D.Middlebrook的“低信息熵表述（low entropy expression）”思想（参见本章节尾的参考文献）。我们力争以简单合理的方式分组各项，以使读者能够理解各个子项的函数依赖关系。

$\omega_{p2} = -2.5 \times 10^9 \text{rad/s}$

注意，零点的频率和高频极点的频率均高于晶体管的电流增益–带宽乘积ω_T。

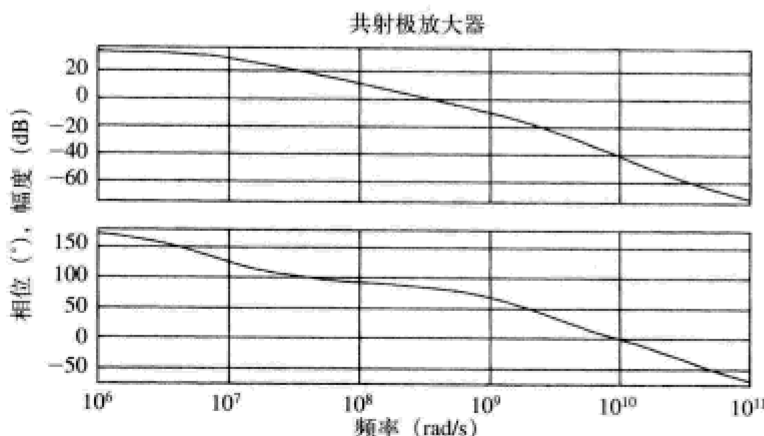


图5-7　共射极放大器的频率响应

3. 估计共射极放大器带宽的单极点近似方法

混合π模型的一个基本限制在于它只有在信号频率远小于晶体管的电流增益–带宽乘积ω_T时才是有效的。在此项限制的基本前提下，增益表达式5-18中的s^2项可以忽略不计，因为

$$\left|C_\pi C_\mu R_L \omega\right| \ll g_m R_L C_\mu \\ \Downarrow \\ \omega \ll \frac{g_m}{C_\pi} \tag{5-19}$$

因此，我们还将忽略系统的零点，因为零点的频率也远高于电流增益–带宽乘积ω_T。既然$g_m \gg g_\pi$，只要可能，我们也将忽略g_π，得到增益方程的单极点近似表达式，即

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} \approx -g_m R_L \frac{G_s'}{G_s' + g_\pi}\left[\frac{1}{\frac{1}{G_s' + g_\pi}\left[[1+(g_m + G_s')R_L]G_\mu + C_\pi\right]s+1}\right] \tag{5-20}$$

注意这个传递函数近似式提供的内涵。分母项含有单个极点，集电极–基极结的结电容C_μ被放大（$1+(g_m+G'_s)R_L$）倍。该项部分等于放大器的中间带增益——由于*米勒效应*（Miller effect）[①]的影响，反馈电容C_μ被放大。演示该近似表达式的电路模型如图5-8所示。在该电路中，我们已经将电容C_π的影响以及经米勒效应修改后的电容C_μ的影响集总为单个等效电容，这里我们称之为C_T，其大小为

$$C_T = C_\pi + \left[1+(g_m + G_s')R_L\right]C_\mu \tag{5-21}$$

这个近似表达式显示主控极点位于

$$\omega_{dom} = -\frac{G_s' + g_\pi}{[1+(g_m + G_s')R_L]C_\mu + C_\pi} = \frac{G_s' + g_\pi}{C_T} = 7.29 \times 10^6 \ \text{rad/s} \tag{5-22}$$

① 稍后我们将会看到，如果在放大器的输入–输出端之间使用电容构成负增益电路，那么米勒效应就会造成影响。

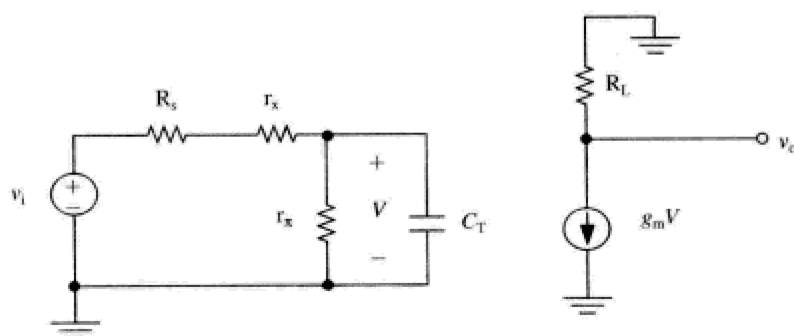


图5-8 演示晶体管受米勒效应影响发生倍乘的电路

共射极放大器的增益表达式的精确结果与米勒近似结果的比较曲线如图5-9所示。注意，在频率低于10^9rad/s左右时，两者的幅度响应具有很好的一致性。

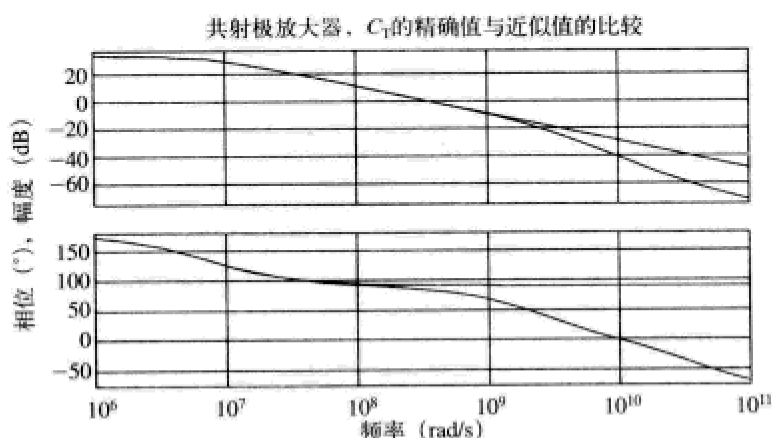


图5-9 单极点（C_T）精确结果与近似值比较曲线。实线表示精确结果，虚线表示C_T近似值

4. 关于米勒效应的更多讨论

利用图5-10，我们可以更深入地演示米勒效应[①]。电容C_f缠绕在负增益模块$-A$的周围。使用图5-10b的电路，我们可以求解从放大器输入端看过去的输入电阻。在该电路中，我们施加了测试电压源v_t，放大器使输出端电压强制为$-Av_t$。

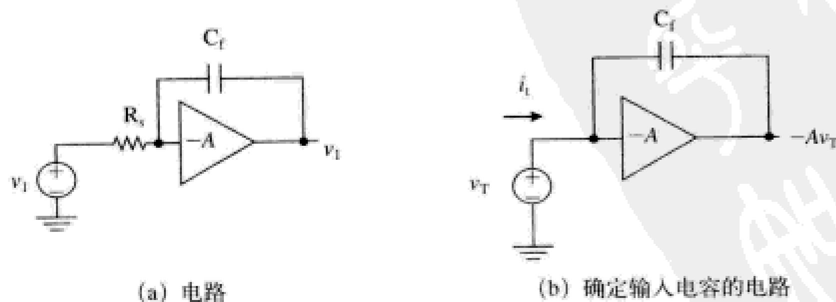


图5-10 米勒效应演示电路

① 参见Miller于1920年发表的原创论文，本章结尾注明了该参考文献。

$$i_t = \frac{v_t - (-Av_t)}{\left(\dfrac{1}{C_f s}\right)} = v_t(1+A)C_f s \tag{5-23}$$

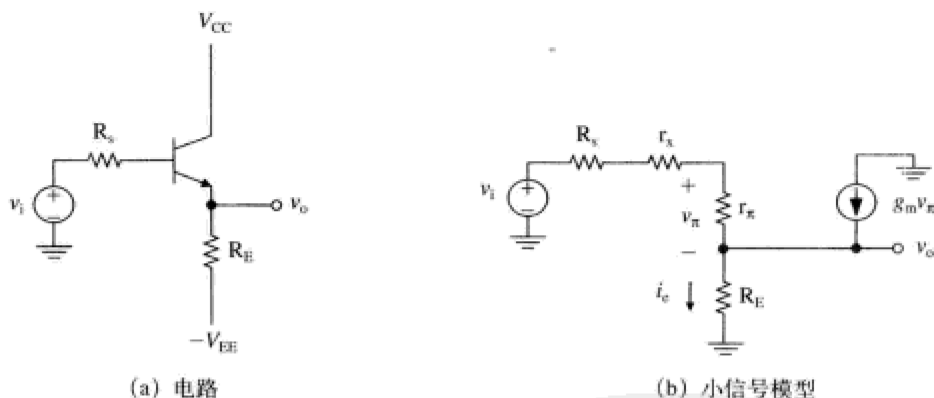
放大器的输入阻抗就是v_t和i_t的比率，即

$$Z_{in} = \frac{v_t}{i_t} = \frac{1}{(1+A)C_f s} \tag{5-24}$$

因此，负反馈的作用是使输入电容变反馈电容的（$1+A$）倍。该效应就是众所周知的*米勒效应或者米勒倍乘效应*（Miller multiplication）。

5.2.2 射极跟随器的增益、输入电阻和低频输出电阻

射随器（emitter-follower）（如图5-11a所示）是具有高输入阻抗、低输出阻抗和接近单位增益的缓冲电路。我们利用如图5-11b所示的低频小信号电路，来求解射随器电路的增益、基极端看到的输入电阻（即基极端的视在电阻）、以及发射极端看到的输出电阻（即发射极端的视在电阻）①。



（a）电路　　（b）小信号模型

图5-11 射随器

我们首先利用图5-12的电路来求解从晶体管基极端看进去的输入电阻r_{in}。我们先在基极输入端施加测试电流源i_t，然后求解该电流源产生的测试电压v_t。

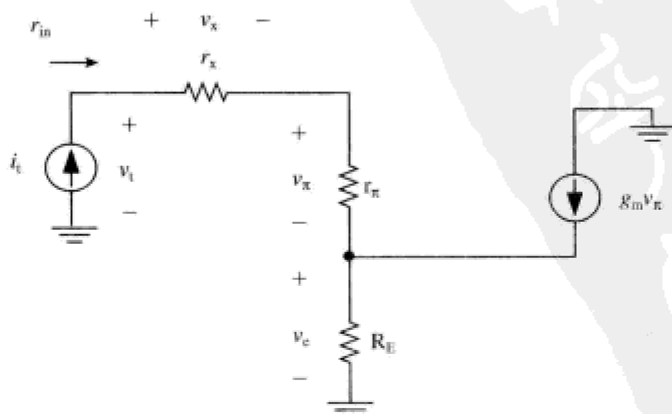


图5-12 求解射随器小信号输入电阻的电路

① 增益、输入电阻以及输出电阻的计算只在低频段有效。在第7章我们将详细分析射随器的输出电阻。

测试电压v_t为

$$v_t = v_x + v_\pi + v_e = i_t r_x + i_t r_\pi + (i_t + g_m v_\pi) R_E$$
$$\Downarrow$$
$$v_t = i_t r_x + i_t r_\pi + (i_t + g_m (r_\pi i_t)) R_E \tag{5-25}$$
$$\Downarrow$$
$$v_t = i_t (r_x + r_\pi + (1 + h_{fe}) R_E)$$

注意$g_m r_\pi = h_{fe}$，解得从射随器基极端看进去的输入电阻为

$$r_{in} = \frac{v_t}{i_t} = r_x + r_\pi + (1 + h_{fe}) R_E \tag{5-26}$$

注意，由于电阻R_E的适中阻值[①]的作用，该输入电阻非常大，这是因为在求解输入电阻时，电阻R_E被小信号电流增益h_{fe}倍乘。

既然已经得到基极端看进去的输入电阻，现在就很容易求解射随器的增益。我们利用如图5-11b所示的小信号电路模型来求解射随器电路的增益。

我们看到所求的输出电压为

$$v_o = i_e R_E \tag{5-27}$$

发射极的增长电流为

$$i_e = \frac{v_\pi}{r_\pi} + g_m v_\pi = (g_\pi + g_m) v_\pi \tag{5-28}$$

因为前面已经通过大量工作求得了射随器的输入电阻，这里很容易求得电压v_π，即

$$v_\pi = v_i \left(\frac{r_\pi}{R_S + r_x + r_\pi + (1 + h_{fe}) R_E} \right) \tag{5-29}$$

那么，射随器的增益为

$$\frac{v_o}{v_i} = (g_m + g_\pi) \left(\frac{r_\pi}{R_S + r_x + r_\pi + (1 + h_{fe}) R_E} \right) R_E \approx \frac{h_{fe} R_E}{R_S + r_x + r_\pi + (1 + h_{fe}) R_E} \tag{5-30}$$

可以看到，如果$h_{fe}R_E \gg R_S$、$h_{fe}R_E \gg r_x$并且$h_{fe}R_E \gg r_\pi$，那么射随器的增益非常接近于单位1。

下面我们利用图5-13所示的电路来求解射随器的输出电阻r_{out}。首先忽略发射极电阻R_E（稍后再将其并联回去），并施加测试电压源v_t，于是产生的测试电流i_t。电压v_π为

$$v_\pi = -v_t \left(\frac{r_\pi}{R_S + r_x + r_\pi} \right) \tag{5-31}$$

测试电流i_t为

$$i_t = -g_m v_\pi - \frac{v_\pi}{r_\pi} = -(g_m + g_\pi) v_\pi \tag{5-32}$$

最终求得测试电流i_t为

$$i_t = \left(\frac{g_m r_\pi + 1}{R_S + r_x + r_\pi} \right) v_t \tag{5-33}$$

因此，射随器的输出电阻为（要记得将发射极电阻R_E考虑进去[②]）

① 也就是说，R_E的阻值不是无限小或者非常小。——译者注

② 在多数情况下，我们可以完全忽略R_E，因为R_E通常是阻值很大的偏置电阻，远远大于从晶体管发射极看进去的电阻。

$$r_{out} = \frac{v_t}{i_t} = R_E \left\| \left(\frac{R_s + r_x + r_\pi}{1 + h_{fe}} \right) \right. \quad (5\text{-}34)$$

可以看到，这个输出电阻一般很小，这是因为基极端的输入电阻被晶体管的增长电流增益做了除法，大为减小。

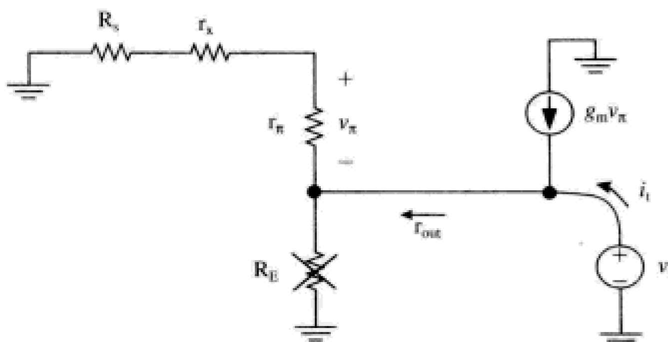


图5-13　用来求解射随器小信号输出电阻的电路。在最初计算中忽略电阻R_E，稍后再将其并联回去

例题5.2：射随器设计实例

我们利用混合π模型来求解射随器电路的小信号增益和带宽，射随器电路使用晶体管N3904（如图5-14a所示），该器件具有下列参数：

- $f_T = 300\text{MHz}$
- 基极扩展电阻$r_x = 100\Omega$
- 小信号电流增益$h_{fe} = 150$
- 集电极－基极结电容$C_\mu = 2\text{pF}$

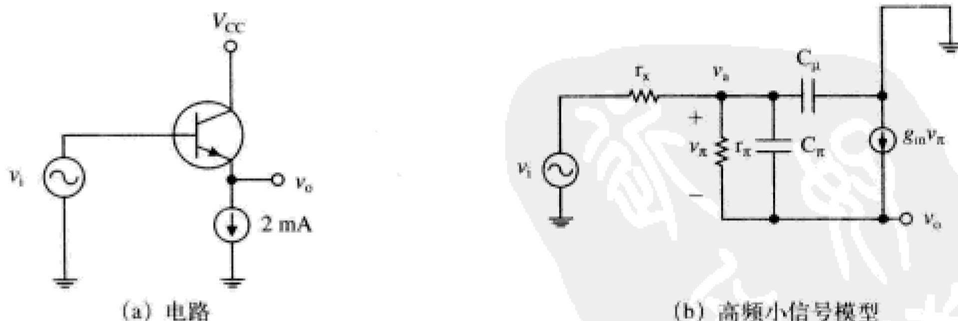


图5-14　射随器设计实例

射随器使用2mA电流源进行直流偏置设置，形成下列小信号参数

$$g_m = \frac{|I_C|}{V_{TH}} = \frac{2\,\text{mA}}{26\,\text{mA}} = 0.077\Omega^{-1}$$

$$r_\pi = \frac{h_{fe}}{g_m} = \frac{150}{0.077\Omega^{-1}} = 1950\Omega \quad (5\text{-}35)$$

$$C_\pi = \frac{g_m}{\omega_T} - C_\mu = \frac{0.077}{2\pi(300\times10^6)} - 2\ \text{pF} = 38.8\ \text{pF}$$

射随器的小信号模型如图5-14b所示。利用该小信号模型，列出v_a和v_o节点的节点电流方程为

$$\begin{aligned}&1)(v_i - v_a)g_x + (v_o - v_a)(g_\pi + C_\pi s) - v_a C_\mu s = 0\\&2)(v_a - v_o)(g_\pi + C_\pi s + g_m) = 0\end{aligned} \tag{5-36}$$

将其写成矩阵形式，并且假定$g_m = h_{fe} g_\pi \gg g_\pi$，得到

$$\begin{aligned}&1) - v_a\left[g_x + g_\pi + (C_\pi + C_\mu)s\right] + v_o(g_\pi + C_\pi s) = -v_i g_x\\&2) v_a(g_m + C_\pi s) - v_o(g_m + C_\pi s) = 0\end{aligned} \tag{5-37}$$

或者

$$\begin{bmatrix} -\left[g_x + g_\pi + (C_\pi + C_\mu)s\right] & g_\pi + C_\pi s \\ g_m + C_\pi s & -(g_m + C_\pi s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_a \\ v_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -v_i g_x \\ 0 \end{Bmatrix}$$

使用克莱姆法则（参见第16章）求解电压传递函数v_o/v_i，得到

$$v_o = \frac{\det\begin{bmatrix} -\left[g_x + g_\pi + (C_\pi + C_\mu)s\right] & -v_i g_x \\ g_m + C_\pi s & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} -\left[g_x + g_\pi + (C_\pi + C_\mu)s\right] & g_\pi + C_\pi s \\ g_m + C_\pi s & -(g_m + C_\pi s) \end{bmatrix}} \tag{5-38}$$

那么，v_o/v_i为

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} \approx \frac{\dfrac{C_\pi}{g_m}s + 1}{\dfrac{r_x C_\pi C_\mu}{g_m}s^2 + \left[r_x C_\mu + \dfrac{C_\pi}{g_m}\right]s + 1} \tag{5-39}$$

注意，分母完全满足式（5-40）的形式

$$(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) = \tau_1 \tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1 \tag{5-40}$$

因此，两个极点位于

$$\begin{aligned}\omega_{p1} &= -\frac{1}{\tau_1} = -\frac{g_m}{C_\pi} = -1.95 \times 10^9 \text{ rad/s}\\\omega_{p2} &= -\frac{1}{\tau_2} = -\frac{1}{r_x C_\mu} = -5 \times 10^9 \text{ rad/s}\end{aligned} \tag{5-41}$$

可以看到在频率C_π/g_m处也存在一个零点，在这个简化模型中，该零点准确地对消了$-\omega_{p1}$处的极点。因此，该电路的带宽为

$$\begin{aligned}\omega_h &\approx -\omega_{p2} = 5 \times 10^9 \text{ rad/s}\\f_h &\approx \frac{\omega_h}{2\pi} = 795 \text{ MHz}\end{aligned} \tag{5-42}$$

这个计算结果与SPICE的仿真结果非常接近。事实上，极点和零点并没有完全对消。这是因为g_π与g_m相比，我们忽略掉了g_π造成的假象。该模型预测的带宽超过了晶体管的电流增益−带宽积f_T，因此也必须以较粗的粒度看待前面的计算结果。

射随器的增益和带宽的SPICE仿真结果如图5-15所示。结果表明，电路的增益为1（与预期一致），−3dB带宽约为800MHz。

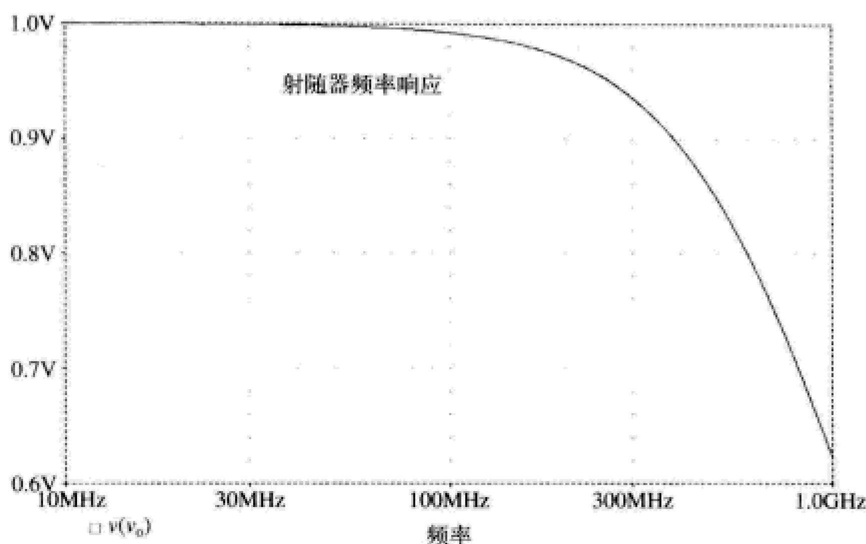


图5-15　射随器的SPICE仿真结果。带宽约为800MHz

5.2.3　差分放大器

晶体管差分放大器（differential amplifier）（如图5-16所示）是普遍存在的电路模组，常用作运算放大器的前级电路。差分放大器用来放大两个输入信号之间的差模成分，同时抑制两个输入信号的直流共模分量[①]。

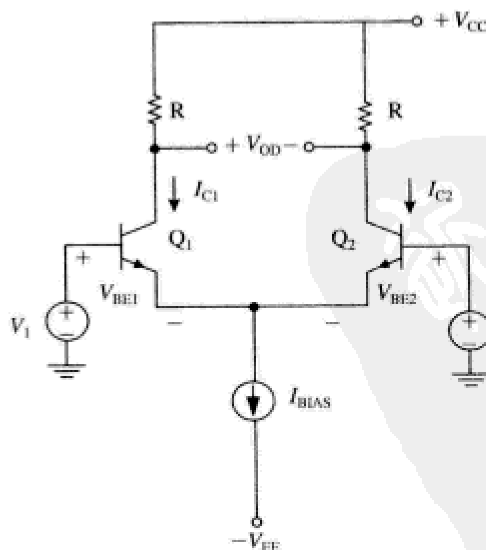


图5-16　理想晶体管差分放大器。注意差分输入电压V_{id}为V_1和V_2之间的差异成分，即$V_{id}=V_1-V_2$

如果列出图5-16所示电路的电压源和基极－射极结的KVL方程，可以得到

$$-V_1+V_{BE1}-V_{BE2}+V_2=0 \tag{5-43}$$

① 换一种方式来说就是，差分放大器设计为高差模增益以及非常低的共模增益。

从理想晶体管关系式以及$V_{BE} \gg kT/q$（室温时约为26mV），可以得到

$$I_{C1} \approx I_s e^{\frac{qV_{BE1}}{kT}} \Rightarrow V_{BE1} \approx \frac{kT}{q} \ln\left[\frac{I_{C1}}{I_s}\right]$$
$$I_{C2} \approx I_s e^{\frac{qV_{BE2}}{kT}} \Rightarrow V_{BE2} \approx \frac{kT}{q} \ln\left[\frac{I_{C2}}{I_s}\right] \quad (5\text{-}44)$$

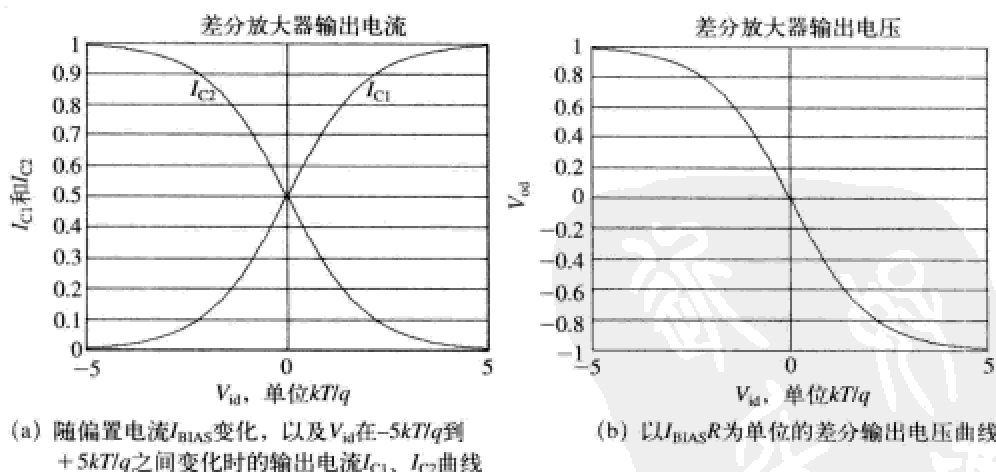
将上述结果方程组合为一个方程，可以得到两个集电极电流的比值，即

$$\frac{I_{C1}}{I_{C2}} = e^{\frac{q(V_1 - V_2)}{kT}} = e^{\frac{qV_{id}}{kT}} \quad (5\text{-}45)$$

我们定义差分输入电压为两个输入端的电压之差，即$V_{id} = V_1 - V_2$。那么，如果$\beta_F \gg 1$，则每个晶体管的$I_E \approx I_C$，并且$I_{C1} + I_{C2} \approx I_{BIAS}$，可以写出下列近似式

$$I_{C2} \approx \frac{I_{BIAS}}{1 + e^{\frac{qV_{id}}{kT}}}$$
$$I_{C2} \approx \frac{I_{BIAS}}{1 + e^{\frac{qV_{id}}{kT}}} \quad (5\text{-}46)$$

指数项意味着I_{C1}和I_{C2}赖以变化的V_{id}的范围只有几个kT/q。认识到V_{od}是两晶体管集电极电压之间的差值，我们也可以求解差分输出电压V_{od}了。如图5-17b所示，这里暗含这样的假设——负载电阻R足够小，以保证晶体管Q_1、Q_2不饱和。近似线性放大的电压范围发生在$|V_{id}|<25mV$的量级上。可以看到，差分输出电压只依赖差分输入电压V_{id}，而与诸如偏置电流水平I_{BIAS}或者供电电源电压V_{CC}等其他设计参数无关。这是全差分放大器电路的优点之一。



(a) 随偏置电流I_{BIAS}变化，以及V_{id}在$-5kT/q$到$+5kT/q$之间变化时的输出电流I_{C1}、I_{C2}曲线

(b) 以$I_{BIAS}R$为单位的差分输出电压曲线

图5-17 理想晶体管差分放大器输出曲线

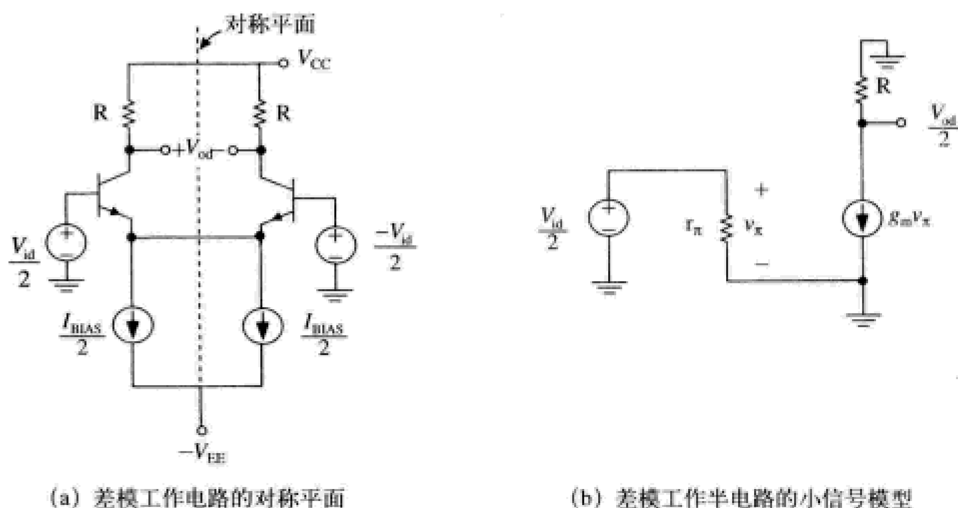
为了分析差分放大器的差分增益，我们利用了半电路（half-circuit）技术。假设当晶体管Q_1、Q_2都偏置导通时，电路工作在一个特定模式，$V_1 - V_2$是非常小的电压信号，低于几个kT/q。在该模式下，差分输入电压足够小，以使两个晶体管携带大致相同的电流（也就是说大约$I_{BIAS}/2$）。工作在差分模式时，若输入电压V_1上升，则V_2下降，反之亦然。因此，差模工作过程中，耦合晶体管对的发射极保持在增长接地状态。因此，我们可以独立地分析左侧的半电路和右侧的半电路。差模有效电路如图5-18a所示①。因为电路工作在差分模式时，对称平面

① 为了进一步演示电路的对称性，我们将偏置设置发生器拆分为两个相等的电流源$I_{BIAS}/2$。

的电压保持不变，所以我们可以将对称平面接地，形成对差模工作有效的增长电路[①]，如图5-18b所示。从该电路出发，可以求解得到差分放大器的差模增长增益（$A_{V,DM}$），即

$$\frac{v_{od}}{v_{id}} = A_{V,DM} = -g_m R$$

$$g_m = \frac{I_{BIAS}}{2V_T} = \frac{I_{BIAS}}{2\left(\frac{kT}{q}\right)} \tag{5-47}$$



（a）差模工作电路的对称平面　　　（b）差模工作半电路的小信号模型

图5-18　差模工作演示电路

实际差分放大器有一个重要的寄生元件，那就是电流源的有限增长输出电阻。如图5-19a所示，可以看到电流源I_{BIAS}具有有限的输出电阻R_{CS}。我们还将看到这个有限阻值电阻对放大器抑制共模信号的影响程度有多么严重。共模信号（common-mode signal）是指两个输入信号中的相同部分，如图5-19b所示。相同的输入电压v_{ic}施加到两个晶体管的输入端。注意，在该图中，我们重绘了电路，并且标注出了对称平面。

这里，我们又一次利用对称性特征来简化电路的分析过程。可以看到，相同的输入电压施加到了两个晶体管的基极端，电路对称。因此，没有电流跨越对称平面（也就是说电流$i_x=0$）。因此，我们可以自由地从对称平面把电路剪切开来。这就形成了图5-19c所示的小信号模型。

利用图5-19c，忽略繁杂的数学计算过程，我们可以解得共模增益$A_{V,CM}$为[②]

---

① 为了简化计算，我们假设基极扩展电阻$r_x=0$。

② 我们可以利用前面计算射随器输入电阻的工作来求解这个结果。晶体管基极端的输入电阻为

$$r_\pi + (1+h_{fe})(2R_{CS})$$

现在，我们可以解得v_π

$$v_\pi = \frac{r_\pi}{r_\pi + (1+h_{fe})(2R_{CS})}$$

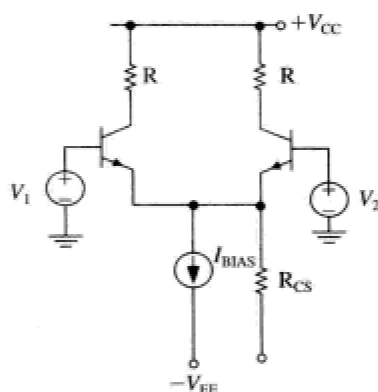
下面，我们求解共模增益

$$\frac{v_{oc}}{v_{ic}} = \frac{-g_m R r_\pi}{r_\pi + (1+h_{fe})(2R_{CS})} = \frac{-g_m R}{1+\frac{(1+h_{fe})}{r_\pi}(2R_{CS})} \approx \frac{-g_m R}{1+2g_m R_{CS}}$$

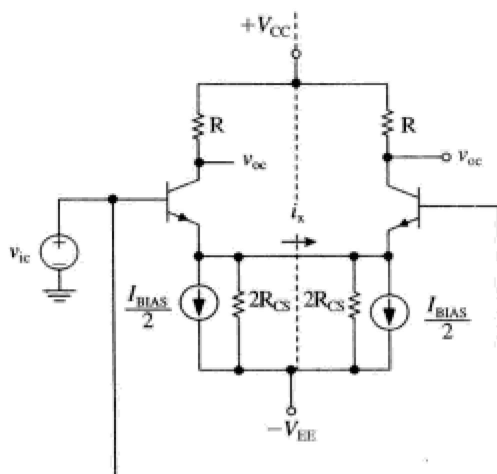
$$\frac{v_{oc}}{v_{ic}} = A_{V,CM} = -(g_m R)\left(\frac{1}{1+2g_m R_{CS}}\right)$$
$$g_m = \frac{I_{BIAS}}{2V_T} \tag{5-48}$$

差分放大器的一个非常有意义的重要指标是差模增益和共模增益的比值。对于差分放大器来说，我们希望其有非常高的差模增益和非常低的共模增益（理想情况为零）。差分放大器的共模抑制比（common mode rejection ratio，CMRR）定义为

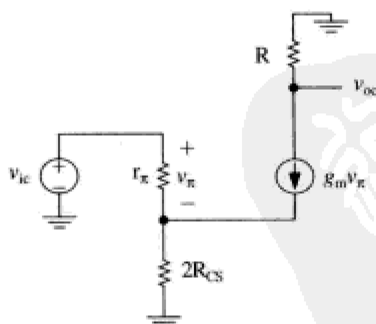
$$CMRR = \frac{|A_{V,CM}|}{|A_{V,CM}|} = 1 + 2g_m R_{CS} \tag{5-49}$$



（a）具有有限输出电阻R_{CS}的偏置电流源



（b）重绘电路标注出共模对称平面



（c）共模分析有效电路

图5-19 标注影响共模增益寄生元件的差分放大器

因此，为了得到高的CMRR，我们需要使用具有高输出电阻的电流源对差分晶体管对进行直流偏置设置。

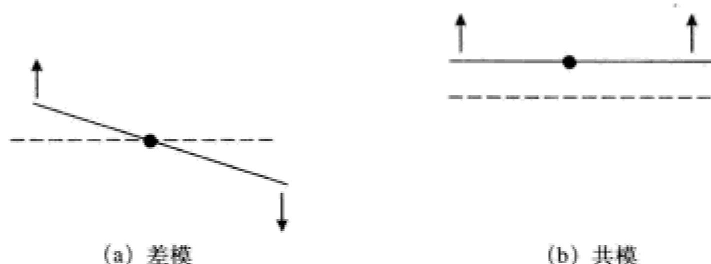
便于理解差模和共模工作的类比方法

一个简单的机械类比过程（如图5-20所示）可以帮助演示差分放大器的差模和共模工作过程[①]。假设我们有一个跷跷板（teetor-totter），它的两个端点的运动可以类比为差分放大器两个输入端的电压驱动电平。差模工作时（如图5-20a所示），跷跷板的中心固定，一端上升

① 感谢W.P.I.的John McNeill教授，他在本科生的IC设计课程中使用了该类比方法。

一定高度，另一端则下降相同的高度。跷跷板两个端点的运动与差分放大器差模工作时两个输入端的信号变化是相似的。

共模工作时（如图5-20b所示），允许跷跷板的中心上下运动，两端同时向下或者向上运动同样的距离。这与差分放大器受共模电压驱动时的共模工作模式类似。



(a) 差模　　(b) 共模

图5-20　差模和共模工作的跷跷板类比

例题5.3：峰化放大器

如图5-21a所示是电感性负载的峰化放大器。假设晶体管具有下列参数：

- $\omega_T = 2\pi \times 800 \times 10^6$rad/s
- 小信号电流增益$h_{fe} = 100$
- 集电极－基极结电容$C_\mu = 0.7$pF
- 基极扩展电阻r_x约为0②

正如我们在前面已经看到的，受C_π和C_μ的带宽限制效应的影响，共射极放大器的增益在某一有限频率点开始滚降。抵消这种带宽限制的一种方法是将一个电感与负载电阻串联在一起，使高频段的负载阻抗增大。利用该技术可以扩展放大器的带宽。

放大器的小信号模型如图5-21b所示，假设工作在足够高的频率点，这时发射极的旁路电容起短路作用。如果我们假设r_x非常小，可以将小信号电路进一步简化为图5-21c所示的电路。小信号参数为

$$\begin{aligned} g_m &= \frac{|I_C|}{V_{TH}} = \frac{5\,\text{mA}}{26\,\text{mA}} = 0.19\,\text{A/V} \\ r_\pi &= \frac{h_{fe}}{g_m} = \frac{100}{0.19} = 526\Omega \\ C_\pi &= \frac{g_m}{\omega_T} - C_\mu = \frac{0.19}{(2\pi \times 800 \times 10^6)} - 0.7\,\text{pF} = 37\,\text{pF} \end{aligned} \tag{5-50}$$

利用该小信号模型，可以解得中间带增益为

$$A_v = -g_m R_L = -190 \tag{5-51}$$

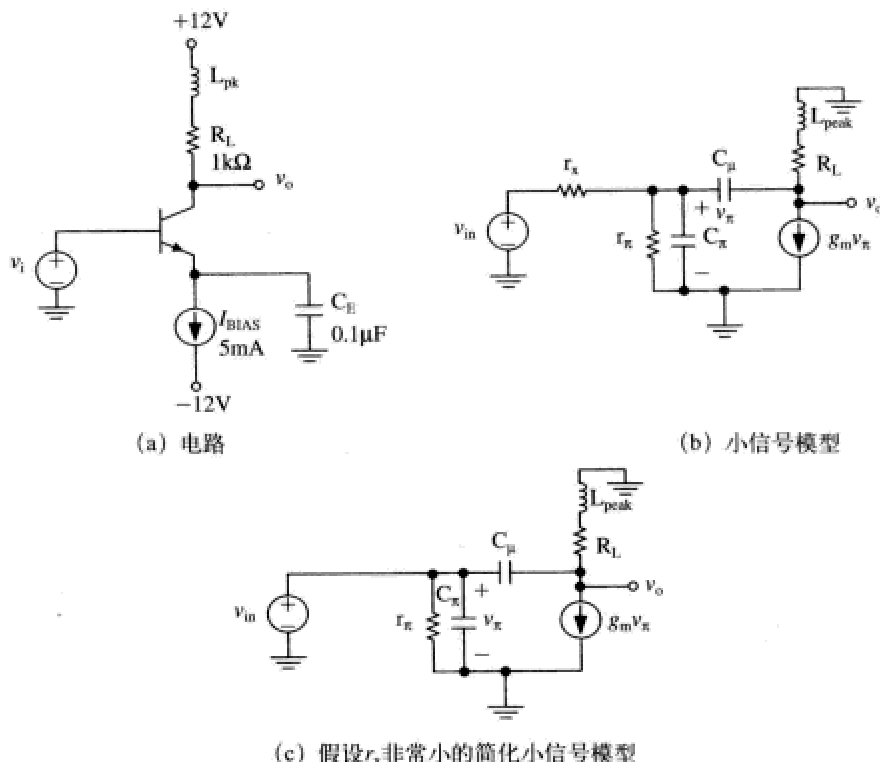
利用如图5-21c所示的小信号电路，可以使用节点方程求解该放大器的整体增益。我们对节点v_o处的电流求和，得

$$(v_i - v_o)C_\mu s - g_m v_i - \frac{v_o}{R_L + L_{pk}s} = 0 \tag{5-52}$$

求解输入–输出传递函数，得

② 忽略r_x形成相对容易理解的数学结果。在稍后的章节（第7章）中我们将会看到，r_x经常是低源电阻电路的主要带宽限制因素。因此，忽略r_x要冒一定的危险。

$$\frac{v_o}{v_i}=-g_m R_L \frac{\left(1+\frac{L_{pk}}{R_L}s\right)\left(1-\frac{C_\mu}{g_m}s\right)}{L_{pk}C_\mu s^2+R_L C_\mu s+1}\approx -g_m R_L \frac{\left(1+\frac{L_{pk}}{R_L}s\right)}{L_{pk}C_\mu s^2+R_L C_\mu s+1} \quad (5\text{-}53)$$



(a) 电路

(b) 小信号模型

(c) 假设r_x非常小的简化小信号模型

图5-21 电感性负载峰化放大器

如果电感$L_{pk}=0$，该传递函数预计放大器的带宽为$1/(R_L C_\mu)$，即$2\pi\times227\times10^6$rad/s。这与PSPICE的仿真结果（如图5-22所示）一致，结果曲线还显示出放大器的中间带增益为−190。如果电感$L_{pk}=0.25\mu$H，则−3dB带宽扩展到大致390MHz，不过出现了少许的增益尖峰[①]。随着电感L_{pk}的取值逐渐增大，放大器的响应变得更加尖峰化，如图5-22中的曲线所示。

5.3 本章习题

习题5.1

对于图5-4所示的电路，如果V_{BE}从0.6V变化到0.8V，求解集电极电流的变化。假设电流增益保持固定不变$\beta_F=100$。

习题5.2

对于图5-23所示的电路，计算其偏置工作点的下列参数：

(a) I_{C1}

(b) I_{C2}

(c) V_{E1}

① 相似电路的详细数学分析参见Tom Lee的著作*The design of CMOS Radio-Frequency Circuits*，pp.178-184。

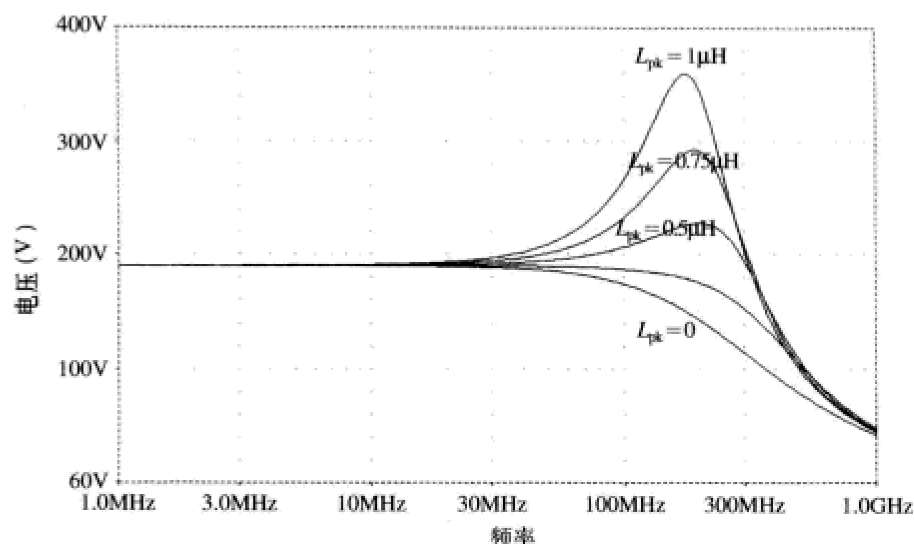


图5-22　电感性负载峰化放大器的SPICE分析。电感$L_{pk}=0$、0.25μH、0.5μH……1.0μH时的增益曲线

（d）V_{E2}

始终假设$V_{BE}=0.7V$，$\beta_F=100$。

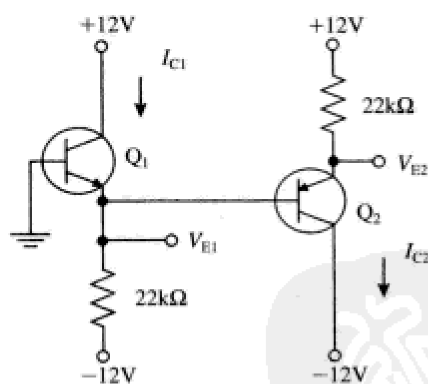


图5-23　习题5.2的晶体管电路

习题5.3

如图5-24所示的射随器电路，其发射极电流偏置设置为固定值1mA。利用PSPICE工具，求解环境温度从25°C上升到75°C时晶体管的基极－射极结电压V_{BE}的变化。

习题5.4

利用合理的工程近似处理方法，计算图5-25所示的晶体管放大器的偏置工作点参数I_C和V_{CE}。

习题5.5

（a）利用增长模型计算图5-25所示的晶体管放大器的中间带增益v_o/v_{in}。中间带是一段频率范围，其上限频率非常高以致于C_C和C_E的行为就像短路电路，其下限频率非常低

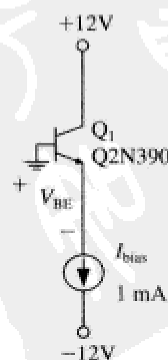


图5-24　习题5.3的电路

以致于晶体管的内部电容几乎没有什么影响。

（b）利用单极点近似方法（米勒近似），计算–3dB高频带宽f_H（以Hz为单位）。

（c）描绘v_o/v_{in}幅度响应的伯德图，不要计算其低频断点，它和耦合旁路电容C_C与C_E有关（稍后会更详细讲述）。以Hz为单位描绘f_h。

（d）利用SPICE进行电路仿真，并与计算结果进行比较。在SPICE仿真计算中，不要使用SPICE的晶体管2N3904模型，相反，直接输入上面推导出来的混合π模型。

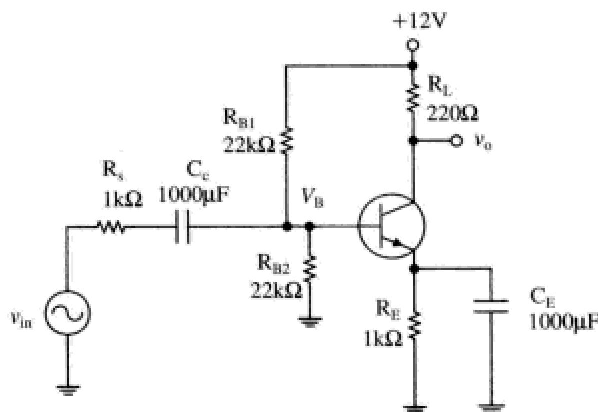


图5-25 带有偏置设置网络的共发射极放大器

习题5.6

对于图5-26所示的晶体管电路，计算：

（a）工作点的电流I_C和电压V_{out}的直流值。

（b）小信号参数r_π和g_m。

（c）假设C_{in}短路，画出中频小信号模型。假设信号频率足够低以使晶体管内部电容不会造成影响。

（d）计算从基极端电容看进去的交流输入电阻（假设电容C_{in}在信号频率段上的行为特性可以视为短路）。

（e）求解交流电压增益$A_v=|v_{out}/v_{in}|$（又一次假设电容C_{in}短路）。（提示：利用（d）的结果以大大简化本步的计算过程是一条捷径。）

（f）计算A_v的低频断点。（提示：因为电容C_{in}的作用，直流时，该电路的增益为零。高频时，增益就是（e）步的计算结果。断点就是增益从最大值下降3dB的频率点）。利用（c）步的结果来求解该步。

（g）描绘（但是不计算高频断点）增益随频率变化的伯德图（只描绘幅度图）。

贯穿全题进行合理的近似，并且证明近似的合理性。

习题5.7

对于图5-27所示的晶体管电路：

（a）以晶体管2N2222数据手册的信息为依据，采用集电极电流的封闭式计算方法，分别估计–55°C、25°C和125°C时的集电极电流。假设25°C时$V_{BE}=0.7$V，晶体管基极－射极结电压V_{BE}的温度系数为–2mV/°C。

（b）利用PSPICE工具分别对三个环境温度点进行仿真。说明PSPICE仿真结果与（a）步计算结果的良好匹配程度。同时，说明该电路的直流偏置稳定性，以及如何提高电路的直流

偏置稳定性。

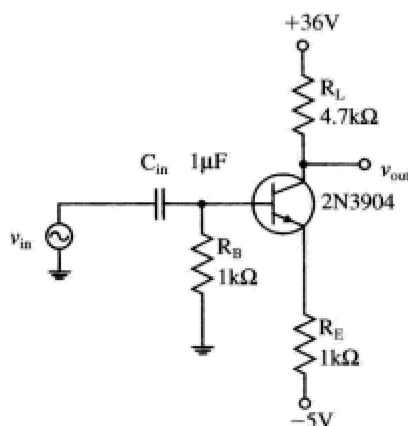


图5-26 习题5.6的电路

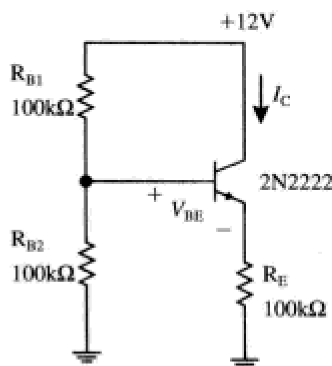


图5-27 习题5.7的电路

习题5.8

对于图5-28所示的电路，假设$r_x=20\Omega$，$V_{BE}=0.7V$。

（a）利用晶体管2N2222的数据手册，求解直流电流增益h_{FE}和小信号电流增益h_{fe}的合理取值。

（b）求解集电极电流I_C和基极电流I_B。

（c）求解小信号参数g_m和r_π。

（d）绘制低频增长电路模型。

习题5.9

图5-29所示电路的晶体管2N3904，受上面计算的V_{BE}和β_F相关性的影响，集电极电流随温度变化。

（a）分别计算25°C、50°C和75°C时工作点的集电极电流I_C和基极−发射极电压V_{BE}。可以假设$T_A=25°C$时，$V_{BE}=725mV$。假设电流固定时，晶体管V_{BE}的温度依赖性大致为−2.2mV/°C，β_F的温度依赖性在+7000PPM/°C附近。

（b）现在，利用SPICE进行电路仿真，并且与（a）步的计算值进行比较。你能得出与该电路的相对偏置稳定性有关的任何假设吗？

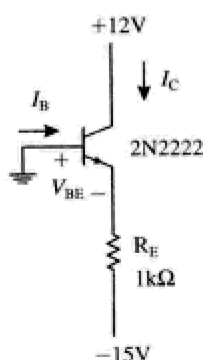


图5-28 利用2N2222搭建的NPN型晶体管电路

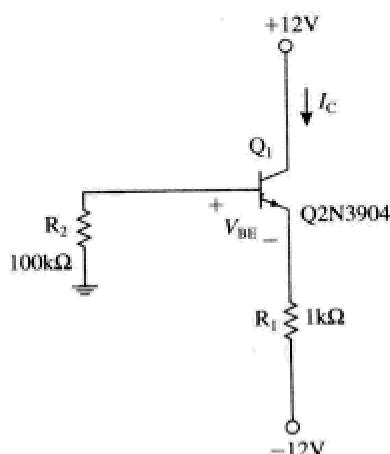


图5-29 习题5.9的晶体管电路

5.4 参考文献

Chuang, C. T., "Analysis of the settling behavior of an operational amplifier," *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. 17, no. 1, Feb. 1982, pp. 74-80.

Filipkowski, A., "Poles and zeros in transistor amplifiers introduced by Miller effect" *IEEE Transactions on Education*, vol. 42, no. 4, Nov. 1999, pp. 349-351.

Gilbert, Barrie, "All You Ever Need to Know About Bandgaps," lecture, November 16, 1978.

Gray, Paul E., and Searle, Campbell L., *Electronic Principles Physics, Models and Circuits*, JohnWiley, 1969.

Gray, Paul R., and Meyer, Robert G., *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, 2d edition, JohnWiley, 1984.

Knapp, Ron, "Selection criteria assist in choice of optimum reference," *EDN*, February 18, 1988, pp.183-192.

______, "Back-to-basics approach yields stable references," EDN, June 9, 1988, pp. 193-198.

Detailed description of bandgap and Zener voltage references.

Lee, Thomas H., *The Design of CMOS Radio-Frequency Integrated Circuits*, Cambridge University Press, 1998.

Lindmayer, J., and North, W., "The Inductive Effect in Transistors " *Solid-State Electronics*, vol.8,1965, pp. 409-415.

Mercer, M. J., and Bums, S. G., "High-frequency broadband amplifier ASIC design optimi-zation using pole-zero compensation techniques," *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, May 1-3, 1990, pp. 3225-3229.

Middlebrook, R. D., "Low-entropy expressions: the key to design-oriented analysis," *Proceedings of the Twenty-First Annual Conference "Engineering Education in a New World Order,"* September 21-24, 1991, pp. 399-403.

Miller, John M., "Dependence of the input impedance of a three-electrode vacuum tube upon the load on the plate circuit," *Scientific Papers of the Bureau of Standards*, vol. 15, no. 351,pp.367-385, 1920.

Muller, Richard S., and Kamins, Theodore I., *Device Electronics for Integrated Circuits*, 2d edition, John Wiley, 1986.

Neudeck, Gerold W., *Modular Series on Solid State Devices, The Bipolar Junction Transistor*, Addison-Wesley, 1983.

Pease, Bob, "The Design of Band-Gap Reference Circuits: Trials and Tribulations," *IEEE Proceedings of the 1990 Bipolar Circuits and Technology Meeting*, September 17-18, 1990, Minneapolis, Minnesota.

Rincón-Mora, Gabriel Alfonso, *Voltage References*, IEEE, 2002.

Searle, C. L., Boothroyd, A. R., Angelo, E. J., Jr., Gray, P. E., and Peterson, D. O., *Elementary Circuit Properties of Transistors*, (SEEC Volume 3), John Wiley, 1964.

Sze, S. M., *Physics of Semiconductor Devices*, 2d edition, John Wiley, 1981.

Thornpson, Marc T., "Design Linear Circuits Using OCTC Calculations," *Electronic Design (Special Analog Issue)* June 24, 1993, pp. 41-47.

______, "SCTC Analysis Estimates Low-Frequency —3-dB Point," *Electronic Design*, October 1, 1993,pp.65-68.

______, "Network Tricks Aid in OCTC," *Electronic Design*, December 16, 1993, pp. 67-70.

______, "Tips for Designing High-Gain Amplifiers," *Electronic Design*, May 16, 1994, pp. 83-90.

Thornton, R. D., DeWitt, D., Chenette, E. R., and Gray, P. E., *Characteristics and Limitations of Transistors*, (SEEC Vol. 4), John Wiley, 1966.

Thornton, R. D., Searle, C. L., Pederson, D. O., Adier, R. B., and Angelo, E. J., Jr., *Multistage Transistor Circuits* (SEEC Vol. 5), John Wiley, 1965.

Widlar, Robert J., "New Developments in IC Voltage Regulators," *IEEE Journal of Solid- State Circuits*, vol. SC-6, no. 1, February 1971, pp. 2-7.

______, "An Exact Expression for the Thermal Variation of the Emitter Base Voltage of Bi-Polar Transistors," *Proceedings of the IEEE*, January 1967, pp. 96-97.（Widlar是美国国家半导体公司的参考二极管LM113的发明者，该二极管是一款单片带隙电压参考芯片，于1971年问世。）

Wing-Hung, Ki, Der, L., and Lam, S., "Re-examination of pole splitting of a generic single stage amplifier", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 44, no. 1, Jan 1997.

Yahya, C. B., "Design of wideband low noise transimpedance amplifiers for optical communications," *Proceedings of the 43rd IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems*, August 8-11, 2000, pp. 804-80.

第6章　开路时间常数方法与带宽估计技术

本章概要

- 利用PSPICE或者其他电路仿真工具可以确定晶体管放大器的增益和带宽，就此而言，也适用于由集总元件和受控源（dependent source）组成的任何电路。不过，尽管PSPICE是非常有用的电路分析工具，但是它既不能完全洞彻，也不能直观认识放大器设计。本章讲述估计晶体管放大器带宽的“back of the envelope[①]”技术。本章以双极性晶体管放大器为例来讲述这些技术，不过，它们也适用于CMOS放大器。

6.1　时间常数介绍

开路时间常数（open-circuit time constant，OCTC）方法是强大的近似电路分析工具，适用于电阻、电容以及受控源电路的–3dB高频带宽估计。该方法是由MIT的R.B.Adler及其同仁提出并逐渐形成的[②]。它是分析电路的带宽限制根本因素的一款很有价值的设计工具。这项技术的有效性在于它证实了放大器内部的局部带宽限制特性。

下面是开路时间常数方法的简短数学讨论，该方法适用于许多不同的放大器拓扑结构。并对开路时间常数方法的近似结果与闭式方法的精确计算答案、SPICE工具的仿真结果进行了比较。

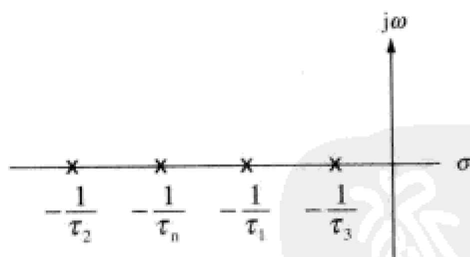


图6-1　具有n个负实轴极点的电路系统

首先，我们来考虑有n个实轴极点的电路系统（如图6-1所示）。该系统的电路传递函数为

$$H(s)=\frac{1}{(\tau_{1s}+1)(\tau_{2s}+1)\cdots(\tau_{ns}+1)} \tag{6-1}$$

将传递函数的分母相乘展开，得

$$H(s)=\frac{1}{(\tau_1\tau_2\cdots\tau_n)s^n+\cdots+(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n)s+1} \tag{6-2}$$

我们可以看到，s的一次项的系数为所有极点位置的倒数之和。更为简单的情况是只有两

① 原意指在信封背面打草稿完成的计算、引申意思为不需进行复杂计算，快速准确估算出结果的方法。是介于猜测和铁证之间的一个概念，常用于数学、物理学以及工程领域。——编者注

② 参见半导体电子教育委员会主编的*Multistage Transistor Circuits*第5卷，由Thornton、Searle、Pederson、Adler和Angelo编写。

个负实轴极点的电路系统，其传递函数为

$$H(s)=\frac{1}{\tau_1\tau_2 s^2+(\tau_1+\tau_2)s+1} \tag{6-3}$$

使用开路时间常数方法时，我们要丢弃s的高次项。开路时间常数方法将二阶传递函数近似处理为

$$H(s)\approx\frac{1}{(\tau_1+\tau_2)s+1} \tag{6-4}$$

基于开路时间常数方法的带宽估计结果为

$$\omega_h\approx\frac{1}{(\tau_1+\tau_2)} \tag{6-5}$$

那么，这个近似关系式什么时候成立？与分母中s的一次项相比，我们忽略了s的平方项，或者说

$$\left|\tau_1\tau_2\omega^2\right| \ll \left|(\tau_1+\tau_2)\omega\right| \tag{6-6}$$

即，当

$$\omega \ll \frac{(\tau_1+\tau_2)}{\tau_1\tau_2} \ll \frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2} \tag{6-7}$$

时，式(6-6)所示的近似关系式成立。

假设这个二阶系统有一个高频极点（ω_h）和一个低频极点（ω_l），分别为

$$\omega_l=\frac{1}{\tau_1}$$
$$\omega_h=\frac{1}{\tau_2} \tag{6-8}$$

该近似式表明，只有在远低于高频极点的频率范围内，我们的估计才是有效的。如果放大器的输出响应受低频极点ω_l控制，那么该近似式就是确实有效的。

这个估计结果的准确程度又如何呢？我们来观察一下二阶系统的传递函数

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{-\tau_1\tau_2\omega^2+\cdots+(\tau_1+\tau_2)(\mathrm{j}\omega)+1} \tag{6-9}$$

假设极点的时间常数之和$\tau_1+\tau_2$为1s。因此，我们对该放大器的–3dB带宽的估计结果为1rad/s。使用$\omega_{h,est}$来表示–3dB带宽的估计结果，并重写二阶系统的传递函数

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{-\tau_1\tau_2\omega_{h,est}{}^2+\cdots+(\tau_1+\tau_2)(\mathrm{j}\omega_{h,est})+1} \tag{6-10}$$

忽略掉分母多项式中ω的平方项是否正确呢？因为我们的估计带宽为$\omega_{h,est}=1$rad/s，因此ω的一次项的幅度为1。ω平方项的最大值仅为0.25。因此，该近似式在估计带宽时是正确的。

相似地，我们可以估计，具有n个极点的更高阶系统的带宽为极点时间常数τ_{pn}之和的倒数。

$$H(s)\approx\frac{1}{(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n)s+1}$$
$$\omega_h\approx\frac{1}{(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n)}=\frac{1}{\sum_1^n\tau_{pn}} \tag{6-11}$$

那么，如何来求解极点时间常数（$\tau_1+\tau_2+\cdots\tau_n$）的和呢？Adler在MIT的证明表明，极点时间常数之和与开路时间常数之和完全相等。开路时间常数之和为[①]

① 各个极点的时间常数与其开路时间常数是不相同的。但是，极点时间常数之和却等于开路时间常数之和。

$$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=\sum_{i=1}^{n}\tau_{oi} \tag{6-12}$$

放大器的近似带宽为

$$\omega_h\approx\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\tau_{oi}} \tag{6-13}$$

该近似式经常惊人地准确，并且开路时间常数通常很容易计算，但是极点位置却常常难以计算。计算每个开路时间常数τ_{oi}时，按照下列步骤进行：

- 将电路系统中起高频带宽限制作用的所有电容进行开路处理。
- 逐个求解每个电容两个端点的电阻。
- 按照公式6-14求解每个电容的开路时间常数τ_{oi}。

$$\tau_{oi}=R_{oi}C_i \tag{6-14}$$

- 对所有开路时间常数进行求和，得到带宽估计结果。

$$\omega_h\approx\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\tau_{oi}} \tag{6-15}$$

例题6.1：基本OCTC实例

对于图6-2所示的电路，我们将利用开路时间常数方法估计其–3dB带宽，再通过数学计算和PSPICE仿真来求解其实际的–3dB带宽。

该电路有3个电容，每个电容都是带宽的限制因素之一。我们利用这三个带宽限制电容来演示开路时间常数方法的应用。

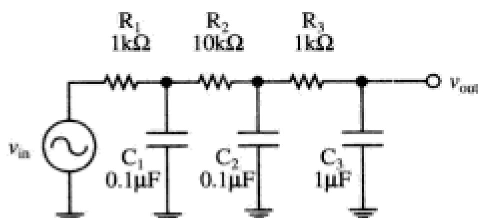


图6-2 基本开路时间常数电路实例

对于电容C_1，将电容C_2和C_3开路，来求解其两端的电阻R_{o1}（如图6-3a所示）。注意，我们也将输入电压发生器短路掉了，输入电压发生器规定为增长短路。电容C_1的开路电阻R_{o1}为1kΩ，因此电容C_1的开路时间常数τ_{o1}为0.1ms。

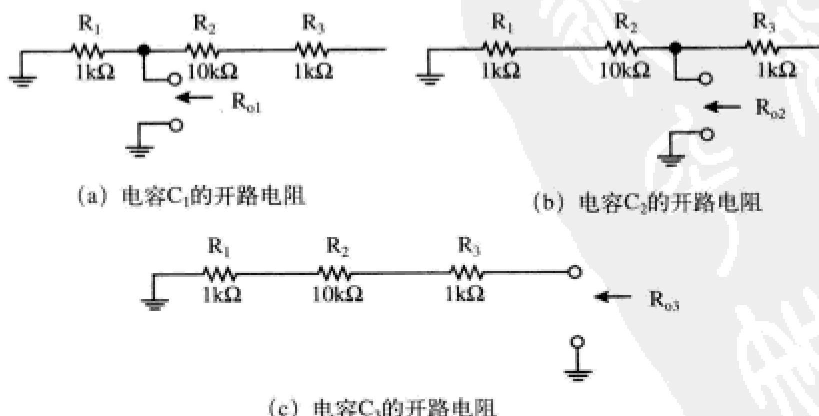


图6-3 求解每个电容开路电阻的电路

对于电容C_2和C_3，我们采用相似的处理过程，计算结果为：

- 电容C_2：开路电阻$R_{o2}=11\text{k}\Omega$，开路时间常数$\tau_{o2}=1.1\text{ms}$。

• 电容C_3：开路电阻$R_{o3}=12\text{k}\Omega$，开路时间常数$\tau_{o3}=12\text{ms}$。

该电路的带宽估计结果为

$$\sum\tau_{oc}=\tau_{o1}+\tau_{o2}+\tau_{o3}=1.32\times10^{-2}\ \text{s}$$

$$\omega_h=\frac{1}{\sum\tau_{oc}}\approx 75.75\ \text{rad/s} \tag{6-16}$$

$$f_h=\frac{\omega_h}{2\pi}\approx 12\ \text{Hz}$$

PSPICE仿真表明，该电路的–3dB带宽为$f_h\approx12\text{Hz}$（如图6-4所示）。我们也看到主要的带宽限制电容是C_3，这是有明确意义的，因为C_3比其他两个电容都大。

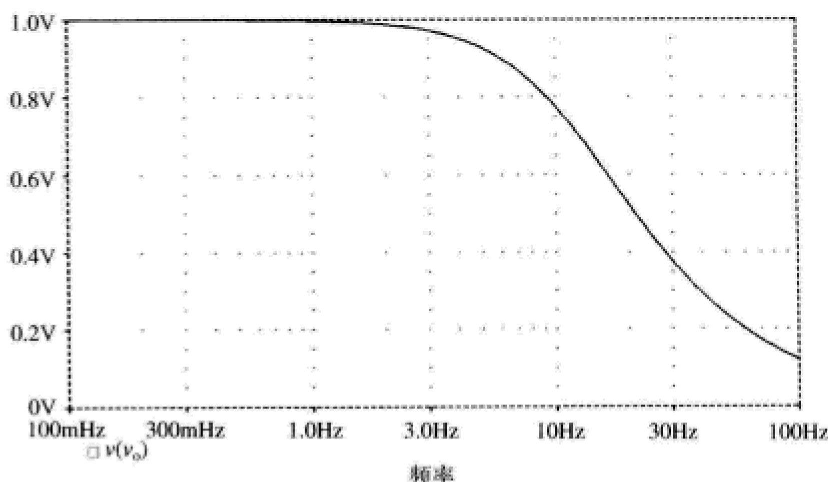


图6-4　简单RC电路的交流分析SPICE仿真结果

如果想求解极点和零点的数值结果，首先要书写电路的节点方程。该系统的矩阵形式的节点方程为

$$\begin{bmatrix}-(G_1+G_2+G_1s) & G_2 & 0\\ G_2 & -(G_2+G_3+G_2s) & G_3\\ 0 & G_3 & -(G_3+G_3s)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_{out}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-v_{in}G_1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{6-17}$$

求解极点的MATLAB脚本如下。

```
Function rcrc
% rcrc network for AC&I notes example
R1=1000; G1=1/R1;
R2=10000; G2=1/R2;
R3=1000; G3=1/R3;
C1=10^-7;
C2=10^-7;
C3=10^-6;

G=[-(G1+G2) G2 0;
   G2 -(G2+G3) G3;
   0 G3 -G3] ;
C=[-C1 0 0;
   0 -C2 0;
```

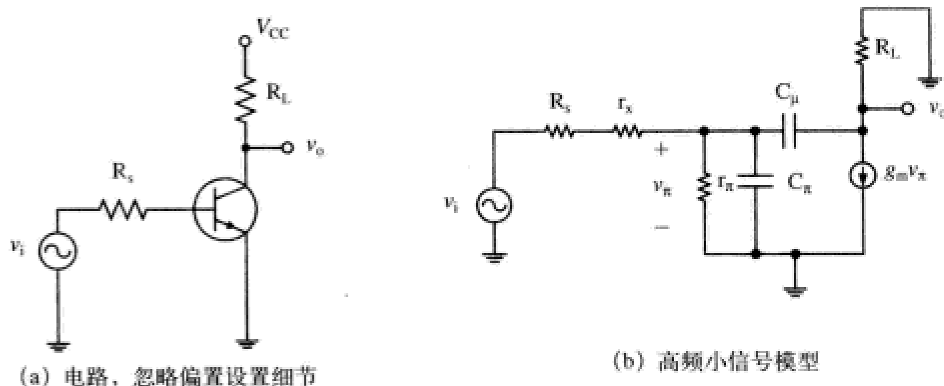
```
    0 0 -C3] ;
poles=-eig(G/C)
poles_in_Hz=poles/(2*pi)
```

MATLAB计算结果表明，主导极点位于12.2Hz处，其他两个更高频率极点位于1.65kHz和1.99kHz处。

6.2 晶体管放大器实例

例题6.2：共射极放大器

重新回顾一下前一章的共射极放大器电路（如图6-5所示），利用开路时间常数方法来估计其–3dB带宽。



（a）电路，忽略偏置设置细节

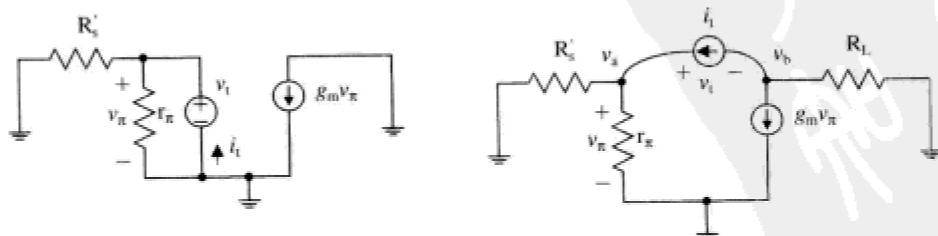
（b）高频小信号模型

图6-5 共射极放大器

假设晶体管的直流偏置设置为集电极电流2mA，小信号电流增益$h_{fe}=150$，集电极–基极的结电容$C_\mu=2\text{pF}$，得到下列小信号参数

$$
\begin{aligned}
g_m &= \frac{|I_C|}{V_{TH}} = \frac{2\,\text{mA}}{26\,\text{mV}} = 0.077\Omega^{-1} \\
r_\pi &= \frac{h_{fe}}{g_m} = \frac{150}{0.077\Omega^{-1}} = 1950\Omega \\
C_\pi &= \frac{g_m}{\omega_T} - C_\mu = \frac{0.077}{2\pi(300\times10^6)} - 2\,\text{pF} = 38.8\,\text{pF}
\end{aligned}
\tag{6-18}
$$

现在，我们利用开路时间常数方法以及图6-5的高频小信号模型来估计电路的带宽。对于电容C_π，我们增加一个测试电压源v_t，来计算测试电流i_t（如图6-6a所示）。电容C_μ开路，从电



（a）求解共射极放大器的电容C_π时间常数的电路

（b）求解共射极放大器的电容C_μ时间常数的电路

图6-6 求解开路电阻的电路

容C_π两个端点看到的开路电阻为

$$R_{o\pi}=\frac{v_t}{i_t} \tag{6-19}$$

通过检查发现，电容C_π的开路电阻为r_π与源电阻的并联组合。

$$R_{o\pi}=r_\pi \| R_s' = r_\pi \| (R_s + r_x) = 1950 \| 1100 = 703\Omega \tag{6-20}$$

结果C_π的开路时间常数为

$$\tau_{o\pi}=R_{o\pi}C_\pi=(703\Omega)(38.8\,\text{pF})=27.3\,\text{ns} \tag{6-21}$$

对于电容C_μ，使用如图6-6b所示的电路。为了得到测试电压v_t，我们求出两个相对地的节点电压v_a、v_b。因为电流源左侧的电阻恰好就是我们在前面解得的电容C_μ的开路电阻$R_{o\pi}$，所以，很容易求得电压v_a。电流源右侧的电压v_b为

$$v_b=-(i_t+g_m v_\pi)R_L=-(i_t+g_m i_t R_{o\pi})R_L \tag{6-22}$$

因此，测试电压为

$$v_t=v_a-v_b=i_t R_{o\pi}-(i_t+g_m i_t R_{o\pi})R_L \tag{6-23}$$

计算v_t/i_t，得到

$$R_{o\mu}=\frac{v_t}{i_t}=R_{o\pi}+(1+g_m R_{o\pi})R_L=5.58\times10^4\,\Omega \tag{6-24}$$

结果C_μ的开路时间常数为

$$\tau_{o\mu}=R_{o\mu}C_\mu=(5.58\times10^4\,\Omega)(2\,\text{pF})=111.7\,\text{ns} \tag{6-25}$$

开路时间常数之和为

$$\sum\tau_{oc}=\tau_{o\pi}+\tau_{o\mu}=139\,\text{ns} \tag{6-26}$$

最后得到–3dB带宽的估计结果为

$$\omega_h\approx\frac{1}{\sum\tau_{oc}}=7.19\times10^6\,\text{rad/s}$$
$$f_h\approx\frac{\omega_h}{2\pi}=1.14\,\text{MHz} \tag{6-27}$$

4种解决方法的比较（表6-1）表明，闭合形式解、单极点（米勒）近似、开路时间常数方法以及SPICE仿真（如图6-7所示）的结果具有很好的一致性。

表6-1　共射极放大器四种方法的计算结果比较表

方　　法	带 宽 计 算
闭合形式解（来自第5章）	7.2Mrad/s (1.15 MHz)
单极点（米勒）近似（来自第5章）	7.29Mrad/s (1.16 MHz)
开路时间常数	7.19Mrad/s (1.14 MHz)
SPICE仿真	7.2Mrad/s (约1.15 MHz)

利用共射极放大器的结果作为开路时间常数方法的合理性检验

现在，我们能够使用上一章的闭合形式结果作为开路时间常数方法的一种合理性检验。为了方便读者，这里将共射极放大器的闭式传递函数重复书写为

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)}=-g_m R_L \frac{G_s'}{G_s'+g_\pi}\left[\frac{1-\frac{C_\mu}{g_m}s}{\frac{R_L C_\pi C_\mu}{G_s'+g_\pi}s^2+\frac{1}{G_s'+g_\pi}[R_L(g_m+g_\pi+G_s')C_\mu+C_\pi+C_\mu]S+1}\right] \quad (6\text{-}28)$$

可以看到，s的一次项的系数为

$$\frac{1}{G_s'+g_\pi}\left[R_L(g_m+g_\pi+G_s')C_\mu+C_\pi+C_\mu\right] \quad (6\text{-}29)$$

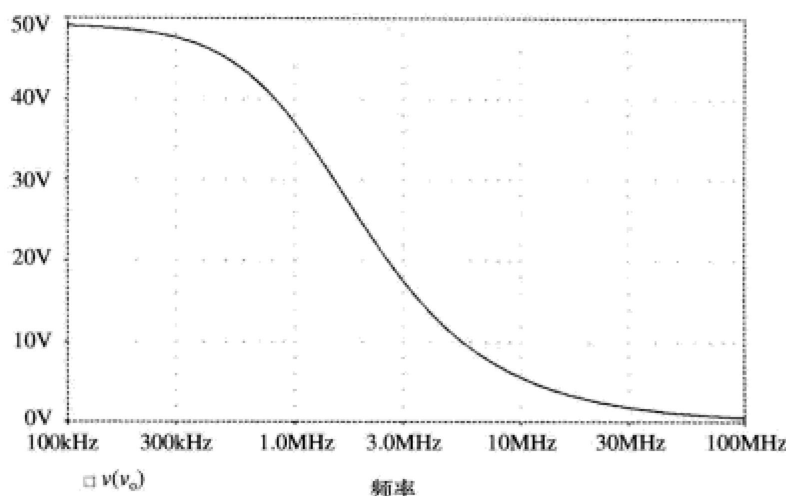


图6-7 共射极放大器的SPICE仿真结果

对s的一次项系数中的各项进行重新分组，以使我们能够直观看到分别与电容C_π和C_μ有关的项。

$$\begin{aligned}&\frac{C_\pi}{G_s'+g_\pi}+\frac{C_\mu}{G_s'+g_\pi}+\frac{1}{G_s'+g_\pi}\left[R_L(g_m+g_\pi+G_s')C_\mu\right]\\&\approx\frac{C_\pi}{G_s'+g_\pi}+\left(\frac{1+g_m R_L}{G_s'+g_\pi}\right)C_\mu+R_L C_\mu\end{aligned} \quad (6\text{-}30)$$

OCTC（开路时间常数）方法使得我们可以计算s的一次项系数，因此，OCTC的结果也应该与上面给出闭式方程的结果相同。电容C_π和C_μ各自的开路时间常数为

$$\begin{aligned}\tau_{o\pi}&=\left(r_\pi\|R_s'\right)C_\pi=\frac{C_\pi}{g_\pi+G_s'}\\\tau_{o\mu}&=\left(r_\pi\|R_s'+R_L+g_m\left(r_\pi\|R_s'\right)R_L\right)C_\mu=\left(\frac{1+g_m R_L}{G_s'+g_\pi}+R_L\right)C_\mu=\left(\frac{1+g_m R_L}{G_s'+g_\pi}\right)C_\mu+R_L C_\mu\end{aligned} \quad (6\text{-}31)$$

可以看到，正如预期的那样，这两种方法都给出了s的一次项系数的相同结果。

例题6.3：估计射随器的带宽

我们再使用开路时间常数方法来估计上一章的射随器电路（如图6-8所示）的带宽。

使用2mA电流源对射随器进行直流偏置设置，形成下列小信号参数

$$g_m = \frac{|I_C|}{V_{TH}} = \frac{2\,\text{mA}}{26\,\text{mA}} = 0.077\Omega^{-1}$$
$$r_\pi = \frac{h_{fe}}{g_m} = \frac{150}{0.077\Omega^{-1}} = 1950\Omega \tag{6-32}$$
$$C_\pi = \frac{g_m}{\omega_T} - C_\mu = \frac{0.077}{2\pi(300\times10^6)} - 2\,\text{pF} = 38.8\,\text{pF}$$

射随器电路的小信号模型如图6-9所示。

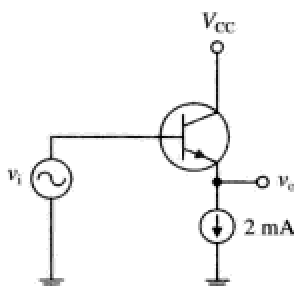


图6-8　射随器电路

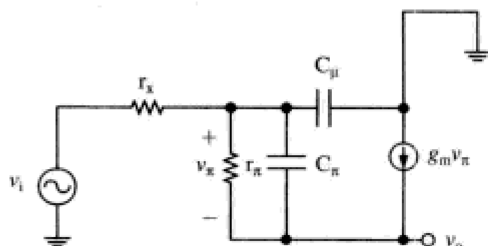


图6-9　射随器电路的小信号模型

下面，使用开路时间常数方法来估计射随器的带宽。对于电容C_π，添加测试电压源v_t，按照图6-10所示来测量其测试电流i_t。

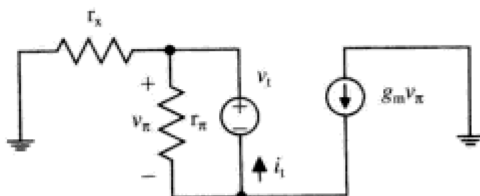


图6-10　求解射随器电路的电容C_π时间常数的电路

测试电流为

$$i_t = \frac{v_t}{r_\pi} + g_m v_t \tag{6-33}$$

因此，面向电容C_π的开路电阻为（注意$g_m \gg 1/r_\pi$）

$$R_{o\pi} = \frac{v_t}{i_t} = \frac{1}{g_m + g_\pi} \approx \frac{1}{g_m} \approx 13.07\Omega \tag{6-34}$$

结果其时间常数为

$$\tau_{o\pi} = R_{o\pi}C_\pi = (13.07\Omega)(38.8\,\text{pF}) = 0.51\,\text{ns} \tag{6-35}$$

对于电容C_μ，使用如图6-11a所示的电路。

现在，我们做个重要简化以使该分析变得更为容易。可以看到有一个包含r_π和受控源$g_m v_\pi$的电流环路。如果我们在发射极节点对电流进行求和，则有下面的等式

$$g_m v_\pi = -\frac{v_\pi}{r_\pi} \tag{6-36}$$

只有当$v_\pi = 0$时，该等式才会成立，因此，电流发生器的输出电流必然为零，从而可以将其删除，形成如图6-11b所示的简化电路。因此电容C_μ的开路电阻为

$$R_{o\mu} = r_x = 100\Omega \tag{6-37}$$

结果其时间常数为

$$\tau_{o\mu} = R_{o\mu}C_{\mu} = (100\Omega)(2\,\text{pF}) = 0.2\,\text{ns} \tag{6-38}$$

开路时间常数之和为

$$\sum \tau_{oc} = \tau_{o\pi} + \tau_{o\mu} = 0.71\,\text{ns} \tag{6-39}$$

因此，射随器–3dB带宽的估计结果为

$$\begin{aligned} \omega_h &\approx \frac{1}{\sum \tau_{oc}} = 1.41 \times 10^9\ \text{rad/s} \\ f_h &= \frac{\omega_h}{2\pi} = 224\,\text{MHz} \end{aligned} \tag{6-40}$$

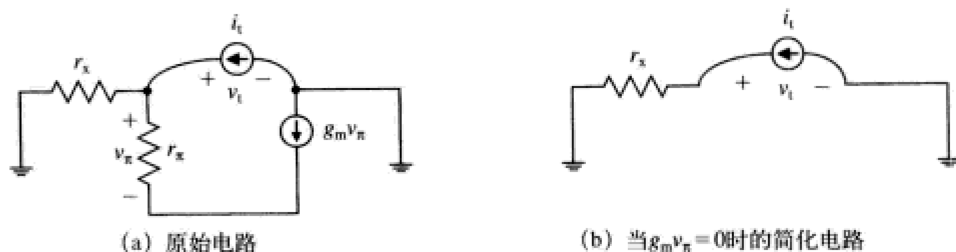


图6-11 求解射随器电路的电容C_μ时间常数的电路

增益和带宽的SPICE仿真曲线如图6-12所示。该结果表明，增益接近于单位1时的–3dB带宽近似为800MHz。这到底是怎么回事呢？

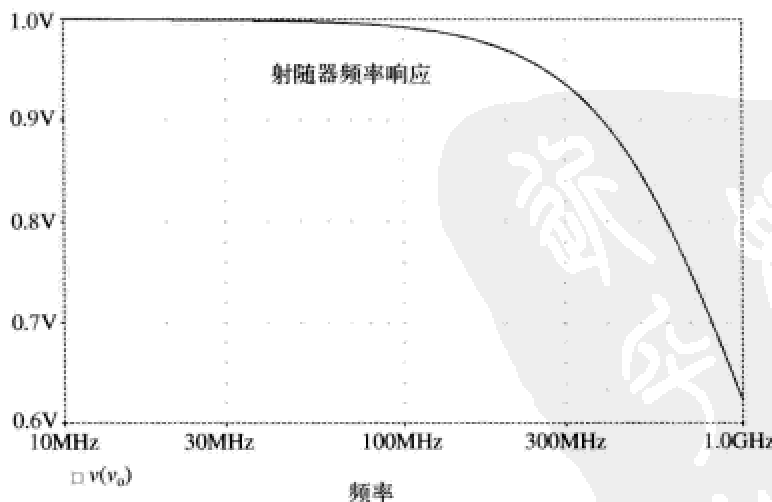


图6-12 射随器的SPICE仿真结果曲线

有必要更详细地观察上一章的闭合形式解。先前，我们求得射随器的传递函数为[①]

① 注意，射随器的开路时间常数之和等于闭式解的s一次项系数。

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)}=\frac{\dfrac{C_\pi}{g_m}s+1}{\dfrac{r_x C_\pi C_\mu}{g_m}s^2+\left[r_x C_\mu+\dfrac{C_\pi}{g_m}\right]s+1} \tag{6-41}$$

该传递函数有两个极点和一个零点，零点几乎[①]将高频极点对消掉（如图6-13所示）。开路时间常数方法无法说明这个零点的影响，因此大大低估了这种电路的带宽。

更进一步，必须对前面的仿真结果持怀疑态度，因为模型预测的带宽超过晶体管的单位电流增益-带宽乘积f_T。在使用开路时间常数方法时，必须要牢记这些告诫。

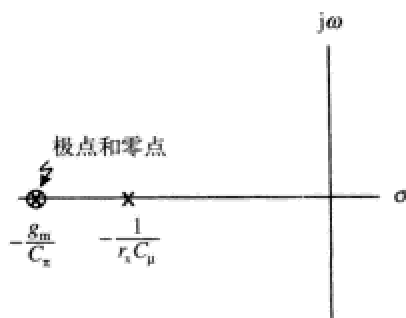


图6-13　射随器的零极点图

例题6.4：差分放大器

差分放大器如图6-14a所示，差模激励时，如图6-14b所示的小信号模型是有效的。我们可以利用这个小信号模型以及开路时间常数方法来估计该放大器的带宽。注意，差分放大器半电路的小信号模型与我们前面分析的共射极放大器相同。因此，求解开路时间常数的电路与共射极放大器也是相同的。

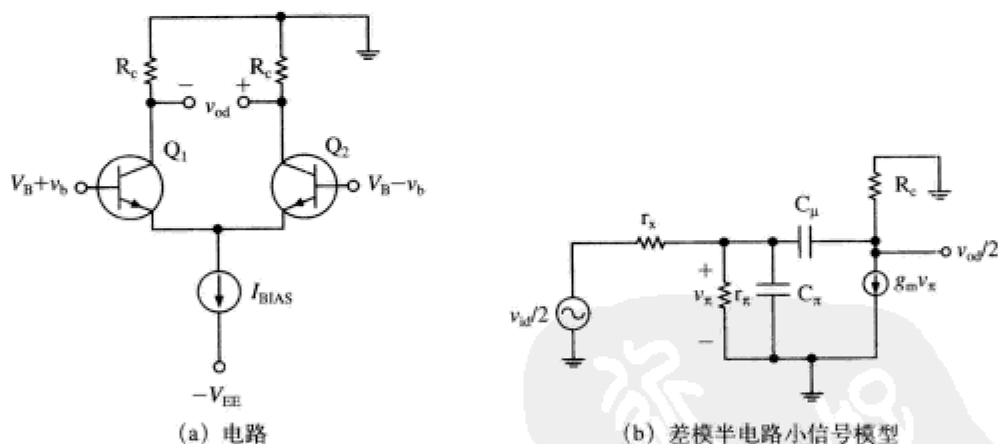


图6-14　差分放大器

我们使用下列参数来求解差分放大器的差分增益和带宽。

- $R_C=3.3\text{k}\Omega$
- $I_{BIAS}=4\text{mA}$
- $h_{fe}=100$
- $f_T=300\text{MHz}$
- $r_x=100\Omega$
- $C_\mu=1\text{pF}$

该放大器的小信号参数为

① 极点和零点几乎对消掉。在闭合形式解中我们做过一到两次近似，极点和零点不能完全对消。

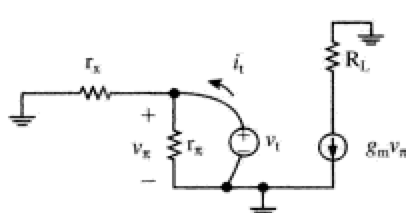
$$g_m = \frac{|I_C|}{V_{TH}} = \frac{2\,\text{mA}}{26\,\text{mV}} = 0.077\Omega^{-1}$$
$$r_\pi = \frac{h_{fe}}{g_m} = \frac{100}{0.077\Omega^{-1}} = 1299\Omega \qquad (6\text{-}42)$$
$$C_\pi = \frac{g_m}{\omega_T} - C_\mu = \frac{0.077}{2\pi(300\times10^6)} - 2\,\text{pF} = 39\,\text{pF}$$

小信号差模增益为

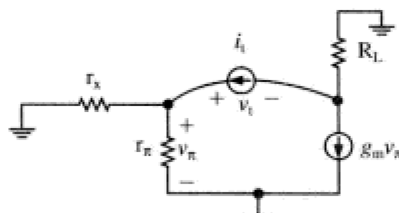
$$\frac{v_{od}}{v_{id}} = -g_m R_L\left(\frac{r_\pi}{r_x + r_\pi}\right) \approx -236 \qquad (6\text{-}43)$$

下面是开路时间常数的计算过程。对于电容C_π，我们使用图6-15a所示电路来求解其开路时间常数。

$$R_{o\pi} = r_x \| r_\pi \approx r_x \approx 100\Omega$$
$$\tau_{o\pi} = R_{o\pi}C_\pi = (100)(39\,\text{pF}) = 3.9\,\text{ns} \qquad (6\text{-}44)$$



（a）电容C_π的OCTC电路



（b）电容C_μ的OCTC电路

图6-15 求解差分放大器OCTC的电路

对于电容C_μ，我们使用图6-15b所示电路来求解其开路时间常数。

$$R_{o\mu} = r_x + R_L + g_m r_x R_L = 100 + 3300 + (0.077)(100)(3300) = 28810\Omega$$
$$\tau_{o\mu} = R_{o\mu}C_\mu = (28810)(2\,\text{pF}) = 57.6\,\text{ns} \qquad (6\text{-}45)$$

该放大器的开路时间常数之和为61.5ns，我们的带宽估计为

$$\omega_h \approx \frac{1}{61.5\,\text{ns}} \approx 16.25\,\text{Mrad/s}$$
$$f_h \approx \frac{\omega_h}{2\pi} \approx 2.58\,\text{MHz} \qquad (6\text{-}46)$$

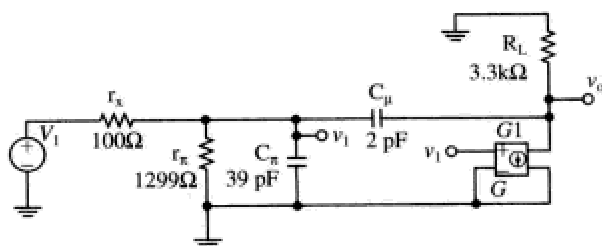
PSPICE仿真（如图6-16所示）表明，该放大器的增益为–236，与预期相同，–3dB带宽约为2.8MHz，比开路时间常数方法预测的带宽稍大一些。

例题6.5：利用OCTC方法进行设计案例分析

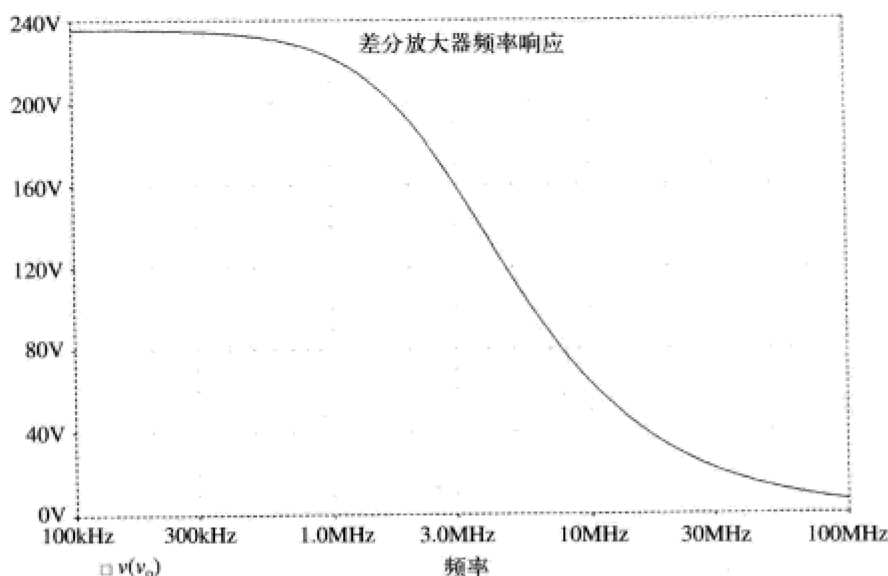
在前面的实例中，我们利用开路时间常数方法分析了一些电路的带宽。在下面的例子中，我们将利用开路时间常数方法作为分析工具进行迭代设计练习。我们将设计一个满足下列增益和带宽指标的晶体管放大器。

- 中间带增益的幅度：$|A_v|>100$
- 输入源电阻：$R_S = 2\text{k}\Omega$（高阻抗源，比如麦克风）
- 负载电容：$C_L = 10\text{pF}$（示波器探头、寄生电容等）
- –3dB带宽：$f_h>10\text{MHz}$

• 晶体管参数：$h_{fe}=150$；$f_T=300\text{MHz}$；$C_\mu=2\text{pF}$



（a）PSPICE电路



（b）共射极放大器的频率响应曲线，低频增益为–236，–3dB带宽为2.8MHz

图6-16　共射极放大器的PSPICE仿真结果

考虑一下图6-17a所示的交流耦合共射极放大器，它是电路拓扑结构的初始猜想。该放大器的伯德图与图6-17b非常相似。高频滚降是由晶体管内部电容C_π和C_μ的带宽限制效应造成的。低频滚降则是由耦合电容C_C和发射极旁路电容C_E造成的[①]。在下一章，我们将利用短路时间常数（short-circuit time constant）方法来估计放大器的低频断点f_L。本节我们将利用开路时间常数来估计放大器的高频滚降频率f_h。

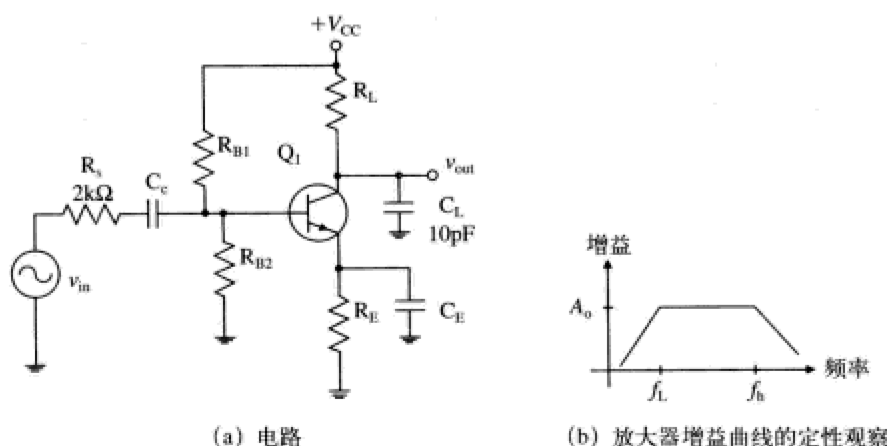
尝试#1：共射极放大器

首先，我们主观地假设晶体管的集电极电流为2mA[②]。其他小信号参数为

$$
\begin{aligned}
g_{m1} &= \frac{|I_{C1}|}{V_{TH}} = \frac{2\,\text{mA}}{26\,\text{mV}} = 0.077\Omega^{-1} \\
r_{\pi 1} &= \frac{h_{fe1}}{g_{m1}} = \frac{150}{0.077\Omega^{-1}} = 1948\Omega \\
C_{\pi 1} &= \frac{g_{m1}}{\omega_T} - C_{\mu 1} = \frac{0.077}{2\pi(300\times 10^6)} - 2\,\text{pF} = 39\,\text{pF}
\end{aligned}
\tag{6-47}
$$

① 假设电容C_C和C_E足够大以确信放大器的低频断点f_L远低于其高频断点f_h。

② 按照前面的关于晶体管偏置设置电路的讨论，精心设计电阻R_{B1}、R_{B2}和R_E的阻值，很容易将该晶体管偏置设置为集电极电流2mA。



(a) 电路　　　　(b) 放大器增益曲线的定性观察

图6-17 初始猜想电路结构（尝试#1）

为了求解中间带增益，我们使用图6-18所示的小信号模型[①]。解得低频小信号增益为

$$A_V = -g_{m1}R_L\left(\frac{r_{\pi 1}}{r_\pi + r_{x1} + R_s}\right) \tag{6-48}$$

可以看到，如果源电阻R_S以及晶体管基极扩展电阻r_x的阻值均为0Ω，则增益为$-g_mR_L$。利用式6-48的增益方程，我们可以得到，如果要达到必需的增益100，电阻R_L的最小取值为2.7kΩ。我们选定$R_L=2.8\text{k}\Omega$以确保有一定的增益余量。

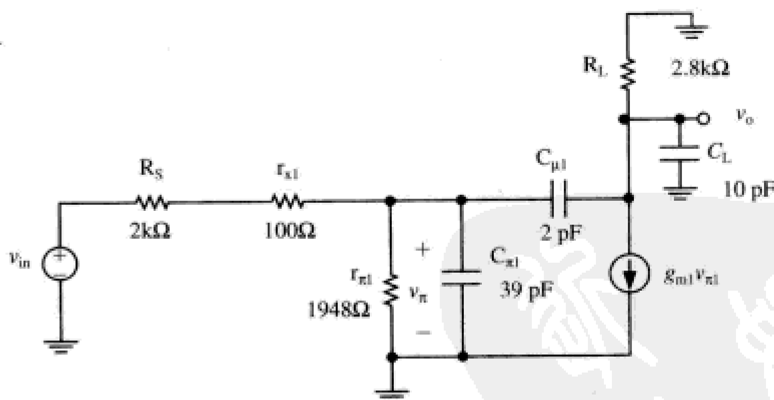


图6-18 尝试#1的小信号模型

下一步，为了估计放大器的带宽，我们将应用开路时间常数方法。为了求解电容$C_{\pi 1}$两端的开路电阻，我们使用图6-19a所示的电路。电容$C_{\pi 1}$的开路电阻以及时间常数为

$$\begin{aligned} R_{\pi 1} &= r_{\pi 1}\|(R_s + r_{x1}) = 1948\|2100 = 1010\Omega \\ \tau_{\pi 1} &= R_{\pi 1}C_{\pi 1} = (1010)(39\,\text{pF}) = 39\,\text{ns} \end{aligned} \tag{6-49}$$

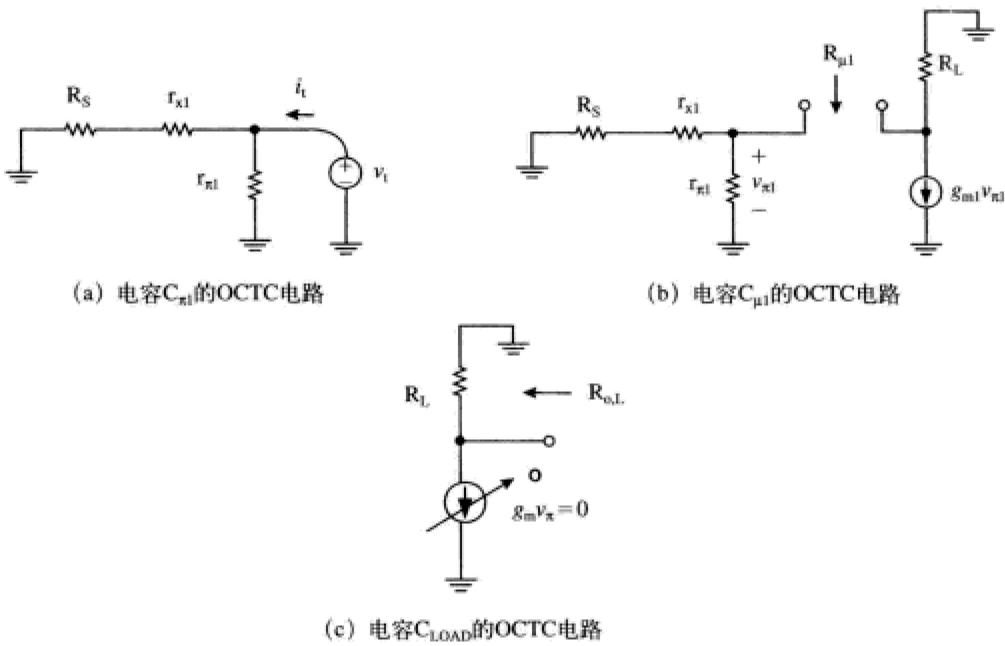
为了求解电容$C_{\mu 1}$两端的开路电阻，我们使用图6-19b所示的电路。我们得到电容$C_{\mu 1}$两端的开路电阻为左侧电阻$R_{\pi 1}$、右侧电阻R_L以及受控发生器g_mv_π产生的电阻之和。其结果为

① 我已经假设电阻R_{B1}和R_{B2}足够大，以使它们不会严重影响增益和带宽的计算。为了能够真正做到这一点，与电阻R_S、r_x和r_π相比，电阻R_{B1}和R_{B2}要充分大。如果实际情况并非如此，我们则需要将电阻R_{B1}和R_{B2}包含到增益和带宽计算中。我们还假设工作频率足够高，以使耦合电容和发射极旁路电容的行为就像短路一样。

$$R_{\mu1}=R_{\pi1}+R_L+g_{m1}R_{\pi1}R_L=1010+2700+(0.077)(1010)(2800)=221.5\,\text{k}\Omega$$
$$\tau_{\mu1}=R_{\mu1}C_{\mu1}=(221.5\,\text{k}\Omega)(2\,\text{pF})=443\,\text{ns} \tag{6-50}$$

检查发现，容易求解输出负载电容的开路电阻（如图6-19c所示），这是因为受控电流源不发挥作用。其结果为

$$R_{o,L}=R_L=2.8\,\text{k}\Omega$$
$$\tau_{LOAD}=R_{o,L}C_L=(2800)(10\,\text{pF})=28\,\text{ns} \tag{6-51}$$



（a）电容$C_{\pi1}$的OCTC电路　　（b）电容$C_{\mu1}$的OCTC电路

（c）电容C_{LOAD}的OCTC电路

图6-19　确定开路电阻的电路

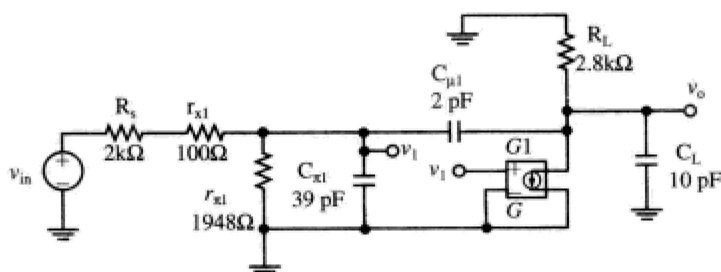
该放大器的开路时间常数之和为510ns，因此我们的带宽估计为

$$\omega_h\approx\frac{1}{510\text{ ns}}\approx1.96\text{ Mrad/s}$$
$$f_h=\frac{\omega_h}{2\pi}\approx312\text{ kHz} \tag{6-52}$$

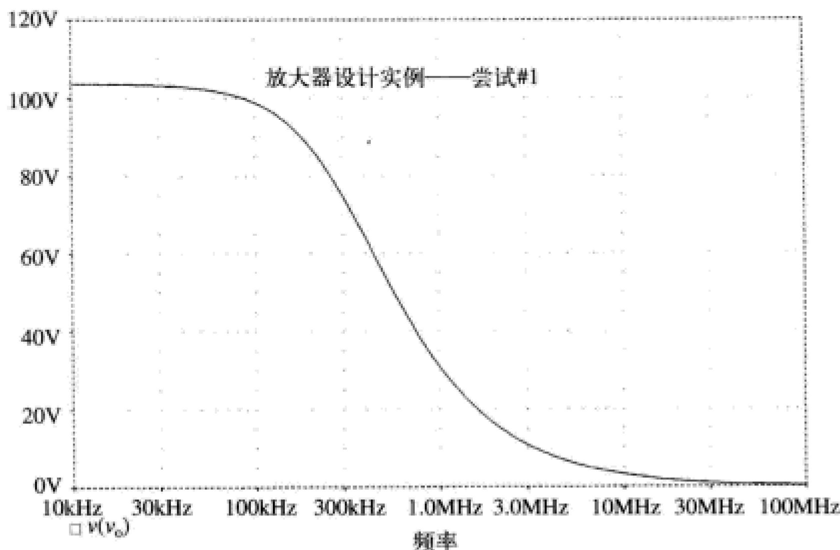
PSPICE仿真（如图6-20所示）表明，增益近似为−103.8，与计算结果一致。带宽约为314kHz。尝试#1的开路时间常数结果总结在表6-2中。放大器有一个主控极点（米勒效应影响），因此该电路的时间常数估计相当准确。我们的初步设计没有达到带宽指标要求，因此需要进行迭代设计。

表6-2　尝试#1的OCTC总结表

	尝试#1
$\tau_{\pi1}$	39ns
$\tau_{\mu1}$	443ns
τ_{LOAD}	28ns
$\sum\tau_{OC}$	510ns
$\omega_{h,\,est}$	1.96Mrad/s
$f_{h,\,est}$	312kHz
PSPICE中的f_h	314kHz



（a）PSPICE电路，忽略偏置设置细节



（b）PSPICE频率响应结果曲线

图6-20 尝试#1的频率响应

尝试#2 共发射极电路＋共射共基放大器

在尝试#1中，开路时间常数方法证实电容$C_{\mu 1}$的时间常数是该放大器的主要带宽瓶颈。考虑到我们欲使用单个共发射极增益电路来提供所有增益，并且在大增益共发射极放大器中米勒效应有非常大的影响，该结果并不令人吃惊。事实上，米勒效应引起的非常粗略的带宽估计（不用求助于前面讲述的完全米勒近似）为

$$\omega_h \approx \frac{1}{R_s(AC_{\mu 1})} \approx \frac{1}{(2000)(100)(2\times 10^{-12})} \approx 2.5\,\mathrm{M\,rad/s}$$
$$f_h = \frac{\omega_h}{2\pi} \approx 398\ \mathrm{kHz} \tag{6-53}$$

为了减弱米勒效应的影响，我们可以使用晶体管Q_2降低晶体管Q_1的电压增益，构成如图6-21a所示的*共射共基放大器*（cascode amplifier）电路[①]。晶体管Q_1产生受控输出电流，再经共基极晶体管Q_2进行缓冲。向晶体管Q_2的发射极看进去的电阻非常低，因此晶体管Q_1的集电极电压增益也非常低，因此减弱了米勒效应。晶体管Q_2提供大致为单位1的电流增益，晶体

① 术语共射共基放大器可以追溯到真空管电路。参见F.V.Hunt和R.W.Hickman的文章"On Electronic Voltage Stabilizers", *Review of Scientific Instruments*, vol.10, Jan.1939, pp6-21.

管Q_2集电极的负载电阻将电流转换为一个输出电压。我们假设晶体管Q_1和Q_2的小信号参数完全相同[①]，这就形成了图6-21b所示的小信号模型。

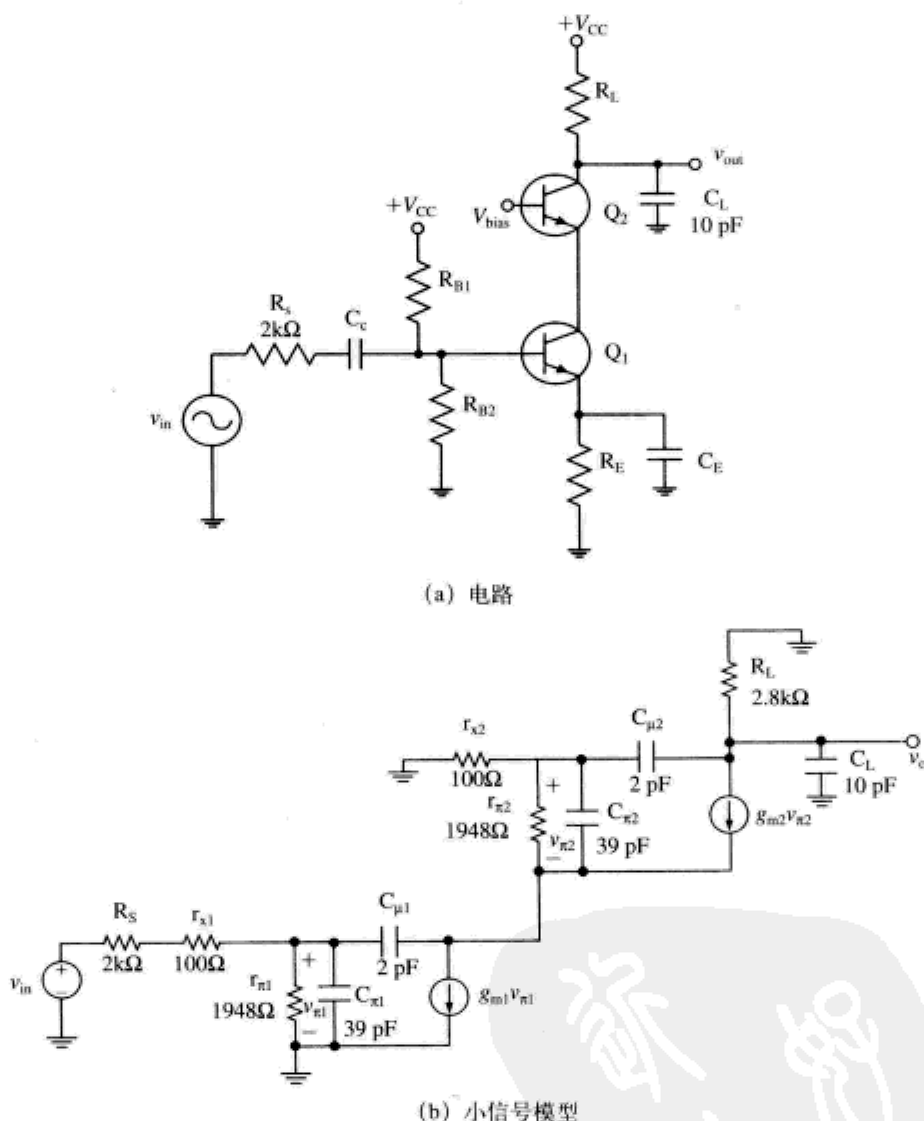


图6-21　使用共射共基放大器进行第二次尝试

现在，我们来求解该共射共基放大器的5个开路时间常数。可以看到电容$C_{\pi1}$的OCTC与尝试#1相同，没有改变，依旧是39ns。求解电容$C_{\mu1}$的开路时间常数稍显复杂些。图6-22a是求解电容$C_{\mu1}$的OCTC的电路。在该电路中，我们使用从晶体管Q_2的发射极看进去的输出电阻r_{out2}替换掉Q_2。晶体管Q_2发射极端的输出电阻为[②]

① 两个晶体管工作在相同的集电极电流点，因此g_m、r_π和r_x也相同。我们应该实地二次检验电容$C_{\mu1}$和$C_{\mu2}$。假设共射共基放大器晶体管Q_1现在工作在比尝试#1更低的V_{CB}点，因此$C_{\mu1}$的值会少许上升。为了比单独求解每个晶体管的电容C_μ的过程更加严格，我们应该求解每个晶体管的V_{CB}电压。不过，对于该设计实例，我们假设$C_{\mu1}=C_{\mu1}=2\text{pF}$。

② 前面一章中我们已经得到了射随器的输出电阻，我们可以利用该结果。

$$r_{\text{out}2}=\frac{r_{x2}+r_{\pi 2}}{1+h_{\text{fe}2}}=\frac{100+1948}{151}=13.6\Omega \tag{6-54}$$

现在，我们按照如下公式求解电容$C_{\mu 1}$的OCTC。

$$\begin{aligned}R_{\mu 1}&=R_{\pi 1}+r_{\text{out}2}+g_m R_{\pi 1}r_{\text{out}2}=1010+13.6+(0.077)(1010)(13.6)=2081\Omega\\ \tau_{\mu 1}&=R_{\mu 1}C_{\mu 1}=(2081)(2\,\text{pF})=4.2\,\text{ns}\end{aligned} \tag{6-55}$$

可以看到，因为消除了米勒效应，与尝试#1相比，我们已经大大降低了电容$C_{\mu 1}$的开路时间常数。事实上，我们已经将该开路时间常数降低了约100倍，这与我们对米勒效应的理解是一致的。

对于电容$C_{\pi 2}$，我们则使用图6-22b所示的电路。注意，从晶体管Q_1的集电极看进去的电阻非常大，因此晶体管Q_2的发射极可以处理为开路电路。为了求解电容$C_{\pi 2}$的OCTC，我们为电路添加一个测试电压源，按照下列方法来求解其测试电流

$$i_t=\frac{v_t}{r_{\pi 2}}+g_{m2}v_t\approx g_{m2}v_t \tag{6-56}$$

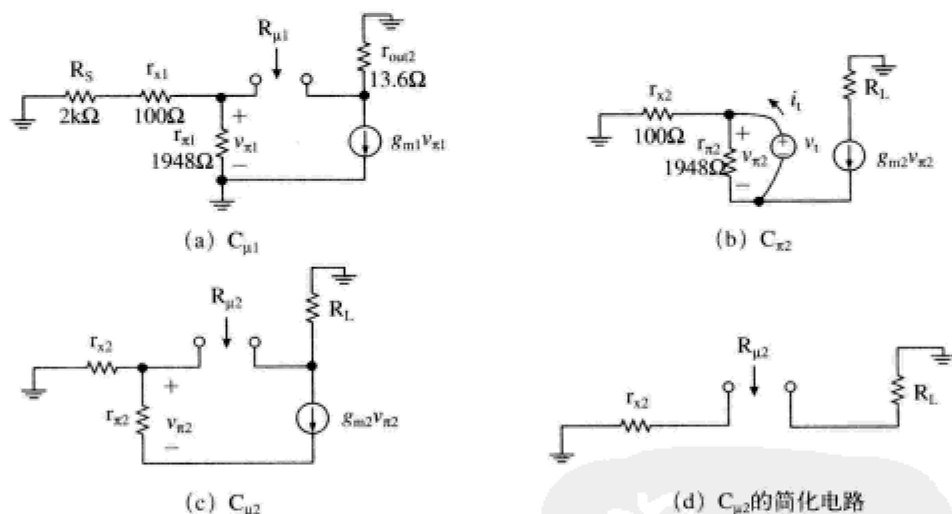


图6-22 尝试#2求解OCTC的增长电路

电容$C_{\pi 2}$的开路电阻和开路时间常数为

$$\begin{aligned}R_{\pi 2}&=\frac{v_t}{i_t}\approx\frac{1}{g_{m2}}\approx 13\Omega\\ \tau_{\pi 2}&=R_{\pi 2}C_{\pi 2}=(13)(39\,\text{pF})=0.5\,\text{ns}\end{aligned} \tag{6-57}$$

对于电容$C_{\mu 2}$，我们使用图6-22c所示的电路。乍看之下，该电路似乎凌乱不堪，但是在写出节点方程之前，稍想一下还是比较有序的。注意，既然晶体管Q_1的输出电阻非常大，$g_{m2}v_{\pi 2}$发生器的所有电流都流过电阻$r_{\pi 2}$。反过来，这又限制了下面等式的成立。

$$v_{\pi 2}=-g_{m2}r_{\pi 2}v_{\pi 2} \tag{6-58}$$

只有$v_{\pi 2}=0$，该等式才会成立。注意到$v_{\pi 2}=0$时，$g_{m2}v_{\pi 2}$发生器也等于零，我们则能够进一步简化。这就形成图6-22d所示的简化电路。现在，我们可以通过检查来求解电容$C_{\mu 2}$的开路电阻和开路时间常数。

$$R_{\mu2} = r_{x2} + R_{L} = 2900\Omega$$
$$\tau_{\mu2} = R_{\mu2}C_{\mu2}(2900)(2\,\text{pF}) = 5.8\,\text{ns} \tag{6-59}$$

负载电容的开路时间常数依旧是28ns。现在，可以得到电路的所有开路时间常数之和为77.5ns，带宽估计结果为

$$\omega_{h} \approx \frac{1}{77.5\,\text{ns}} \approx 12.9\,\text{Mrad/s}$$
$$f_{h}\frac{\omega_{h}}{2\pi} \approx 2.05\,\text{MHz} \tag{6-60}$$

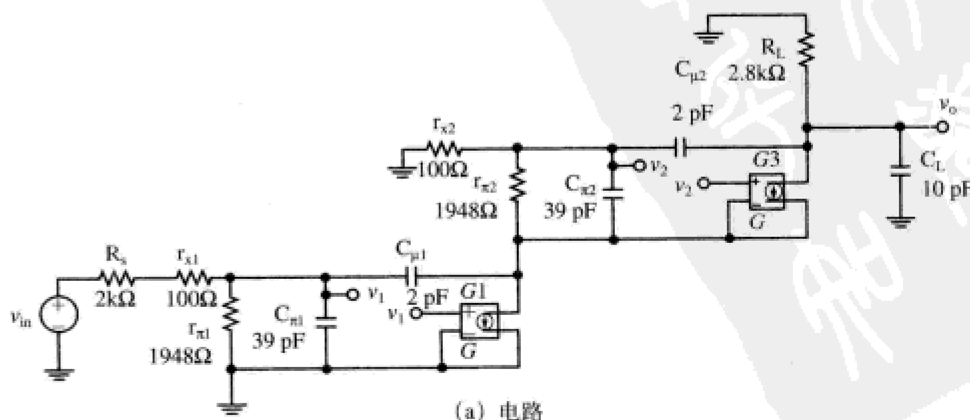
PSPICE仿真（如图6-23所示）表明，电路增益为–103.1，与计算一致，带宽约为2.68MHz。尝试#2的开路时间常数结果总结如表6-3所示。通过增加共射共基放大器，我们已经大大提高了放大器的整体带宽，但是依然没有达到设计指标的要求。我们还要进行迭代设计。

表6-3　尝试#1和#2的OCTC结果总结

	尝试#1	尝试#2
$\tau_{\pi1}$	39ns	39ns
$\tau_{\mu1}$	443ns	4.2ns
$\tau_{\pi2}$	—	0.5ns
$\tau_{\mu2}$	—	5.8ns
τ_{LOAD}	28ns	28ns
$\sum\tau_{OC}$	510ns	77.5ns
$\omega_{h,est}$	1.96Mrad/s	12.9Mrad/s
$f_{h,est}$	312kHz	2.05MHz
PSPICE中的f_h	314kHz	2.68MHz

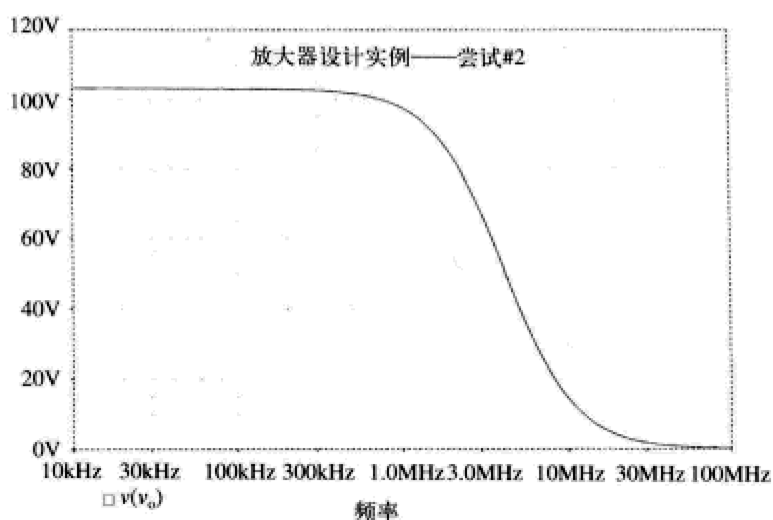
尝试#3　射随器＋共射极放大器＋共射共基放大器

尝试#2之后，我们看到主要开路时间常数是由晶体管Q_1的电容$C_{\pi1}$形成的。这是因为大的源电阻R_S与电容C_π交互作用造成的。在共发射极晶体管之前添加单位增益射随器缓冲电路对源电阻进行缓冲处理可以降低这个影响，如图6-24a所示。晶体管Q_3是射随器，具有大输入电阻和小输出电阻。为了简单期间，我们假设晶体管Q_3与其他晶体管偏置设置在相同的集电极电流点，具有与晶体管Q_1、Q_2相同的小信号参数。尝试#3的小信号模型如图6-24b所示。



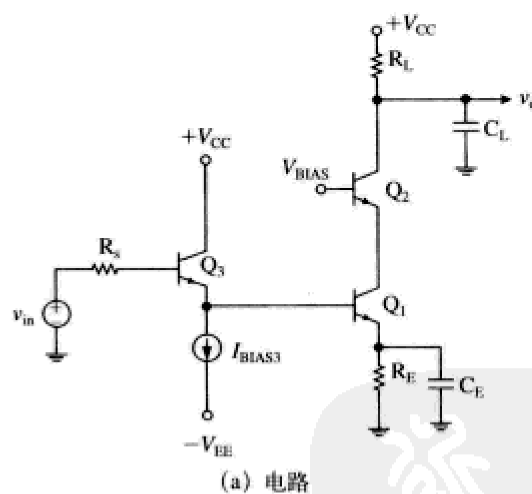
（a）电路

图6-23　尝试#2的频率响应

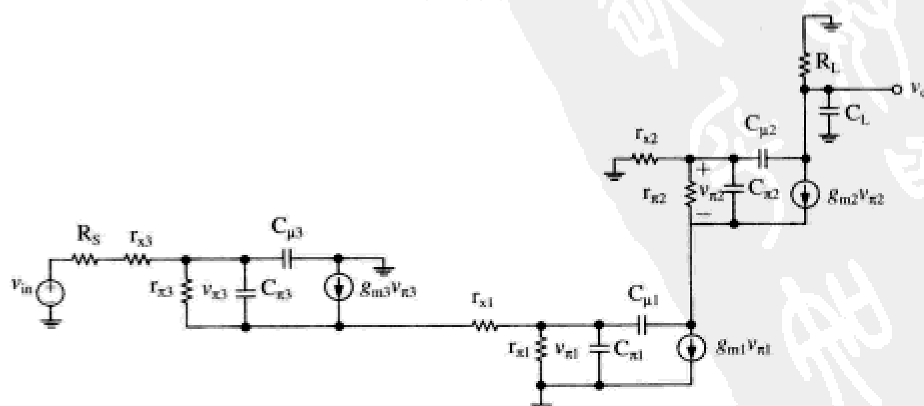


（b）PSPICE的频率响应仿真结果

图6-23 （续）



（a）电路



（b）小信号模型

图6-24 尝试#3

增加晶体管Q_3以及它的大输入电阻特性还降低了大的源电阻R_S形成的增益负载效应。因此，为了达到我们的期望增益100，我们可以将负载电阻R_L降低至1.5kΩ左右。稍后我们还将看到，R_L阻值的降低还帮助提高了放大器的设计带宽。

晶体管Q_3发射极看到的输出电阻为

$$r_{out,Q3} \approx \frac{R_s + r_{x3} + r_{\pi 3}}{1+h_{fe3}} = \frac{2000+100+1948}{151} = 27\Omega \tag{6-61}$$

现在，我们可以着手计算晶体管Q_1的开路时间常数了。对于电容$C_{\pi 1}$，其开路时间常数计算如下

$$\begin{aligned} R_{\pi 1} &= r_{\pi 1} \| (r_{out,Q3} + r_{x1}) = 1948 \| 127 = 119\Omega \\ \tau_{\pi 1} &= R_{\pi 1} C_{\pi 1} = (119)(39\,\text{pF}) = 4.6\,\text{ns} \end{aligned} \tag{6-62}$$

对于电容$C_{\mu 1}$，我们解得其开路电阻和开路时间常数为

$$\begin{aligned} R_{\mu 1} &= R_{\pi 1} + r_{out2} + g_{m2} R_{\pi 1} r_{out2} = 119 + 13.6 + (0.077)(119)(13.6) = 257\Omega \\ \tau_{\mu 1} &= R_{\mu 1} C_{\mu 1} = (257)(2\,\text{pF}) = 0.5\,\text{ns} \end{aligned} \tag{6-63}$$

对于晶体管Q_2，电容$C_{\pi 2}$的开路时间常数保持不变，仍为0.5ns。因为我们已经降低了负载电阻的阻值，电容$C_{\mu 2}$的开路时间常数从尝试#2的结果继续减小。

$$\begin{aligned} R_{\mu 2} &= r_{x2} + R_L = 1600\Omega \\ \tau_{\mu 2} &= R_{\mu 2} C_{\mu 2} = (1600)(2\,\text{pF}) = 3.2\,\text{ns} \end{aligned} \tag{6-64}$$

对于射随器晶体管Q_3，我们来求解其电容$C_{\pi 3}$的开路电阻和开路时间常数。

$$\begin{aligned} R_{\pi 3} &= \frac{1}{g_{m3}} \approx 13\Omega \\ \tau_{\pi 3} &= R_{\pi 3} C_{\pi 3} = (13)(39\,\text{pF}) = 0.5\,\text{ns} \end{aligned} \tag{6-65}$$

接下来，求解电容$C_{\mu 3}$的开路电阻和开路时间常数。

$$\begin{aligned} R_{\mu 3} &= [r_{x3} + R_s] \| [r_{\pi 3} + (1+h_{fe3})(r_{x1} + r_{\pi 1})] \approx r_{x3} + R_s = 2100\Omega \\ \tau_{\mu 3} &= R_{\mu 3} C_{\mu 3} = (2100)(2\,\text{pF}) = 4.2\,\text{ns} \end{aligned} \tag{6-66}$$

负载电容的开路时间常数为15ns。现在，整个电路的开路时间常数之和为28.5ns，我们的估计带宽为

$$\begin{aligned} \omega_h &= \frac{1}{28.5\,\text{ns}} = 35.1\,\text{Mrad/s} \\ f_h &= \frac{\omega_h}{2\pi} = 5.6\,\text{MHz} \end{aligned} \tag{6-67}$$

PSPICE仿真结果（如图6-25所示）表明，该电路的增益约为−107.7，带宽约为9.4MHz。尝试#3的开路时间常数计算结果总结如表6-4所示。我们的设计仍旧没能达到10MHz的带宽指标，因此还要进行迭代设计。

表6-4 尝试#1、#2、#3的OCTC结果总结表

	尝试#1	尝试#2	尝试#3
$\tau_{\pi 1}$	45ns	45ns	4.6ns
$\tau_{\mu 1}$	442ns	4.6ns	0.5ns
$\tau_{\pi 2}$	—	0.5ns	0.5ns

（续）

	尝试#1	尝试#2	尝试#3
$\tau_{\mu 2}$	—	5ns	3.2ns
$\tau_{\pi 3}$	—	—	0.5ns
$\tau_{\mu 3}$	—	—	4.2ns
τ_{LOAD}	24ns	24ns	15ns
$\sum\tau_{OC}$	511ns	79ns	28.5ns
$\omega_{h,est}$	1.96Mrad/s	12.7Mrad/s	35.1Mrad/s
$f_{h,est}$	311kHz	2.0MHz	5.6MHz
PSPICE中的f_h	315kHz	2.5MHz	9.4MHz

（a）PSPICE电路

（b）PSPICE频率响应曲线，显示带宽为9.4MHz

图6-25 尝试#3的频率响应

尝试#4 射随器＋共射极放大器＋共射共基放大器＋射随器

在尝试#3中，开路时间常数的计算结果证明负载电阻R_L与负载电容的交互作用是主要带宽瓶颈。通过增加图6-26a所示的缓冲射随器Q_4，将负载电容与1.5kΩ负载电阻缓冲隔离开来，我们可以减小电容C_L的影响。增加晶体管Q_4不影响晶体管Q_1、Q_2、Q_3的开路时间常数。我们只需利用如图6-26b所示的小信号模型计算Q_4的开路时间常数以及负载电容新的开路时间常数。

对于电容$C_{\pi4}$，我们解得

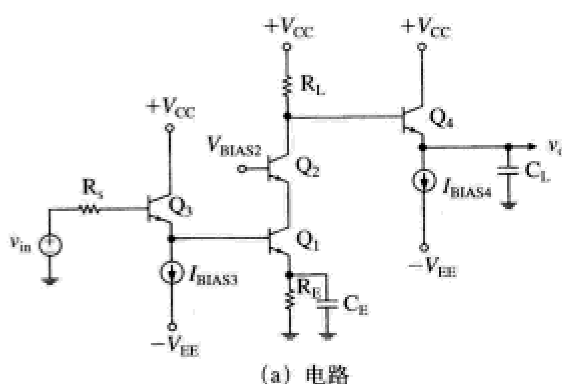
$$R_{\pi4}\approx\frac{1}{g_{m4}}=13\Omega$$
$$\tau_{\pi4}=R_{\pi4}C_{\pi4}=(13)(39\,\mathrm{pF})=0.5\,\mathrm{ns} \tag{6-68}$$

接下来，对于电容$C_{\mu4}$

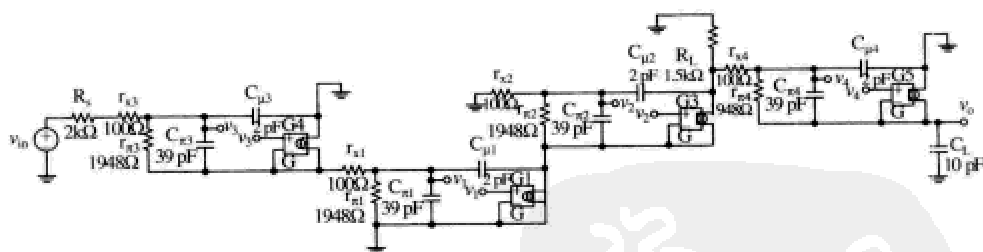
$$R_{\mu4}\approx r_{x4}+R_L=1600\Omega$$
$$\tau_{\mu4}=R_{\mu4}C_{\mu4}=(1600)(2\,\mathrm{pF})=3.2\,\mathrm{ns} \tag{6-69}$$

对于负载电容，我们需要求解射随器Q_4的输出电阻。

$$r_{out,Q4}\approx\frac{R_L+r_{x4}+r_{\pi4}}{1+h_{fe4}}=\frac{1500+100+1948}{151}=23.5\Omega \tag{6-70}$$



(a) 电路



(b) 小信号模型

图6-26　尝试#4

负载电容的开路时间常数为

$$\tau_{LOAD}=r_{out,Q4}C_L=(23.5)(10\,\mathrm{pF})=0.2\,\mathrm{ns} \tag{6-71}$$

现在，该电路的开路时间常数之和为22ns，我们的估计带宽为

$$\omega_h\approx\frac{1}{22\,\mathrm{ns}}\approx45.5\,\mathrm{Mrad/s}$$
$$f_h\approx\frac{\omega_h}{2\pi}\approx7.23\,\mathrm{MHz} \tag{6-72}$$

PSPICE仿真结果（如图6-27所示）表明，增益约为−107.7，带宽约为19.4MHz。最终，该放大器满足了增益和带宽的设计指标要求。

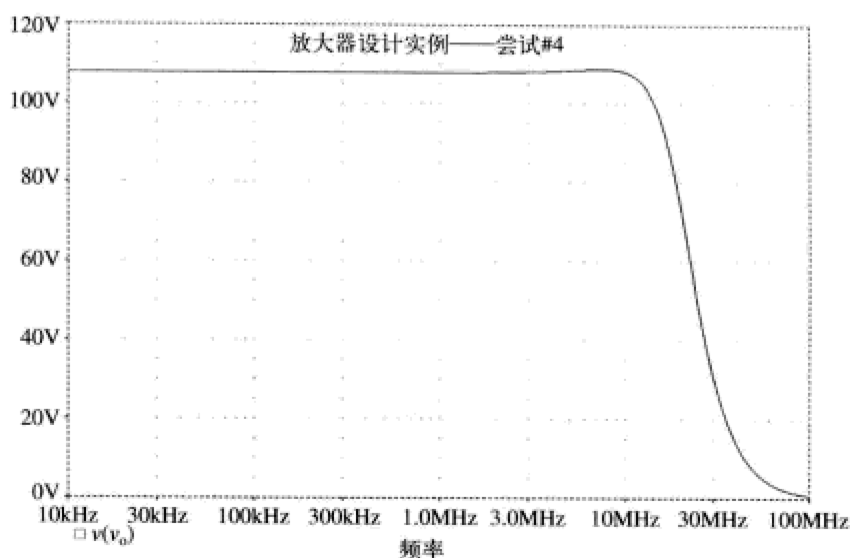


图6-27 尝试#4的频率响应，显示带宽为19.4MHz

我们看到，利用开路时间常数方法，能够找到放大器设计的主要带宽瓶颈，并且可以对症下药。而且，OCTC方法给出了保守的带宽估计，因此设计的实际带宽更大。如表6-5所示。注意下面的OCTC技巧。

- 带宽估计总是保守的。
- 如果存在主控极点，则估计带宽准确。
- 如果存在主控复极点对，则OCTC估计带宽可能过于保守，这是因为该方法假设系统只有实轴极点。
- （OCTC分析）并不适用于所有的电容（比如耦合电容和旁路电容就不适用）。
  ——OCTC方法只适用于高频模型。
- 各个OCTC并不与单个系统极点相等。
  ——记住，极点时间常数之和等于所有电容的OCTC之和，但是单个子项并不要求相等。
- 系统零点没有考虑在内。

表6-5 尝试#1、#2、#3、#4的OCTC结果总结表

	尝试#1	尝试#2	尝试#3	尝试#4
$\tau_{\pi 1}$	45ns	45ns	4.6ns	4.6ns
$\tau_{\mu 1}$	442ns	4.6ns	0.5ns	0.5ns
$\tau_{\pi 2}$	—	0.5ns	0.5ns	0.5ns
$\tau_{\mu 2}$	—	5ns	3.2ns	3.2ns
$\tau_{\pi 3}$	—	—	0.5ns	0.5ns
$\tau_{\mu 3}$	—	—	4.2ns	4.2ns
$\tau_{\pi 4}$			—	0.5ns
$\tau_{\mu 4}$			—	3.2ns
τ_{LOAD}	24ns	24ns	15ns	0.2ns
$\sum \tau_{OC}$	511ns	79ns	28.5ns	22ns
$\omega_{h,est}$	1.96Mrad/s	12.7Mrad/s	35.1Mrad/s	45.4Mrad/s
$f_{h,est}$	311kHz	2.0MHz	5.6MHz	7.23MHz
PSPICE中的f_h	315kHz	2.5MHz	9.4MHz	19.4MHz

6.3 本章习题

习题6.1

利用开路时间常数方法，估计图6-28所示RC梯形电路的带宽（以Hz为单位）。

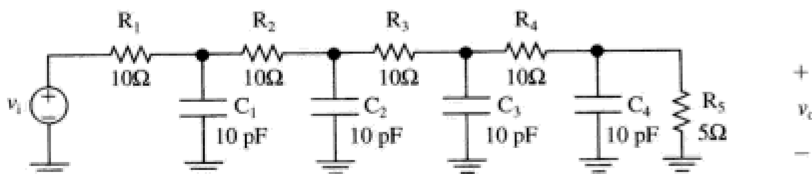


图6-28　习题6.1的RC梯形电路

习题6.2

对于图6-29所示电路：

（a）利用开路时间常数方法估计其–3dB带宽。

（b）利用数学计算或者SPICE仿真精确求解其–3dB带宽。

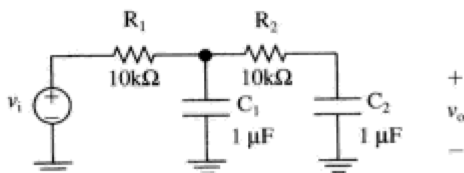


图6-29　习题6.2电路

习题6.3

如图6-30所示的晶体管放大器是用于放大视频信号的大带宽共发射极电路。其小信号输入驱动来自75Ω源电阻，并且使用75Ω端接电阻进行端接处理。晶体管使用直流供电电源V_{DC} = 5.7V进行偏置设置。你可以假设晶体管MPSH20的小信号参数为：$r_x = 20\Omega$、交流β参数h_{fe} ≈ 直流β参数$h_{FE} = 25$、$C_\mu = 0.9\text{pF}$、$f_T = 630\text{MHz}$。做出合理的近似，确定它们，证明它们。假设室温为25°C，因此$kT/q = 26\text{mV}$。

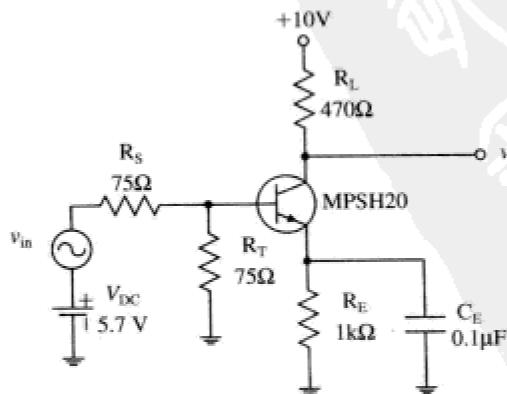


图6-30　习题6.3和习题6.4的共发射极放大器

（a）求解直流偏置工作点的集电极电流I_C以及集电极–基极电压V_{CB}。

(b) 计算小信号参数g_m、r_π、C_π和C_μ，并且画出小信号模型。在小信号模型中要包括发射极旁路电容C_E。

(c) 现在，假设工作频率足够高以使C_E看上去为短路电路，但是又足够低以使C_π和C_μ看上去为开路电路。给定这些条件，重新绘制小信号模型，并且计算中间带的电压增益A_V。

(d) 利用开路时间常数方法，估计近似高频带宽f_H（以Hz为单位）。

习题6.4

当你搭建好习题6.3的电路，并且将示波器连接到电路输出端，你会发现实测带宽f_H远低于基于OCTC方法分析的期望带宽。因为OCTC方法给出的是保守答案，所以这个结果其实是非常明显的。你将跟踪到下列两个原因。

- 由于是在原型面包板上连接电路，集电极-基极结存在2pF寄生电容。
- 由于示波器探针的负载效应，输出电压v_{out}相对地存在10pF电容。

(a) 给定这两个寄生效应，开路时间常数方法预测该电路的带宽f_H为多少。

(b) 为了提高电路的带宽，直接将集电极管脚与负载电阻焊接在一起，而不是插入原型面包板的连接节点，解决了寄生电容问题。你可能认为该方法将Q_1的基极-集电极节点的2pF寄生电容降低到零。（记住，该PN结两端的电容$C_{\mu 1}$依然存在）。你还增加了射随器将负载电阻与示波器形成的输出负载电容隔离开来（如图6-31所示）。假设晶体管Q_2的电容C_π的时间常数为0.25ns，C_μ的时间常数为0.4ns。开路时间常数方法预测该电路的带宽f_H又为多少。

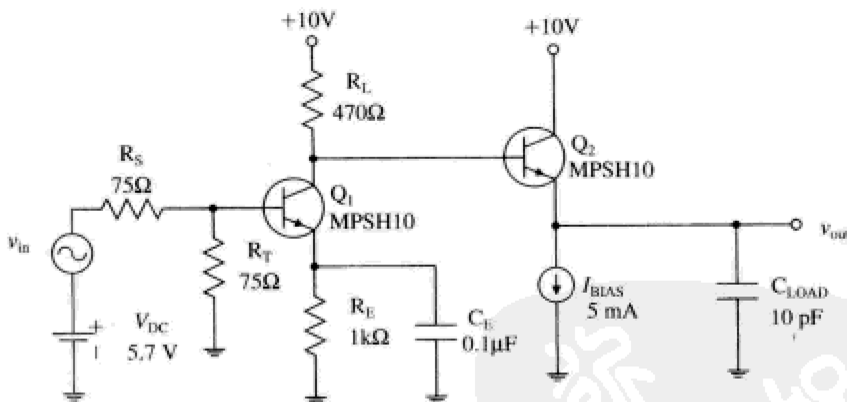


图6-31 带有输出射随器的共发射极放大器（习题6.4）

习题6.5

我们已经知道，带宽和上升时间之间存在某种关系。因为开路时间常数方法使我们能够估计带宽，所以它也可以帮助我们来估计单系统或者级联多系统的上升时间。考虑N个放大器级联组成的电路，每级电路存在单个极点，其时间常数为τ。

(a) 利用开路时间常数方法，估计整体放大器的带宽。从该带宽估计整体系统的上升时间。

(b) 利用级联系统的上升时间叠加规则[①]，即

$$\tau_{R,total} \approx \sqrt{\tau_{R1}^2 + \tau_{R2}^2 + \cdots + \tau_{RN}^2}$$

估计上升时间。比较该结果与OCTC方法推导出来的结果并进行评价。

(c) 对于$N=5$、$\tau=1$的情况，利用SPICE仿真求解真实带宽和上升时间。与前面的计算

① 注意，该表达式并不精确。

结果进行比较。评价OCTC估计结果的准确性。

（d）现在，重复计算5个级联系统的情况，其中4个极点的时间常数$\tau=1$，主控时间常数$\tau=10$。评价OCTC方法估计上升时间的准确性。

习题6.6

（a）假设图6-32所示电路受交流电压源驱动。利用直观方法，思考性实验等，绘制v_{out}/v_{in}幅度响应伯德图的形状。

（b）利用开路时间常数方法，求解高频断点f_H。在伯德图中标注f_L和f_H。



图6-32　习题6.6电路

6.4　参考文献

Davis, A., and Moustakas, E., "Analysis of active RC networks by decomposition," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 27, no. 5, May 1980, pp. 417-419.

Fox, R. M., and Lee, S. G., "Extension of the open-circuit time-constant method to allow for transcapacitances," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 37, no. 9, September 1990, pp. 1167-1171.

Gray, Paul E., and Searle, Campbell L., *Electronic Principles Physics, Models and Circuits*, JohnWiley, 1969.

Gray, Paul R., and Meyer, Robert G., *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, 2d edition, John Wiley, 1984.

Hunt, F.V., and Hickman, R.W., "On Electronic Voltage Stabilizers," *Review of Scientific Instruments*, vol. 10, Jan. 1939, pp. 6-21.

Rathore, T. S., "Generalized Miller theorem and its applications," *IEEE Transactions on Education*, vol. 32, no. 3, August 1989, pp. 386-390

Thompson, Marc T., "Design Linear Circuits Using OCTC Calculations," *Electronic Design* (*Special Analog Issue*), June 24, 1993, pp. 41-47.

______ , "Network Tricks Aid in OCTC," *Electronic Design*, December 16, 1993, pp. 67-70.

Thornton, R. D., Searle, C. L., Pederson, D. O., Adier, R. B., and Angelo, E. J., Jr., *Multistage Transistor Circuits* (SEEC Vol. 5), John Wiley, 1965.

第7章　晶体管放大器高级技术

本章概要

❑ 本章讨论与晶体管放大器高级设计技术相关的各种问题。

7.1　复杂电路开路时间常数计算

包含源电阻（R_S）、发射极电阻（R_E）和集电极负载电阻（R_L）在内的晶体管放大器电路如图7-1所示，该电路的开路时间常数计算是最为复杂的。在下节，我们将计算这个复杂电路的电容C_π、C_μ的开路电阻。

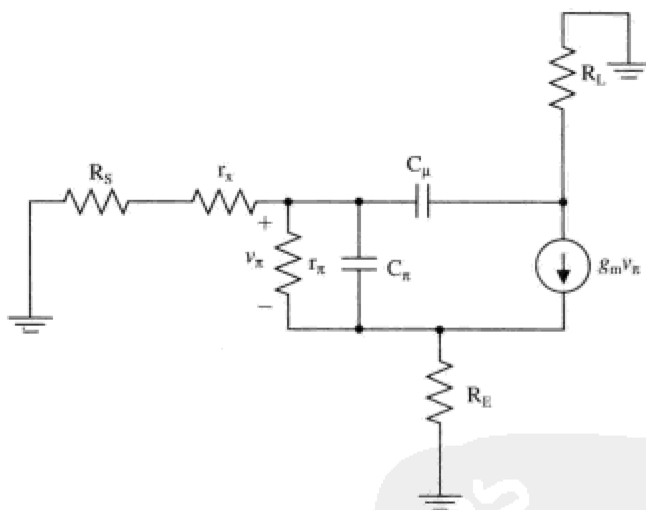


图7-1　计算最复杂的开路时间常数电路，包含源电阻（R_S）、发射极电阻（R_E）和集电极负载电阻（R_L）

电容C_π最为复杂的开路时间常数计算电路如图7-2a所示。如果盲目地写出该电路的节点方程，那么C_π的开路电阻的数学计算就会显得异常困难。首先，我们要认出用于设置电压v_π的测试电压源v_t。既然v_t电压发生器设定了受控[①]电流源的输出大小，那么我们可以使用叠加原理来求解测试电流的大小。

使用图7-2b所示的电路，将$g_m v_t$受控电流发生器设置为零，作为开路处理，可以求解由测试电压源形成测试电流。通过检查可以发现，v_t测试电压源两端的电阻为r_π与（$R_S + r_x + R_E$）的并联。因此，仅有v_t电压发生器形成的测试电流i_{t1}为

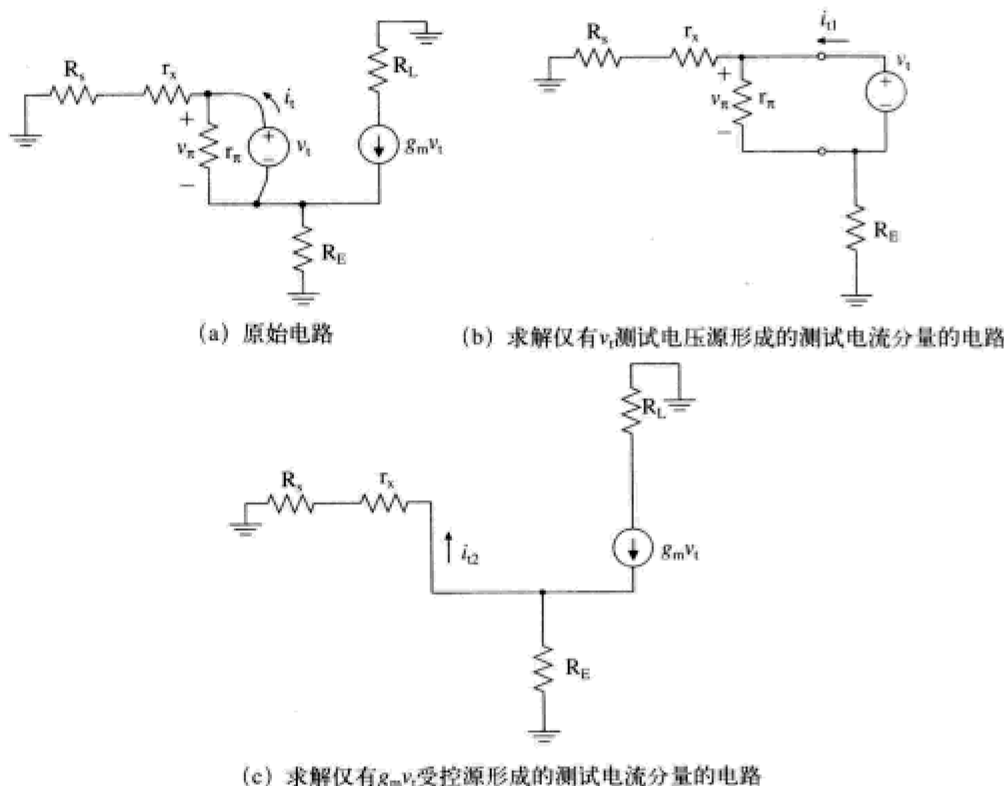
$$i_{t1} = \frac{v_t}{r_\pi} + \frac{v_t}{R_S + r_x + R_E} \tag{7-1}$$

为了求解仅有$g_m v_t$测试发生器形成的测试电流，我们将使用如图7-2c所示的电路。使用该

① 一般来说，在带有受控源的电路中不能使用叠加原理。但是，在这个特殊电路中却是可以使用的，这是因为v_t测试电压源同时也直接设定受控电流源的输出大小。

电路，并且认识到它是个电流分配器电路，则可解得

$$i_{t2}=g_m v_t \frac{R_E}{R_s+r_x+R_E}=v_t\frac{g_m R_E}{R_s+r_x+R_E} \tag{7-2}$$



(a) 原始电路

(b) 求解仅有v_t测试电压源形成的测试电流分量的电路

(c) 求解仅有$g_m v_t$受控源形成的测试电流分量的电路

图7-2　求解电容C_π的最坏情况开路时间常数的计算电路

总体测试电流i_t为i_{t1}和i_{t2}之和，即

$$i_t=i_{t1}+i_{t2}=v_t\left(\frac{1}{r_\pi}+\frac{1+g_m R_E}{R_S+r_x+R_E}\right) \tag{7-3}$$

最后我们解得电容C_π的开路电阻（open-circuit resistance）为

$$R_{o\pi}=\frac{v_t}{i_t}=r_\pi\left\|\left(\frac{R_S+r_x+R_E}{1+g_m R_E}\right)\right. \tag{7-4}$$

我们来关注一些重要的极限情况。如果发射极电阻R_E非常大，即$R_E \gg r_x$、$R_E \gg R_S$，则可得

$$R_{o\pi}\approx\frac{1}{g_m}\text{，}R_E \gg R_S, r_x \tag{7-5}$$

如果发射极电阻R_E非常小[①]，即$R_E \ll r_x$、$R_E \ll R_S$，并且$g_m R_E \ll 1$，则又可以得到

$$R_{o\pi}\approx r_\pi \| (R_S+r_x) \tag{7-6}$$

求解电容C_μ的最坏情况开路时间常数的计算电路（如图7-3a所示），刚看上去也是个极为困难的问题。不过，我们可以把该电路变换为更为简单的形式（图7-3b）。只要我们为R_1和

① 前一章我们曾经解决过这种情况，也就是发射极电阻$R_E=0$的共射极放大器。

G_M选择合适的取值[①]，则图7-3b所示的电路与图7-3a所示的电路是等效的。电阻R_1的取值容易求解，它刚好是r_π的视在电阻（即从r_π顶端看进去的输入电阻），因此可以解得R_1为

$$R_1 = r_\pi + (1+h_{fe})R_E \tag{7-7}$$

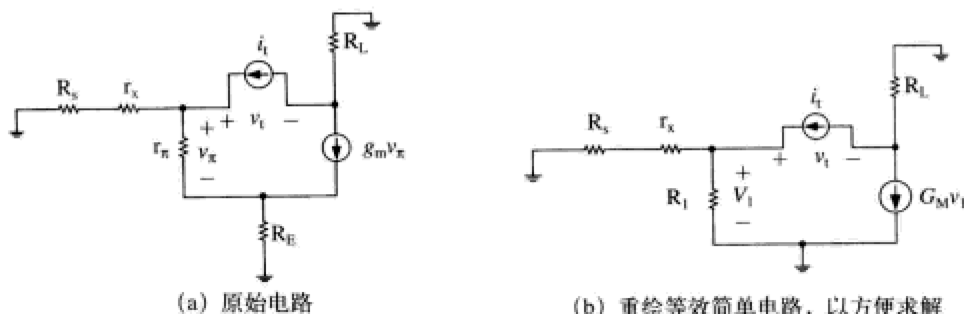


图7-3 求解电容C_μ的最坏情况开路时间常数的计算电路

接下来，我们需要求解新的受控发生器的取值。我们可以利用这样的事实：原电路的输出电流与变换电路的输出电流是相等的，或者

$$g_m v_\pi = G_M v_1 \tag{7-8}$$

我们想象使用图7-3a所示的测试电流源i_t来求解电压v_π的大小，使用如图7-3b所示的测试电流源i_t来求解电压v_1的大小。对于电压v_π，我们可以得到[②]

$$v_\pi = i_t\left(\frac{R_s + r_x}{R_s + r_x + r_\pi + (1+h_{fe})R_E}\right)r_\pi \tag{7-9}$$

接下来，我们求解电压v_1。

$$v_1 = i_t\left(\frac{(R_s + r_x)R_1}{R_s + r_x + R_1}\right) = \frac{(R_s + r_x)(r_\pi + (1+h_{fe})R_E)}{R_s + r_x + r_\pi + (1+h_{fe})R_E} \tag{7-10}$$

接下来，我们继续求解G_M[③]。

$$G_M = \frac{g_m v_\pi}{v_1} = g_m \frac{\left(\dfrac{R_s + r_x}{R_s + r_x + r_\pi + (1+h_{fe})R_E}\right)r_\pi}{\left(\dfrac{(R_s + r_x)(r_\pi + (1+h_{fe})R_E)}{R_s + r_x + r_\pi + (1+h_{fe})R_E}\right)} = \frac{g_m}{1 + \dfrac{R_E}{r_\pi} + g_m R_E} \approx \frac{g_m}{1 + g_m R_E} \tag{7-11}$$

综上所述，电容C_μ的最坏情况开路电阻为

$$\begin{aligned} R_{o\mu} &= R_{EQ1} + R_L + G_M R_{EQ1} R_L \\ R_{EQ1} &= (R_s + r_x)\|R_1 = (R_s + r_x)\|(r_\pi + (1+h_{fe})R_E) \\ G_M &\approx \frac{g_m}{1 + g_m R_E} \end{aligned} \tag{7-12}$$

---

① Gray、Hurst、Lewis和Meyer在著作"*Analysis and Design of Analog Integrated Circuits, 4th edition*"，pp197-200中，给出了相似的改进。

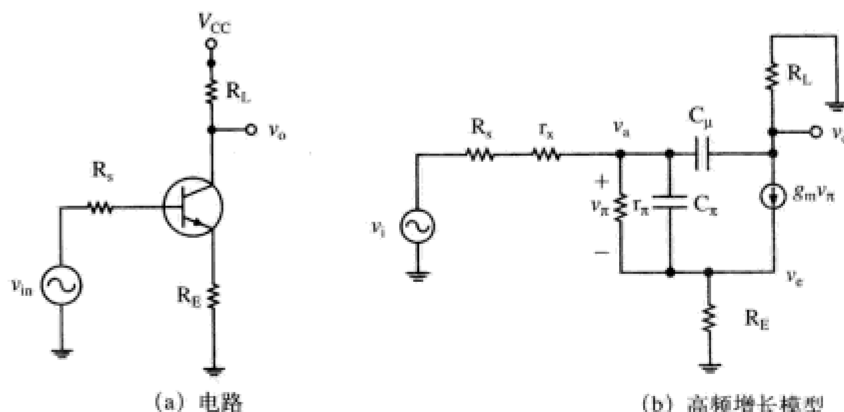
② 计算电流分配器可以得到该表达式。测试电流i_t流经r_π的分量为

$$\left(\frac{R_s + r_x}{R_s + r_x + r_\pi + (1+h_{fe})R_E}\right)$$

③ 不错，我知道该公式看起来一团糟，但是它确实可以解决问题。它最终会得出非常好的简单结果。注意$g_m \gg 1/r_\pi$。

例题7.1：估计发射极退化的共射极放大器的带宽

图7-4a所示是经过发射极退化（emitter degeneration）的共射极放大器电路。注意，在晶体管的发射极端连接着一个有限阻值的电阻R_E。发射极退化处理降低了共射极放大器的增益，但是通过部分自举（bootstrapping）基极–发射极电容，通过降低增益的方式减小了电容C_μ的时间常数，达到了扩展放大器带宽的目的。我们可以利用前面推导的最为复杂的开路电阻计算公式来估计该放大器的带宽。



(a) 电路　　(b) 高频增长模型

图7-4　发射极退化的共射极放大器，忽略了偏置设置电路细节

假设晶体管的直流工作点偏置设置为集电极电流$I_C = 2\text{mA}$，其小信号电流增益$h_{fe} = 100$，基极电阻$r_x = 100\Omega$，集电极-基极电容$C_\mu = 2\text{pF}$。负载电阻$R_L = 1000\Omega$，发射极电阻R_E的阻值可变。如表7-1所示是该电路的增益、开路时间常数以及带宽估计的计算结果。可以看出，随着发射极电阻的增大，增益的降低，带宽增加了。这就为设计人员设置共射极放大器的增益和带宽提供了又一个自由度。PSPICE仿真（如图7-5所示）也证实了这一结果。

表7-1　发射极退化的共射极放大器的计算结果。$f_{h,est}$计算是通过开路时间常数方法得到–3dB估计带宽

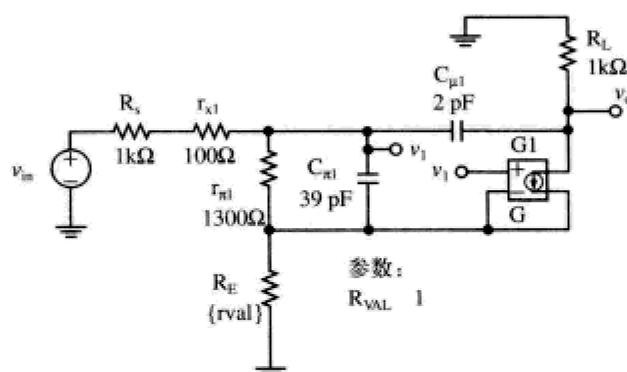
R_E	增益（计算得到）	C_π的OCTC (ns)	C_μ的OCTC (ns)	$\omega_{h,est}$ (Mr/s)	$f_{h,est}$ (MHz)	–3dB带宽（PSPICE，仿真得到，单位MHz）
0	−41.7	23.1	94.9	8.48	1.35	1.35
22Ω	−21.6	12.2	51.6	15.7	2.49	2.52
47Ω	−14.0	8.1	34.9	23.3	3.7	3.75
100Ω	−8.0	4.8	21.8	37.6	6.0	6.10

例题7.2：发射极退化的差分放大器的增益

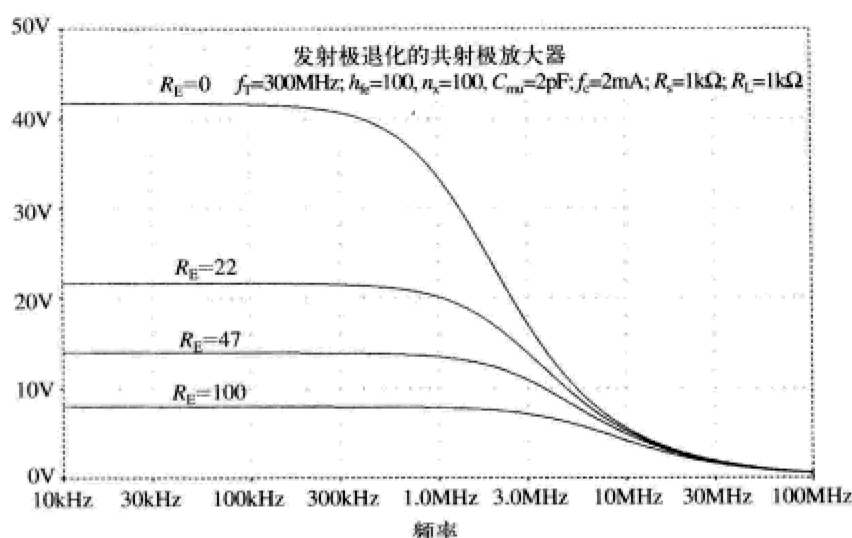
发射极退化的共射极放大器工作在差分模式时，其电路模型可以用来分析发射极退化的差分放大器的增益（如图7-6a所示）。通过半电路技术（half circuit），我们看到，在差分模式中[①]，该电路与发射极退化的共射极放大器是等效的（如图7-6b所示）。在晶体管发射极包含电阻R_E扩展了差分放大器的差分输入电压范围，差分放大器在扩展的输入电压范围内提供了近似线性的增益[②]。

① 差分模式时，每个晶体管的输入为$v_{id}/2$，每个晶体管的输出为$v_{od}/2$。

② 不过，也存在负面影响——电阻导致噪声增加，差分增益减小，共模抑制比*CMRR*降低。完整讨论见Grebene的*Bipolar and MOS Analog Integrated Circuits Design*，pp.221-224。

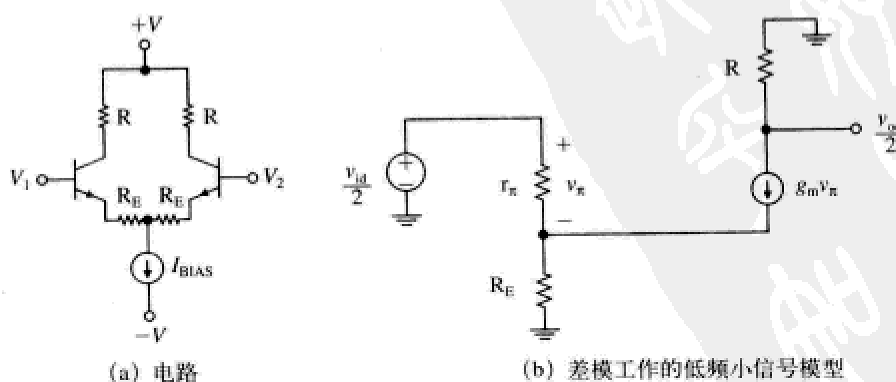


(a) PSPICE电路。注意R_E的阻值是变化的



(b) $R_E=0$、$R_E=22\Omega$、$R_E=47\Omega$和$R_E=100\Omega$时的电路仿真曲线

图7-5 发射极退化的共射极放大器

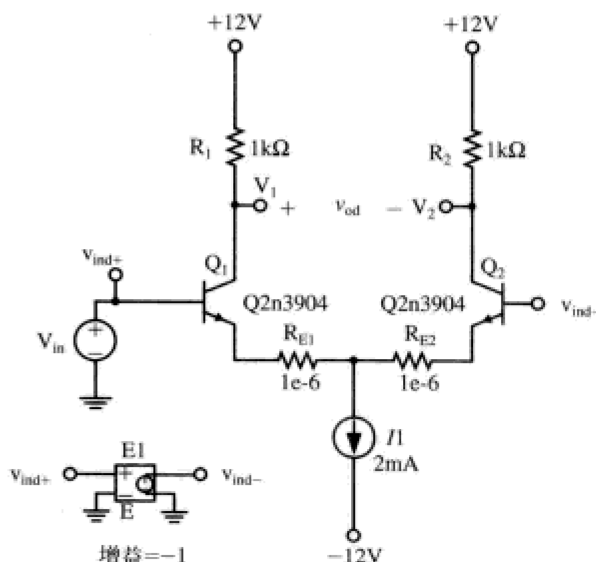


(a) 电路

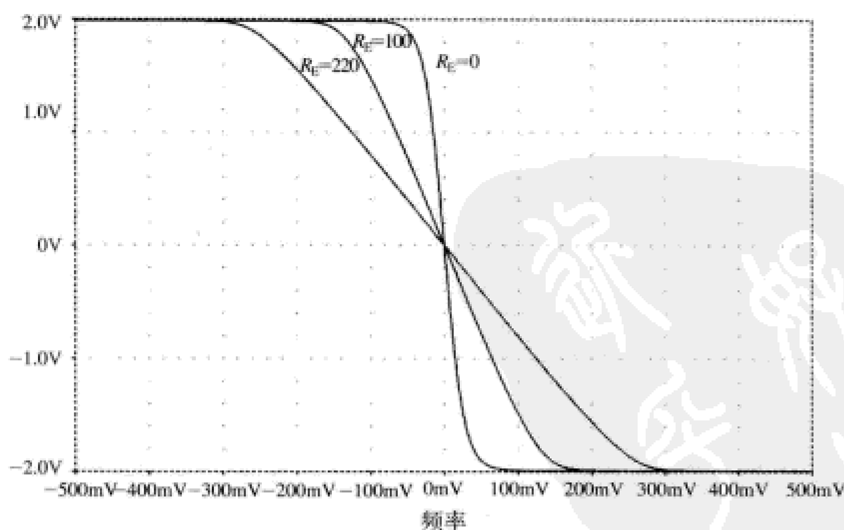
(b) 差模工作的低频小信号模型

图7-6 发射极退化的差分放大器

如图7-7所示是发射极退化的差分放大器的PSPICE仿真。晶体管Q_2的基极接地，晶体管Q_1的基极输入电压从-500mV扫描变化到＋500mV，晶体管Q_2的基极输入电压同时从＋500mV扫描变化到-500mV。仿真结果如图7-7b所示。电阻$R_E=0$时，这个放大器电路是标准的差分放大器，输入电压变化几个kT/q，输出电压在整个范围内摆动。当电阻$R_E=100\Omega$和$R_E=220\Omega$时，放大器在更宽泛的输入电压范围内具有线性的增益。



（a）PSPICE电路



（b）$R_E=0$、$R_E=100\Omega$和$R_E=220\Omega$，输入电压v_{in}在-500~＋500mV扫描变化的电路仿真曲线

图7-7　发射极退化的差分放大器

7.2　射随器缓冲电路的高频输出和输入电阻

理想的缓冲器电路具有非常大的输入电阻以及非常小的输出电阻。射随缓冲器的输出电

阻和输入电阻受电容C_π和C_μ的影响，随频率变化。使用图7-8所示的电路，我们可以深入地观察射随器的高频输出电阻。使用图7-8b所示的电路，我们在第5章已经求得射随器的低频输出电阻为

$$Z_{\text{out}_{\omega\to 0}}=\left(\frac{R_s+r_x+r_\pi}{1+h_{fe}}\right)\approx\left(\frac{R_s+r_x}{h_{fe}}\right)+\frac{1}{g_m} \tag{7-13}$$

早先我们看到，晶体管的小信号电流增益在非常高的频率段是逐渐减小的。在非常高的频率段，电容C_π将电阻r_π短路，同时导致受控源发生器$g_m v_\pi$关闭，形成图7-8c所示的高频增长模型。忽略电容C_μ的影响，那么射随器在非常高的频率段的输出电阻为

$$Z_{\text{out}_{\omega\to\infty}}=R_s+r_x \tag{7-14}$$

如果需要，可以使用下面的方法来求解输出电阻的闭环形式。可以重复使用前面的射随器低频输出电阻的求解结果。不过，如果使用r_π和C_π表示的并联电阻替换原始方程中的电阻r_π，那么求得的输出电阻则为频率的函数。

$$\begin{aligned}Z_{\text{out}}(s)&=\left(\frac{R_s+r_x+z_\pi(s)}{1+h_{fe}}\right)\\ z_\pi(s)&=\frac{r_\pi C_\pi}{r_\pi C_\pi s+1}\end{aligned} \tag{7-15}$$

然而，这个结果的数学形式看起来很复杂，因此我们还是寻求通过观察分析与少量计算就可以得到的近似结果。

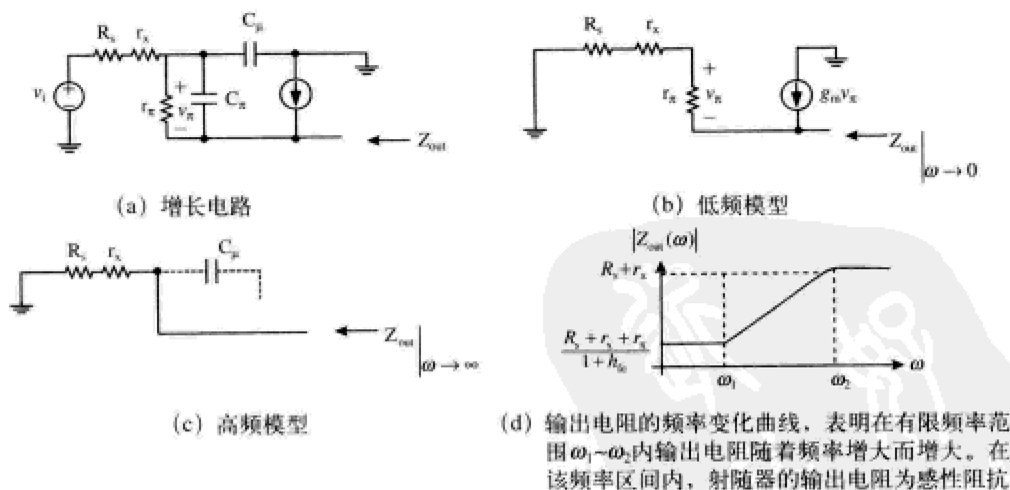


图7-8 射随器电路的高频输出电阻分析

射随器电路输出电阻的幅度-频率变化曲线如图7-8d所示，假设[①]集电极电流足够大以保证$1/g_m<R_S+r_x$，我们注意到，在频率区间$\omega_1\sim\omega_2$内，输出电阻随频率线性增大，因此在该段频率范围内，输出电阻表现为一个电感元件。

① 该假设为高频电阻高于低频电阻。该假设成立的必要条件是

$$\frac{R_s+r_x}{h_{fe}}+\frac{1}{g_m}<R_s+r_x$$

在中等集电极电流放大器中该假设通常是成立的。

输出电阻开始增大的频率点ω_1是电容C_π开始将r_π短路掉的频率点。该频率点的频率近似为

$$\omega_1 \approx \frac{1}{r_\pi C_\pi} \tag{7-16}$$

频率点ω_2的频率近似为h_{fe}与ω_1的乘积。

$$\omega_2 \approx h_{fe}\omega_1 \approx \frac{h_{fe}}{r_\pi C_\pi} \approx \frac{g_m}{C_\pi} \tag{7-17}$$

模拟这个频率相关电阻（frequency-dependent impedance）的等效电路如图7-9所示。我们可以确定参数R_1和R_2的值。

$$R_1 = R_S + r_x$$
$$R_1 \| R_2 = \frac{R_S + r_x + r_\pi}{1 + h_{fe}} \tag{7-18}$$

为了求解电感L的大小，我们注意到，原始晶体管电路的时间常数与电感电路模型的时间常数必然是相等的。面对电容C_π的开路电阻近似为$1/g_m$。面对电感L的电阻为$R_1 + R_2$。因此，我们可以通过使两个电路的时间常数RC与L/R相等的方法来求解电感L的大小。

$$\frac{C_\pi}{g_m} = \frac{L}{R_1 + R_2} \Rightarrow L \approx \left(\frac{C_\pi}{g_m}\right)(R_1 + R_2) \tag{7-19}$$

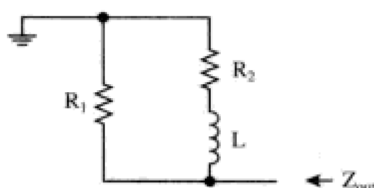


图7-9　射随器的输出电阻$Z_{out}(s)$模型，用L、R_1和R_2表示

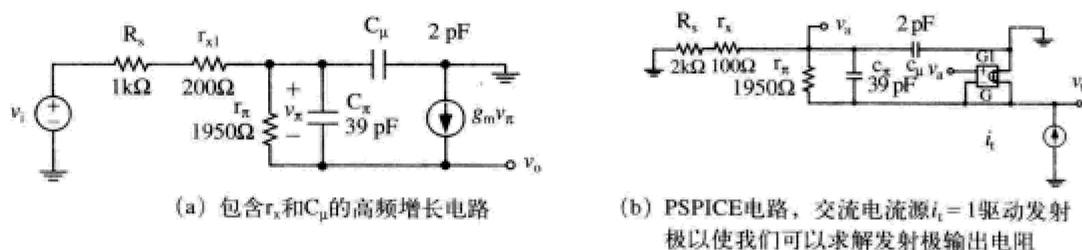
例题7.3：射随器的输出电阻

我们来做个数值计算的具体例子。假设射随器电路的参数为：$R_S = 1k\Omega$、$r_x = 200\Omega$、$I_C = 200mA$、$h_{fe} = 150$、$g_m = 0.077\Omega^{-1}$、$r_\pi = 1950\Omega$、$C_\mu = 2pF$、$f_T = 300MHz$、$C_\pi = 39pF$。该射随器电路的增长模型如图7-10a所示。电感电路模型的参数为

$$R_1 = R_S + r_x = 1200\Omega$$
$$R_1 \| R_2 = \frac{R_S + r_x + r_\pi}{1 + h_{fe}} = 20.9\Omega \Rightarrow R_2 \approx 20.9\Omega \tag{7-20}$$
$$L \approx \left(\frac{C_\pi}{g_m}\right)(R_1 + R_2) = \left(\frac{39\,\text{pf}}{0.077}\right)(1220) \approx 0.61\mu\text{H}$$

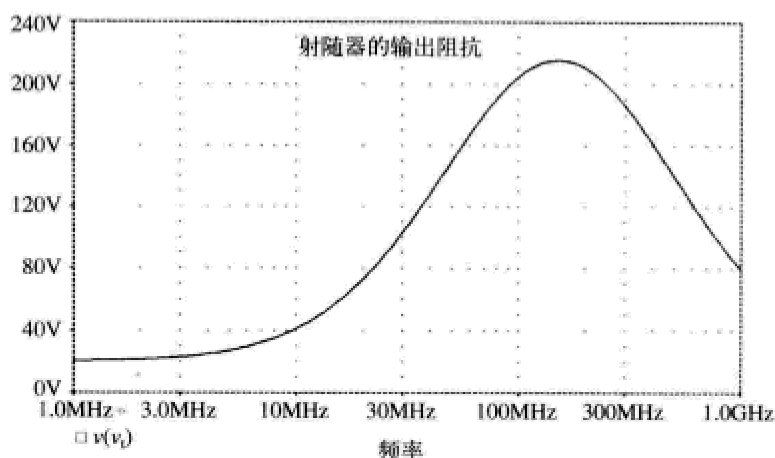
电感电路模型预测电阻在频率点R_2/L附近，也就是34.3Mrad/s（5.5MHz）处开始增大。

增加交流测试电流源i_t，测量形成的测试电压v_t的大小，我们就可以使用PSPICE工具对该射随器电路进行模拟，如图7-10b所示。仿真结果（图7-10c）表明低频电阻近似为20Ω，与预计相同。不过，高频电阻（约100MHz以上）并没有达到预计的高频极限1200Ω。这是由于电容C_μ的负载效应造成的，我们在前面的简化分析忽略了这一点。在非常高的频率段，电容C_μ导致输出电阻又一次减小。因此，在这个设计实例中，电感电路模型显示：输出电阻表现为电感的频率范围约为5MHz~100MHz。



（a）包含r_x和C_μ的高频增长电路

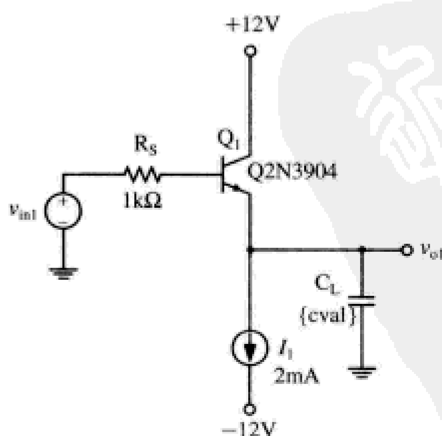
（b）PSPICE电路，交流电流源$i_t=1$驱动发射极以使我们可以求解发射极输出电阻



（c）PSPICE仿真曲线，显示感性输出电阻的频率范围，之后是电容C_μ负载效应引起的电阻滚降

图7-10 使用PSPICE分析射随器电路的高频输出电阻

电感性输出电阻造成的一个结果是，如果使用这个射随器电路来驱动电容负载，那么在负载电容的输出端将会出现增益尖峰。如图7-11a所示是射随器驱动电容负载的电路①。可以看到增益尖峰出现在我们预计的频率段，即射随器的输出端表现为电感性输出电阻的频率段②。

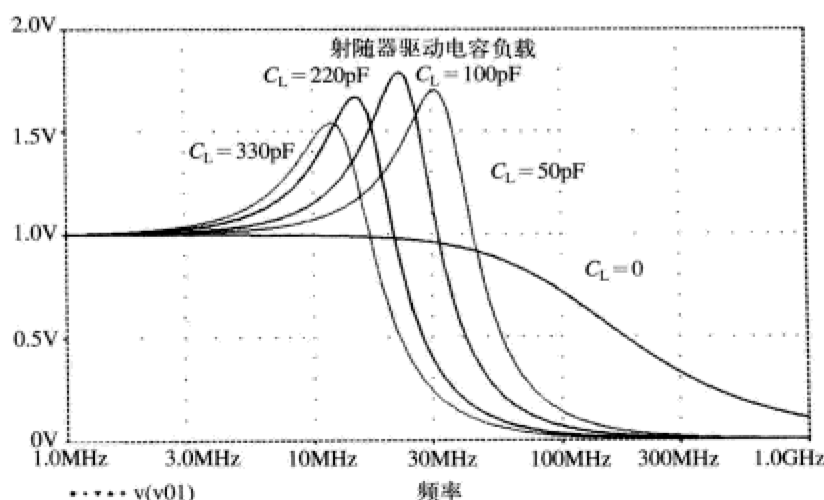


（a）使用晶体管2N3904的电路

图7-11 射随器驱动电容负载

① 在该仿真中，我们选用了晶体管2N3904，它的参数（f_T、h_{fe}等）与前一例子相似。

② 我们可以增加一个负载电阻，与负载电容串联在一起，来抑制这种尖峰效应。



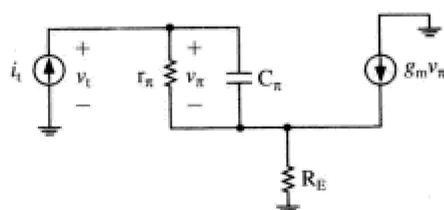
（b）负载电容$C_L=0$、$C_L=50pF$、$C_L=100pF$、$C_L=220pF$、$C_L=330pF$时，射随器增益的PSPICE仿真曲线

图7-11　（续）

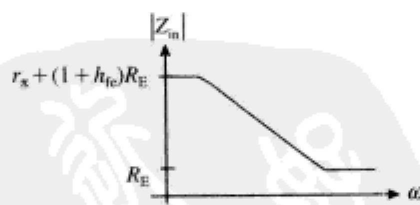
例题7.4：射随器的输入电阻

接下来，我们使用图7-12a所示的简化增长电路模型来分析射随器电路的输入电阻①。这里使用与第5章求解射随器低频输入电阻相似的方法，求得射随器输入电阻为

$$Z_{in}(s)=\frac{v_t(s)}{i_t(s)}=z_\pi(s)+(1+h_{fe}(s))R_E=z_\pi(s)+(1+g_m z_\pi(s))R_E$$
$$Z_\pi(s)=\frac{r_\pi}{r_\pi C_\pi s+1} \tag{7-21}$$



（a）原始电路，假设$C_\mu=0$、$r_x=0$



（b）输入电阻幅度曲线

图7-12　求解射随器输入电阻$Z_{in}(s)$的简化电路模型

在非常低的频率段，我们得到射随器电路的输入电阻为

$$Z_{in,\omega\to 0}=r_\pi+(1+h_{fe})R_E \tag{7-22}$$

在非常高的频率段，电容C_π将电阻r_π短路掉，并且关闭了受控电流源，从而导致

$$Z_{in,\omega\to\infty}=R_E \tag{7-23}$$

射随器的输入电阻随频率变化的幅度曲线如图7-12b所示。可以看到，在非常高的频率段，电阻$Z_{in}(\omega)$受电容C_μ旁路作用的影响，还将进一步减小。我们在前面的分析中忽略了这一点。

① 因为在下面的讨论中，我们忽略了电容C_μ和电阻r_x，所以这是个简化电路。这使得该电路的数学求解更容易，也使我们可以更深入地观察该电路的物理特性。

下面我们来分析按照图7-13所示电路对射随器施加一个电容负载时，将会发生什么情况。接下来的逻辑变化为

$$
\begin{aligned}
Z_{\text{in}}(s) &= z_{\pi}(s)+(1+g_{\text{m}}z_{\pi}(s))Z_{\text{E}}(s)\\
z_{\pi}(s) &= \frac{r_{\pi}}{r_{\pi}C_{\pi}s+1}\\
Z_{\text{E}}(s) &= \frac{R_{\text{E}}}{R_{\text{E}}C_{\text{L}}s+1}
\end{aligned}
\tag{7-24}
$$

按照代数学变换法则，可以得到

$$
\begin{aligned}
Z_{\text{in}}(s) &= \frac{r_{\pi}}{r_{\pi}C_{\pi}s+1}+\left(1+g_{\text{m}}\left(\frac{r_{\pi}}{r_{\pi}C_{\pi}s+1}\right)\right)\left(\frac{R_{\text{E}}}{R_{\text{E}}C_{\text{L}}s+1}\right)\\
&=(r_{\pi}+(1+h_{\text{fe}})R_{\text{E}})\left(\frac{\dfrac{r_{\pi}R_{\text{E}}(C_{\text{L}}+C_{\pi})s}{(r_{\pi}+(1+h_{\text{fe}})R_{\text{E}})}+1}{(r_{\pi}C_{\pi}s+1)(R_{\text{E}}C_{\text{L}}s+1)}\right)
\end{aligned}
\tag{7-25}
$$

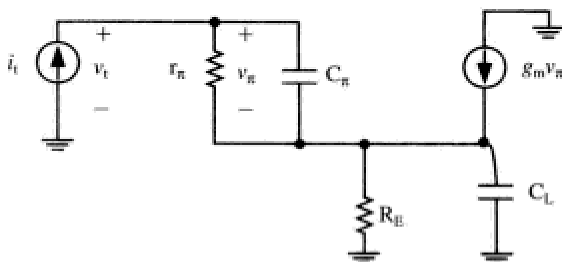


图7-13 计算驱动电容负载的射随器电路的输入电阻的增长电路模型

通常情况下，R_E的阻值比较大，即$h_{fe}R_E \gg r_\pi$，因此可以将这个输入电阻近似为

$$
Z_{\text{in}}(s)\approx(r_{\pi}+(1+h_{\text{fe}})R_{\text{E}})\left(\frac{\dfrac{(C_{\text{L}}+C_{\pi})s}{g_{\text{m}}}+1}{(r_{\pi}C_{\pi}s+1)(R_{\text{E}}C_{\text{L}}s+1)}\right)
\tag{7-26}
$$

现在，我们暂时停顿下来，观察一下这个结果。首先，式(7-26)前面的第1项($r_\pi+(1+h_{fe})R_E$)为低频输入电阻，这与预计是一致的。其次，我们发现输入电阻存在两个极点和一个零点，分别位于以下频率处

$$
\begin{aligned}
\omega_{\text{p1}} &= -\frac{1}{R_{\text{E}}C_{\text{L}}}\\
\omega_{\text{p2}} &= -\frac{1}{r_{\pi}C_{\pi}}\\
\omega_{\text{z}} &= -\frac{g_{\text{m}}}{C_{\text{L}}+C_{\pi}}
\end{aligned}
\tag{7-27}
$$

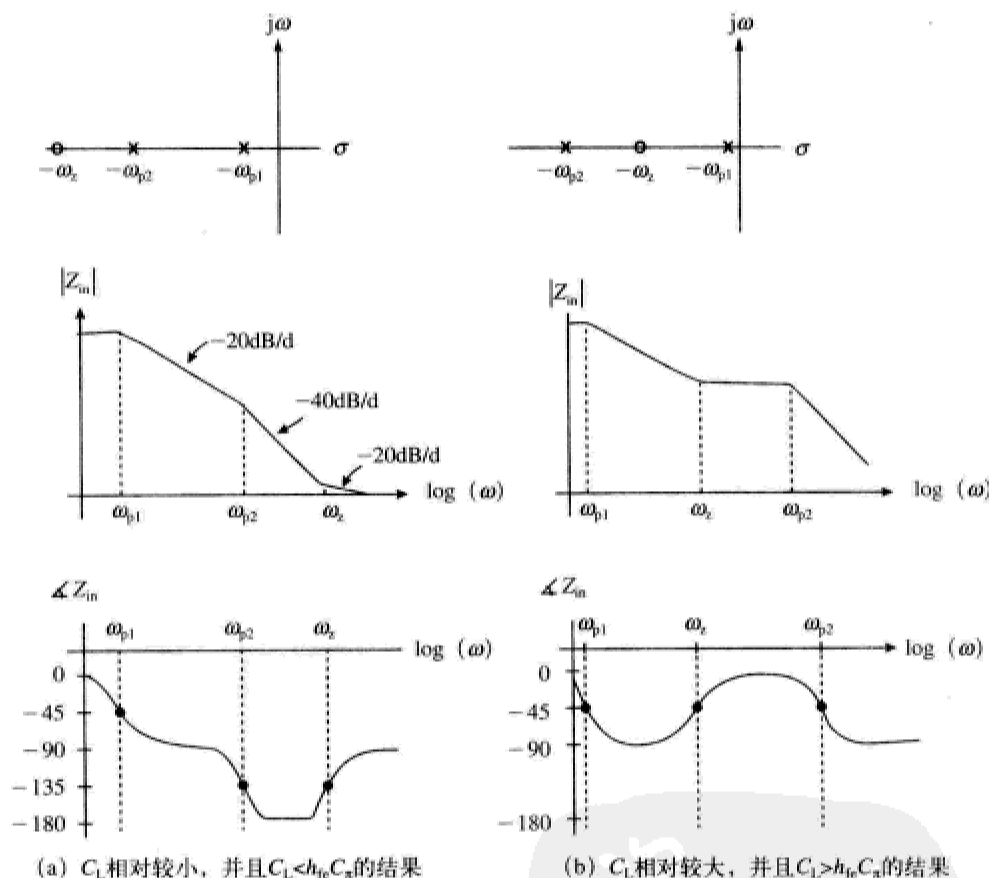
我们来绘制两种不同情况下输入电阻的零极点图和伯德图。第一种情况：C_L相对较小，并且$C_L<h_{fe}C_\pi$（如图7-14a所示），我们发现零点的频率ω_Z高于第二极点的频率ω_{p2}。这意味着输入电阻的相位角在某一频率范围内突然下降到−90°以下。这又意味着在该段频率范围内，输入电阻的实部为负数①。换句话说，在该段频率范围内，输入电阻的负实部可以帮助电路

① 负电阻可以提供能量，但是正电阻只能消耗能量。

持续振荡。

第二种情况：C_L相对较大（如图7-14b所示），我们发现零点ω_Z的频率低于第二极点ω_{p2}的频率。这样，输入电阻的实部永远不会为负数。

该结果表明，射随器电路可以表现出稀奇古怪的行为特性——包含射随器的电路可能具有增益尖峰，或者在某些情况下会引起振荡[①]。某些时候常采用的一种设计策略是保证在射



(a) C_L相对较小，并且$C_L<h_{fe}C_\pi$的结果　(b) C_L相对较大，并且$C_L>h_{fe}C_\pi$的结果

图7-14　电容负载射随器电路的输入电阻

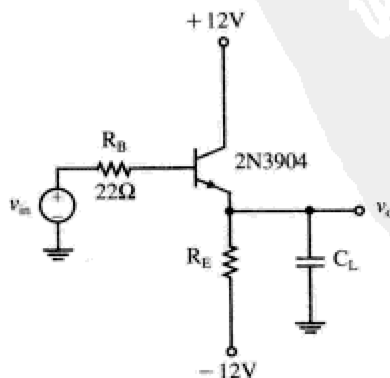


图7-15　为了减小发生振荡的概率，射随器的基极端串接电阻R_B

① 负电阻向外部电路提供能量，正电阻只能消耗能量。如果负电阻将能量发送到LC电路，则会产生振荡。

随器的基极端串接一个有限阻值的电阻。如图7-15所示，我们将22Ω的电阻与射随器电路的基极串接在一起[①]。

7.3 自举电路

在前面讨论米勒效应时已经看到，如果电容环绕在负增益电路的周围，那么电容的影响可能被加倍放大。参考图7-16所示的电路，回忆前一章的推导结果，我们知道向该放大器输入端看进去的电容为

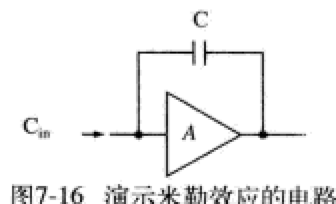


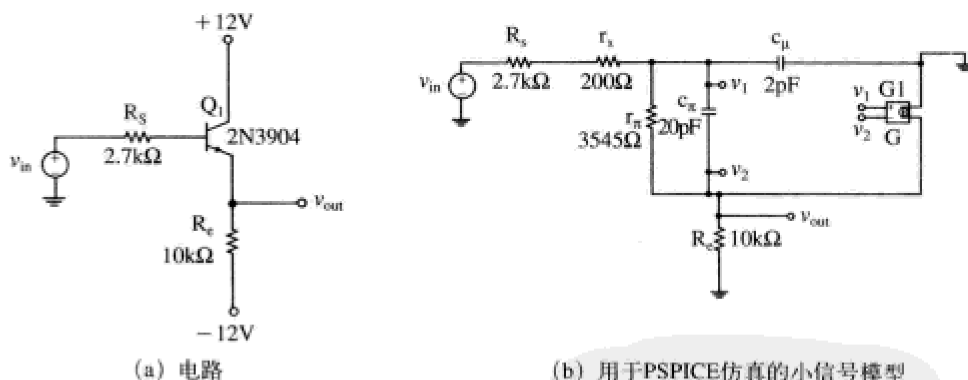
图7-16 演示米勒效应的电路

$$C_{in} = C(1 - A) \tag{7-28}$$

该结果暗示我们还存在另外的方法可以减小电容对电路的影响。如果放大器的增益为+1倍，那么会发生什么情况呢？增益为+1倍，则向放大器输入端看进去的电容精确为零。这个方法可以用来减小电容的影响，因此可以增加电路的带宽。

例题7.5：自举射随器电路

我们通过观察分析射随器电路的行为特性（如图7-17所示），可以演示自举电路的作用。



（a）电路　　（b）用于PSPICE仿真的小信号模型

图7-17 用于演示自举作用的射随器电路

对该电路的详细开路时间常数计算表明，电容C_π的开路时间常数约为0.6ns，电容C_μ的开路时间常数约为6ns。因此带宽估计为25MHz。PSPICE仿真（如图7-18所示）表明带宽约为27MHz。

通过对输入电阻的对应电容C_μ的自举处理，可以提升该电路的–3dB带宽。如图7-19a所示，在晶体管Q_1的集电极−基极PN结的周围增加了+1倍增益电路。仿真结果（如图7-20所示）表明，该举措大大提升了射随器电路的带宽，其代价是在某些频段出现了增益尖峰。减小增益尖峰的一个方法是增加某些阻尼作用（如图7-21所示）。在图7-21b中，我们展示了阻尼电阻在1kΩ~10kΩ范围内变化的仿真结果（经验推导）。看起来该电路的最优阻尼电阻取值应在5 kΩ左右，可以以最小的增益尖峰换取良好的电路带宽。

① 这个电阻阻值是个比较好的电阻起始点。如果没有基极电阻，使用晶体管2N3904、2N2222、2N3906或者其他信号晶体管搭建的射随器电路可以在非常高的频率点发生振荡（100MHz附近或者更高）。我们也可以使用损耗式铁氧体磁珠与基极串接在一起。

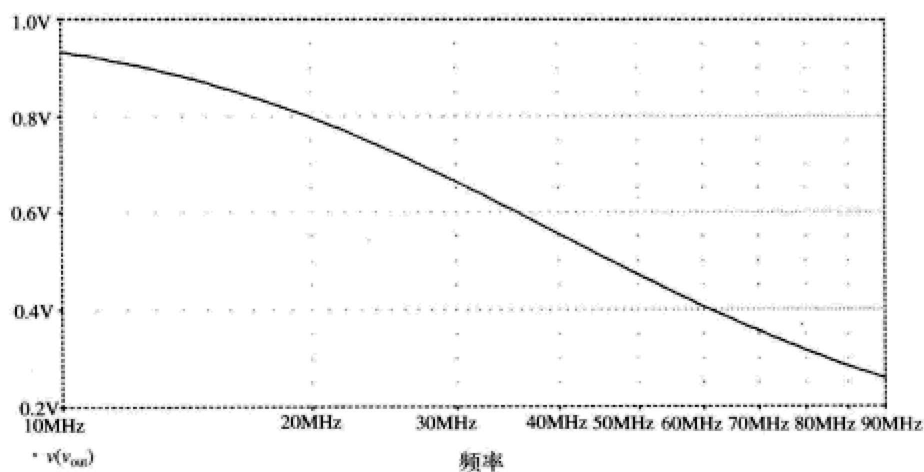
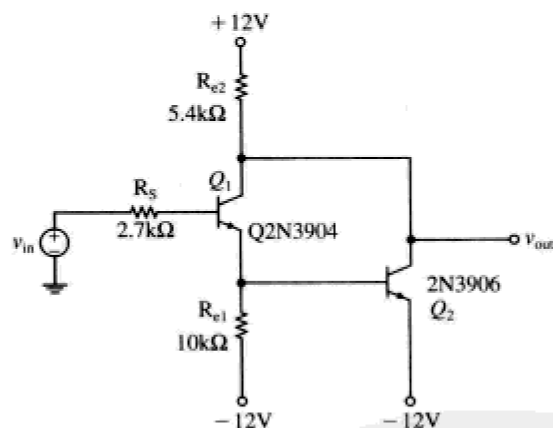
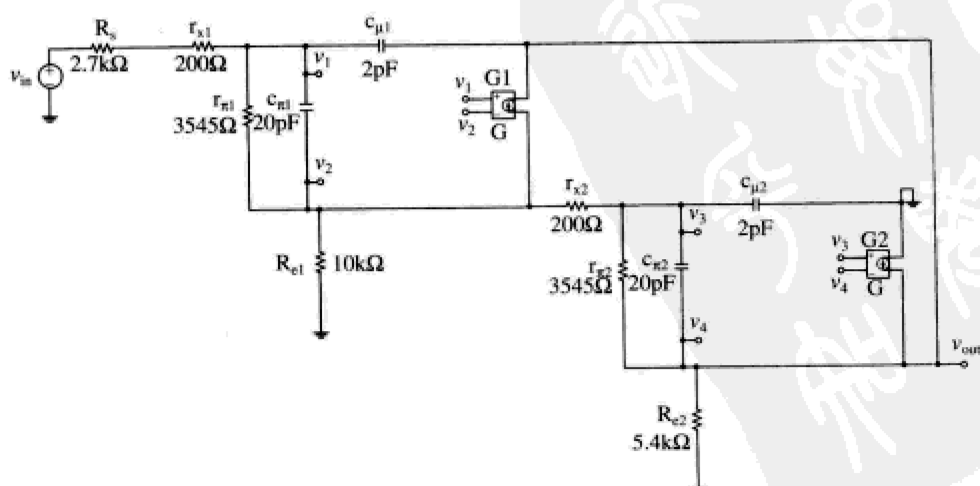


图7-18　用于演示自举电路的射随器，PSPICE仿真结果



（a）电路



（b）小信号模型

图7-19　自举射随器

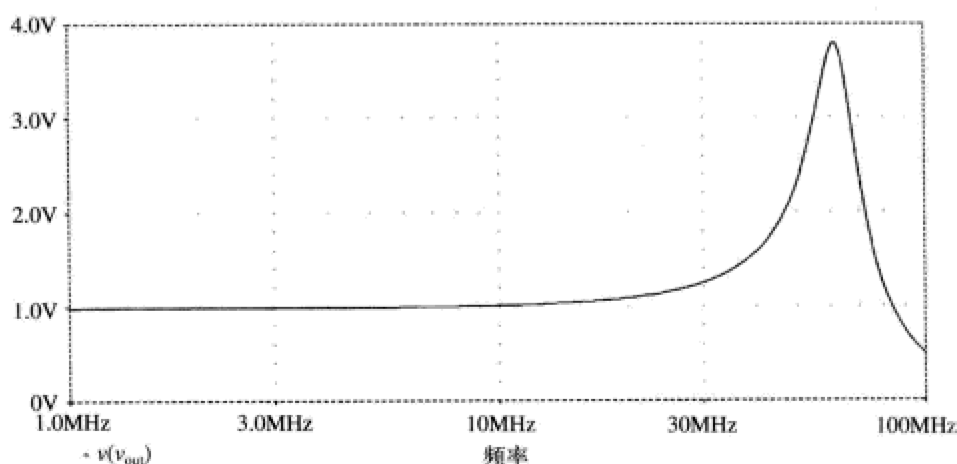
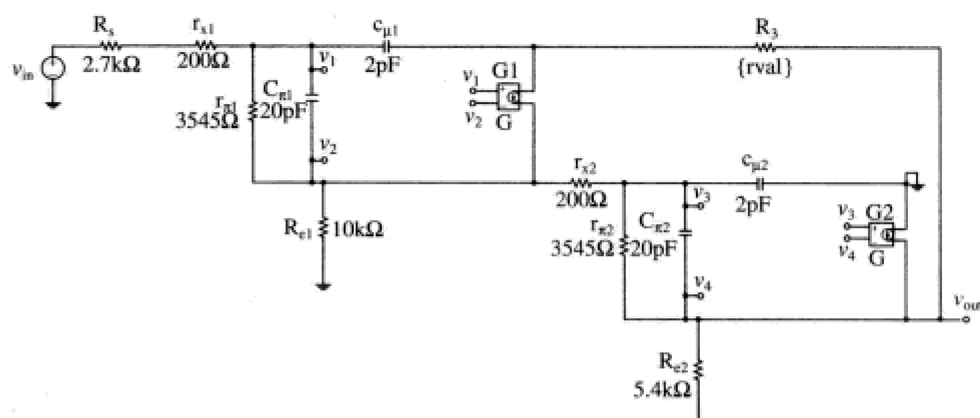
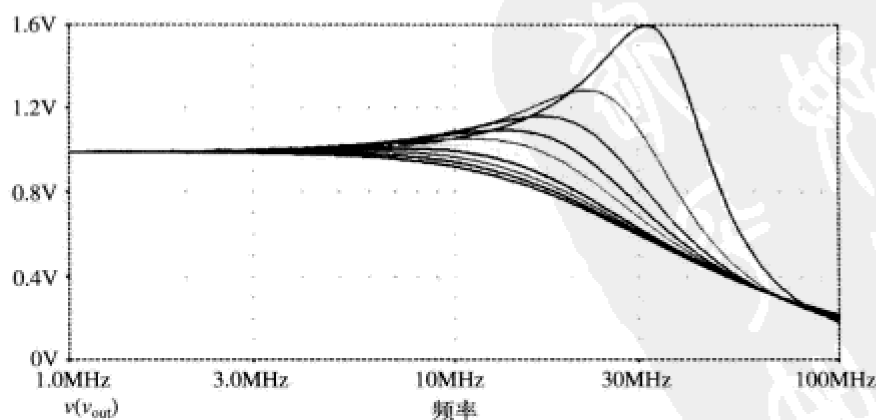


图7-20 自举射随器仿真结果



(a) 小信号电路模型



(b) 阻尼电阻分别为1kΩ、2kΩ、……10kΩ时的PSPICE仿真结果

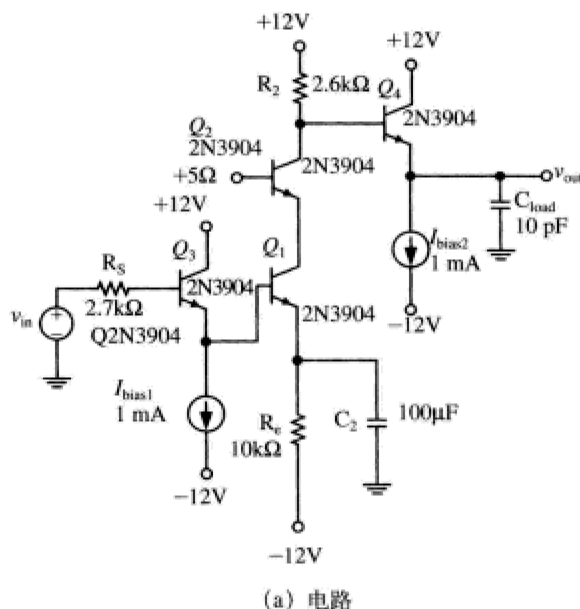
图7-21 自举射随器，增加阻尼电阻以降低增益尖峰效应

例题7.6：另一个自举电路设计实例

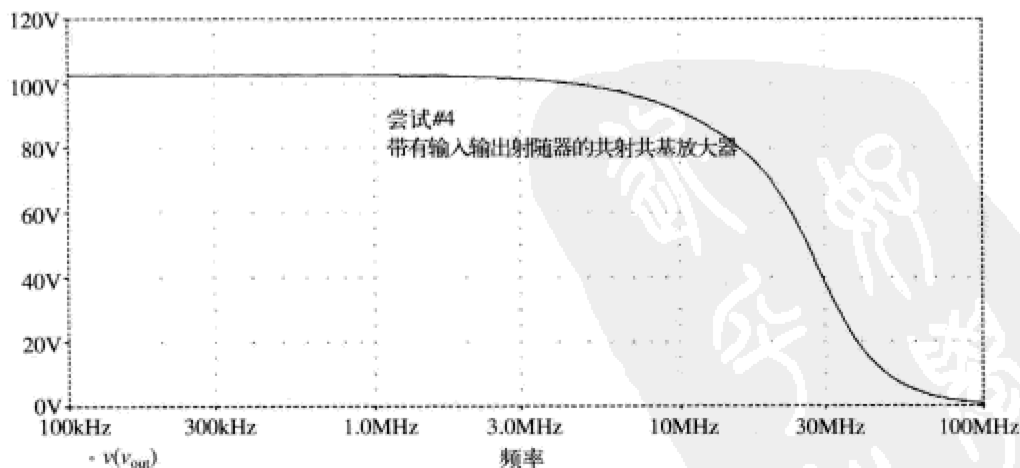
现在，我们重访与第6章相似的放大器电路（如图7-22a所示），通过使用自举电路技术来

进一步扩展该电路的带宽[①]。在该电路中，占主导地位的时间常数是由输入射随器Q_3的电容$C_{\mu3}$与2.7kΩ源电阻交互作用引起的。该电路的增益在100倍以上，带宽（如图7-22b所示）约为19MHz。

为了减小电容$C_{\mu3}$的影响，我们在晶体管Q_3的集电极－基极PN结的周围增加辅助晶体管Q_5，强制其增益为＋1倍（如图7-23a所示）。Q_5为NPN型射随器，强制晶体管Q_3的集电极电流跟随其基极电流增长变化。PSPICE分析（如图7-23b所示）表明，我们确实将放大器的总体带宽扩展到50MHz左右，不过花费的代价是在频率高端出现了某些增益尖峰。



（a）电路



（b）PSPICE仿真曲线，显示带宽约为19MHz

图7-22 另一个设计实例

通过引入辅助晶体管Q_6来对晶体管Q_4进行自举处理（如图7-24a所示），可以使该自举的概念更深入一步。我们可以看到，这导致形成了更为严重的增益尖峰（如图7-24b所示）。

① 该电路的拓扑结构与第6章的电路相似，但是某些细节还是不同的（偏置工作点的取值等）。本节完全求助于PSPICE仿真方法。开路时间常数计算尽管可以演示，但是稍嫌麻烦，弃之不用。

可以定性地分析增益尖峰现象的若干可能原因。我们知道，射随器的电感性输出电阻与寄生电容交互作用可能引发增益尖峰现象。降低电感性增益尖峰效应的一种策略是改变自举晶体管的直流偏置电平。如图7-25所示是将放大器中每个自举晶体管的集电极电流偏置设置在5mA时的响应曲线。可以看到，增益尖峰现象大幅减小，同时放大器的总体带宽约为80MHz。

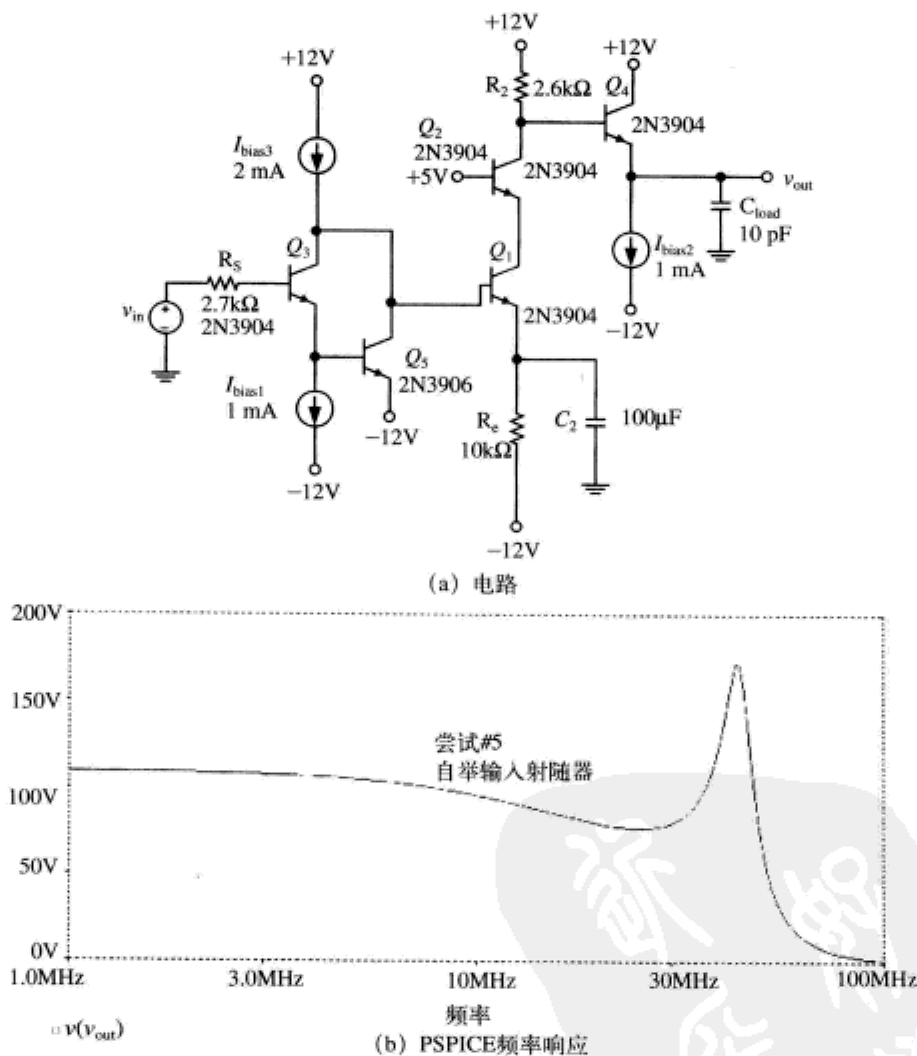
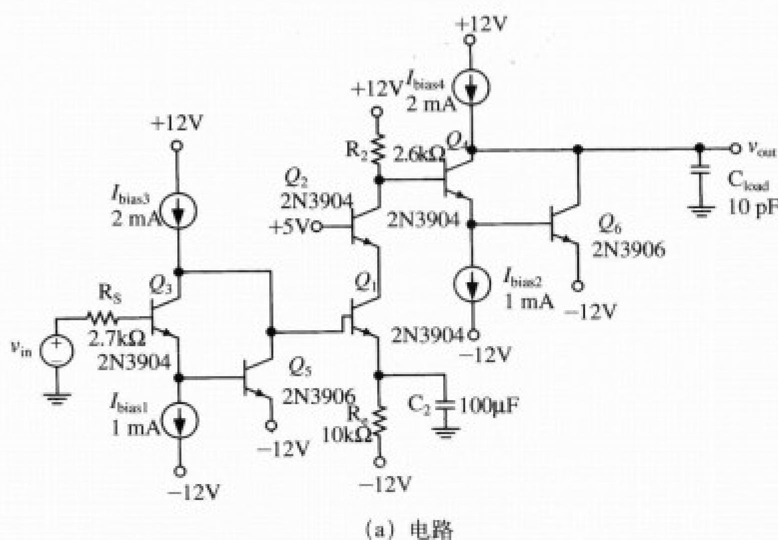
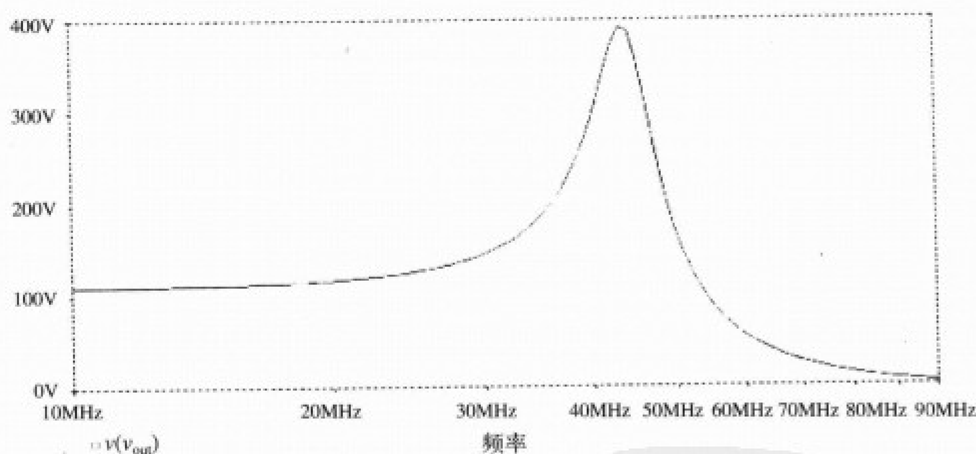


图7-23 使用辅助晶体管Q_5自举输入射随器Q_3的修正电路



（a）电路



（b）PSPICE频率响应

图7-24　通过自举输出射随器Q_4的进一步修正电路

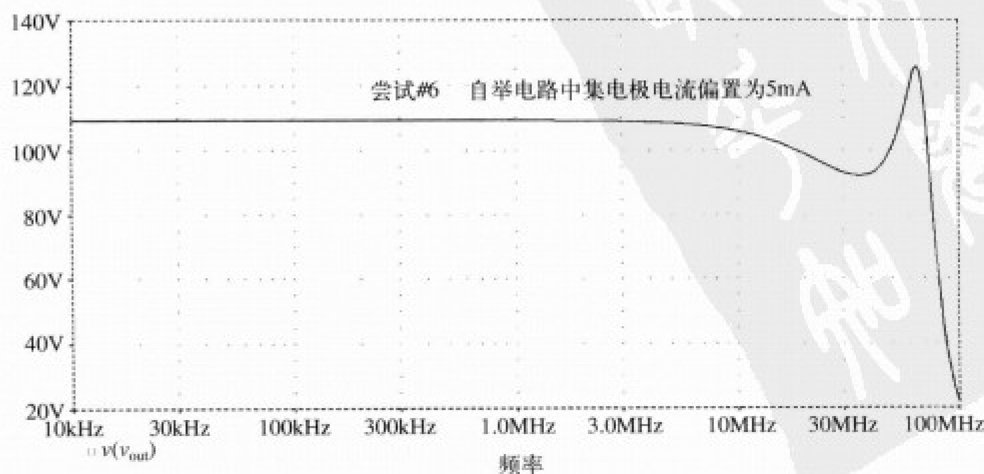


图7-25　射随器集电极电流偏置设置为5mA时的响应曲线

7.4 短路时间常数

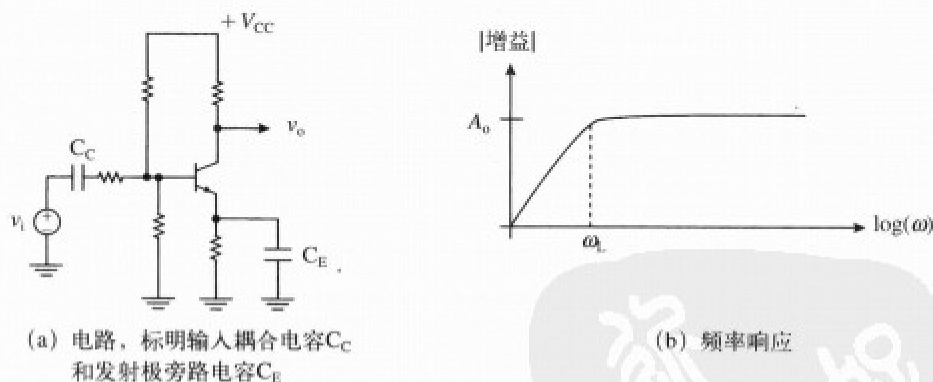
前一章讨论的开路时间常数方法为估算通用放大器的高频断点f_h提供了可能。称为**短路时间常数**（short-circuit time constants）的相似方法则可以用来估算晶体管放大器由于旁路电容与耦合电容形成的低频滚降断点。这个方法同样也适用于通用电路，以确定电路的低频断点。

图7-26a所示的电路用来演示短路时间常数方法的使用。我们直观地知道，放大器的增益－频率曲线如图7-26b所示，频率降低到一定程度时，结电容C_π、C_μ的影响可以忽略不计。短路时间常数方法教给我们–3dB低频频率点ω_L的估计方法。

首先，我们来定性研究该放大器的传递函数。如果我们只关注–3dB的低频频率点，那么就不需要关心晶体管的结电容C_π、C_μ造成的影响。因此，我们将注意力放在耦合电容C_C和发射极旁路电容C_E上。

我们知道，由于耦合电容C_C的影响，传递函数在零频率点的响应为零。这是很容易理解的，因为电容C_C不允许输入信号的直流分量通过。其次，由于发射极旁路电容C_E的影响，传递函数在某个有限频率点也存在一个响应零点①。满足所有这些函数需求的一个传递函数形式为

$$H(s) = K\frac{s(\tau_z s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_1 s+1)} \tag{7-29}$$



（a）电路，标明输入耦合电容C_C和发射极旁路电容C_E　　（b）频率响应

图7-26　典型的交流耦合放大器

为了简化数学计算过程②，我们假设零值响应出现在某个非常低的频率点，该频率点是如此之低，以至于我们完全可以将其近似处理为零频率点。这导致传递函数变为

$$H(s) \approx K'\frac{s^2}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)} \tag{7-30}$$

如果我们将分母相乘展开，可得

$$H(s) \approx K'\frac{s^2}{\tau_1\tau_2 s^2+(\tau_1+\tau_2)s+1} \tag{7-31}$$

这个近似传递函数的伯德图如图7-27所示。我们可以看到，–3dB频率点主要受高频极点

---

① 随着电容C_E的影响逐渐显著，增益增大，这是因为C_E将发射极电阻R_E短路掉了。这就意味着C_E在某个有限频率点使传递函数为零值。

② 该方法在Gray和Searle的著作*Electronic Principles*，pp.542-547也有使用。该方法还在Gray等人的著作*Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*中出现。

控制。在这种情况下，-3dB点近似在$-1/\tau_2$处。使用大分布间隔极点的近似计算方法（第2章推导出来的方法），我们可以得到高频极点的位置，可以粗略估计为

$$p_{\text{high}} \approx -\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}\right) = -\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right) \tag{7-32}$$

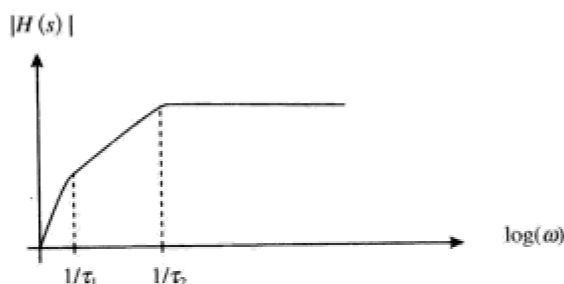


图7-27　近似传递函数$H(s)$的频率响应

对于存在n个低频极点的一般情况（因此传递函数也包含n个零点），我们求得低频带宽ω_L的近似值为

$$\omega_L \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\tau_{pj}} \tag{7-33}$$

简单说来，低频带宽的估计与极点时间常数的倒数之和相等。很不幸，通常情况下很难计算这些极点的时间常数。

又很幸运，确实存在求解时间常数倒数之和的方法。这就是短路时间常数方法，该方法由MIT（麻省理工学院）的Adler教授与其他同事共同提出的。使用短路时间常数方法，我们可以得到，极点时间常数的倒数之和与计算起来相对简单的短路时间常数之和的倒数是精确相等的。我们从数学上得到

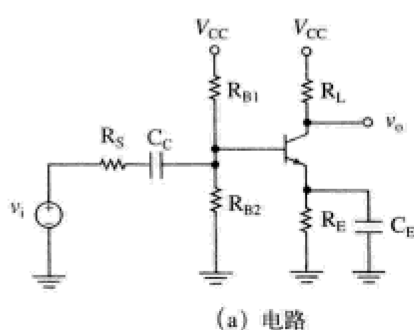
$$\omega_L \approx \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\tau_{pj}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\tau_{scj}} \tag{7-34}$$

这里τ_{SC}为单个的短路时间常数。按照开路时间常数方法的计算步骤，这里采用类比技术也给出短路时间常数的计算技巧：

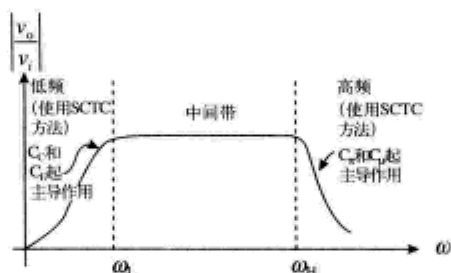
- 确认电路中对低频滚降断点有贡献的各个电容。
- 对于每个电容，将其他电容短路掉，求解面对该电容的电阻。（将其他电容短路掉就是该方法称为“短路时间常数”的原因。）
- 求解每个电容的时间常数。
- 带宽估计则按照式7-35进行求解。

$$\omega_L \approx \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\tau_{scj}} \tag{7-35}$$

请注意，在短路时间常数方法中，我们必须小心决定选取哪些电容。比如，在通用的共射极放大器电路中（如图7-28所示），我们在短路时间常数计算中将不会使用电容C_π和C_μ。C_π和C_μ对带宽的高频门限有贡献，但是对低频门限没有影响。



（a）电路



（b）传递函数，标明低频和高频带宽门限。我们在高频模型中计算-3dB上限频率点ω_H时，使用开路时间常数方法

图7-28 用于短路时间常数分析的共射极放大电路

例题7.7：短路时间常数设计实例

现在，我们做个短路时间常数计算的例子，估算如图7-29a所示电路的低频断点，以及它的中间带增益。我们假设晶体管的电路参数如下：直流电流增益$\beta_F=100$，基极扩展电阻$r_x=100\Omega$，小信号电流增益$h_{fe}=150$。我们还假设晶体管的基极-发射极偏置电压$V_{BE}=0.7V$。

使用如图7-29b所示的电路，求解基极电流和集电极电流的过程如下

$$6V-I_B(R_{B1}\|R_{B2})-V_{BE}-I_ER_E=0$$

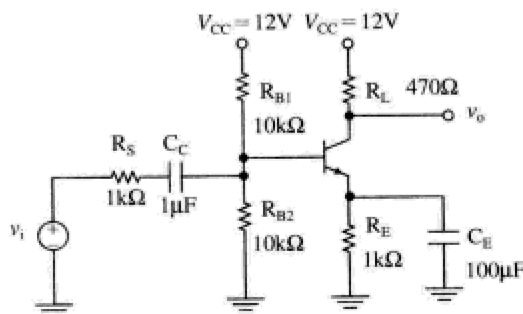
$$6V-\left(\frac{I_C}{\beta_F}\right)(R_{B1}\|R_{B2})-V_{BE}-I_CR_E\approx 0 \tag{7-36}$$

$$I_C\approx\frac{6-V_{BE}}{\left(R_E+\frac{R_{B1}\|R_{B2}}{\beta_F}\right)}\approx\frac{5.3}{\left(1k\Omega+\frac{5k\Omega}{100}\right)}\approx 5mA$$

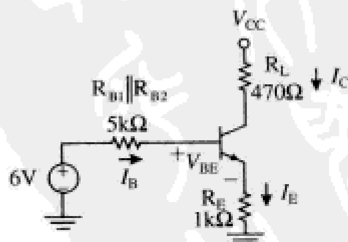
知道了直流偏置工作点的取值，现在我们就可以计算电路的小信号参数

$$g_m=\frac{|I_C|}{V_{TH}}=\frac{0.005}{0.026}\approx 0.19A/V$$

$$r_\pi=\frac{h_{fe}}{g_m}=\frac{150}{0.19}=780\Omega \tag{7-37}$$



（a）原始电路



（b）求解集电极电流的电路

图7-29 用于短路时间常数带宽估计的共射极电路

该电路在低频段和中间带频率段有效的小信号模型如图7-30a所示。在中间带频率段上，耦合电容C_C和旁路电容C_E可以视为短路，形成图7-30b所示电路。现在，我们使用该电路来求解中间频带增益。

$$v_x = v_i\left(\frac{(R_{B1}\|R_{B2})\|(r_x+r_\pi)}{R_s+(R_{B1}\|R_{B2})\|(r_x+r_\pi)}\right) = v_i\left(\frac{5000\|880}{1000+5000\|880}\right) = v_i\left(\frac{748}{1000+748}\right) = 0.428v_i$$

$$v_\pi = v_x\left(\frac{r_\pi}{r_x+r_\pi}\right) = 0.886v_x = 0.379v_i \tag{7-38}$$

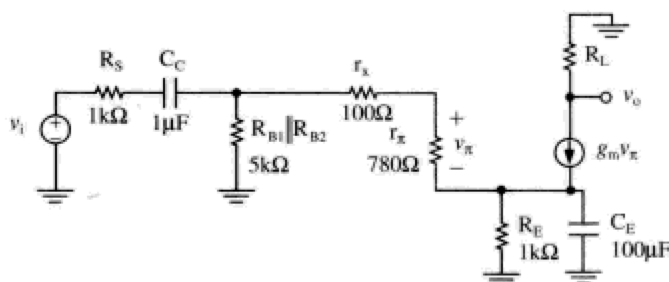
$$v_o = -g_m v_\pi R_L = -(0.19)(0.379v_i)(470) = -33.9 \Rightarrow \frac{v_o}{v_i} = -33.9$$

已经求得了电路的增益，下面我们利用短路时间常数方法来估计其低频断点。耦合电容的短路时间常数电路如图7-31a所示。将发射极旁路电容短路掉，得到耦合电容的短路电阻为

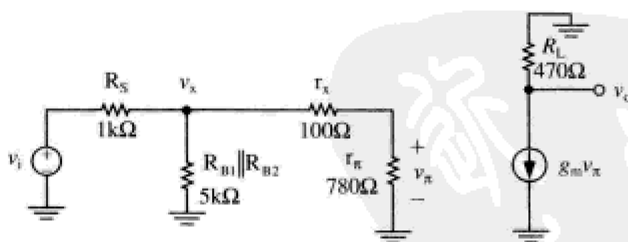
$$R_{SC1} = R_s + (R_{B1}\|R_{B2})\|(r_x+r_\pi) = 1000 + 5000\|880 = 1748\Omega \tag{7-39}$$

其结果是，耦合电容的短路时间常数为

$$\tau_{SC1} = R_{SC1}C_C = (1748)(10^{-6}) = 1.75\times10^{-3}\text{s} \tag{7-40}$$



(a) 对低频和中间带频率有效的电路



(b) 求解中间带增益的中间带电路

图7-30 共射极电路的小信号模型

下面，我们将耦合电容短路掉，使用图7-31b所示电路来求解发射极旁路电容的短路电阻。

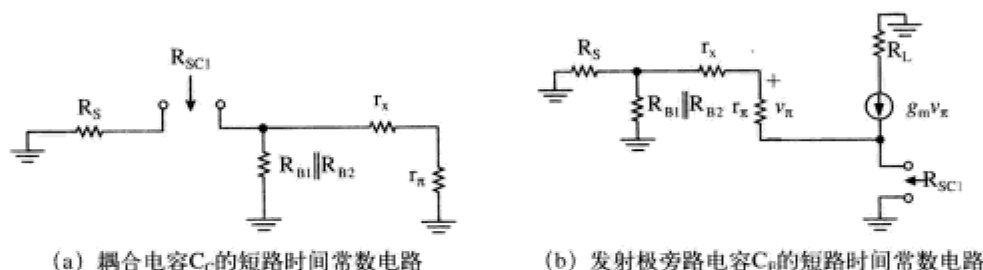
$$R_{SC2} = \frac{R_S\|R_{B1}\|R_{B2} + r_x + r_\pi}{1+h_{fe}} = \frac{833+100+780}{151} = 11.3\Omega \tag{7-41}$$

其结果是，发射极旁路电容的短路时间常数为

$$\tau_{SC2} = R_{SC2}C_E = (11.3)(100\times10^{-6}) = 1.1\times10^{-3}\text{s} \tag{7-42}$$

低频频率断点估计为

$$\omega_L \approx \sum \frac{1}{\tau_{SC}} \approx \frac{1}{\tau_{SC1}} + \frac{1}{\tau_{SC2}} \approx \frac{1}{1.75\times10^{-3}} + \frac{1}{1.1\times10^{-3}} \approx 1480 \ \text{r/s}$$
$$f_L \approx \frac{\omega_L}{2\pi} \approx 235 \ \text{Hz} \tag{7-43}$$



（a）耦合电容C_C的短路时间常数电路　（b）发射极旁路电容C_E的短路时间常数电路

图7-31　求解短路时间常数的电路

PSPICE分析（如图7-32所示）表明，仿真得到的增益与封闭式计算结果相等，–3dB带宽约为220Hz。与开路时间常数方法相似，短路时间常数方法给出的结果也是保守的。实际的–3dB频率断点比该方法预测的频率更低。

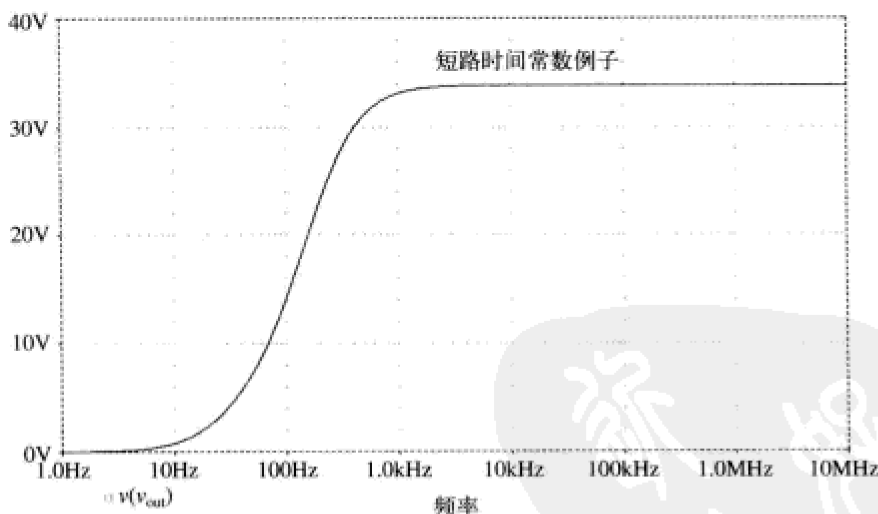
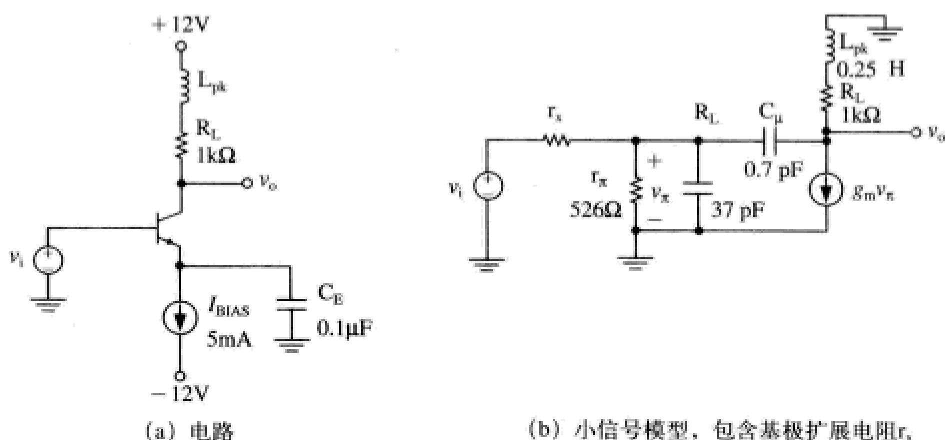


图7-32　短路时间常数例子的PSPICE频率响应曲线，表明增益为−34，−3dB断点约为220Hz

例题7.8：峰化放大器回顾

我们再来回顾第5章的峰化放大器，不过这次不对晶体管的基极电阻r_x的取值做任何限制。在第5章中，我们明白，如果r_x的取值非常小，很容易求解传递函数的闭环形式。然而，在许多小信号晶体管中，r_x的取值非常重要。比如，对于晶体管2N3904来说，r_x的取值为100~250Ω，与集电极电流的直流偏置水平有关。其结果电路如图7-33a所示，小信号模型如图7-33b所示。

在第5章中，我们使用了一个峰化电感$L_{pk}=0.25\mu H$，能够将峰化放大器的带宽增大到390MHz左右。不过，在那个例题中，我们假设r_x的阻值为0Ω。我们再次来研究峰化放大器的性能，不过这次基极电阻为不等于零的有限取值。



（a）电路　　（b）小信号模型，包含基极扩展电阻r_x

图7-33　电感式峰化放大器

在图7-34中，通过对$r_x=0$、$r_x=10\Omega$、$r_x=20\Omega$、$r_x=30\Omega$、$r_x=40\Omega$时的仿真曲线的比较，我们看到r_x对电感式峰化放大器（L_{pk}=0.25mH）的影响。我们看到，r_x的取值很小时，对放大器带宽有严重的有害影响。因此，在带宽计算和估计时，必须小心使用忽略r_x的技巧[①]。

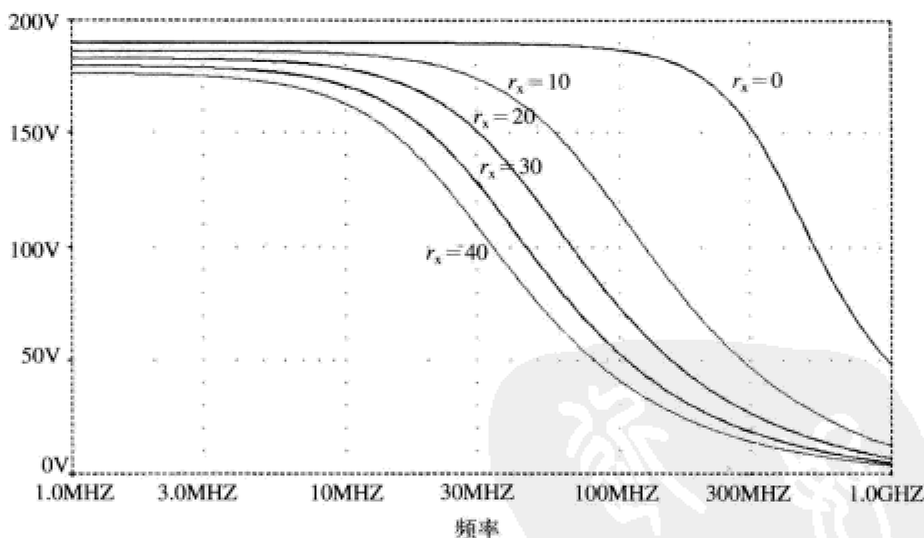


图7-34　电感式峰化放大器（$L_{pk}=0.25\mu H$）的PSPICE仿真曲线，r_x在0~40Ω之间变化

例题7.9：共基极放大器

共基极放大器是高频电路常用的拓扑结构。事实上，共射共基放大器（cascode amplifier）就使用了一个共基极放大器作为其输出缓冲电路，我们在前面已经知道了这一点。在图7-35a所示的共基极放大器电路中，$R_E=1k\Omega$、$R_L=3.3k\Omega$。我们假设$V_{CC}=12V$，$V_{BIAS}=6V$。晶体管的集电极电流$I_C=1mA$，$h_{fe}=100$，$f_T=500MHz$，$C_\mu=1pF$。该放大器的高频小信号模型如图7-35b所示。我们将使用开路时间常数方法来求解其增益，估计其带宽。

该放大器的小信号参数为

① 很不幸，大多数晶体管放大器的数据手册几乎都不提供基极扩展电阻的取值信息。注意，r_x也同时影响放大器的低频增益。

$$g_m = \frac{|I_c|}{V_{TH}} = \frac{1\text{mA}}{26\text{mV}} = 0.038\Omega^{-1}$$
$$r_\pi = \frac{h_{fe}}{g_m} = \frac{100}{0.038\Omega^{-1}} = 2631\Omega \tag{7-44}$$
$$C_\pi = \frac{g_m}{\omega_T} - C_\mu = \frac{0.038}{2\pi(500\times10^6)} - 1\text{pF} = 11\text{pF}$$

使用低频小信号模型（如图7-35c所示），我们可以求解共基极放大器增益的闭环形式解

$$\frac{v_o}{v_i} \approx \frac{R_L}{R_E + \left(\frac{r_x + r_\pi}{h_{fe}}\right)} \tag{7-45}$$

该方程预测放大器的增益为+3.2倍。

我们使用开路时间常数方法和如图7-36所示的电路来预测放大器的带宽。对于电容C_π，我们求解其开路时间常数为

$$R_{\pi o} = r_\pi \left\| \left(\frac{r_x + R_E}{1 + g_m R_E}\right) \approx \frac{1}{g_m} \approx 26\Omega \right.$$
$$\tau_{\pi o} = R_{\pi o} C_\pi = (26)(11\text{pF}) = 0.3\text{ns} \tag{7-46}$$

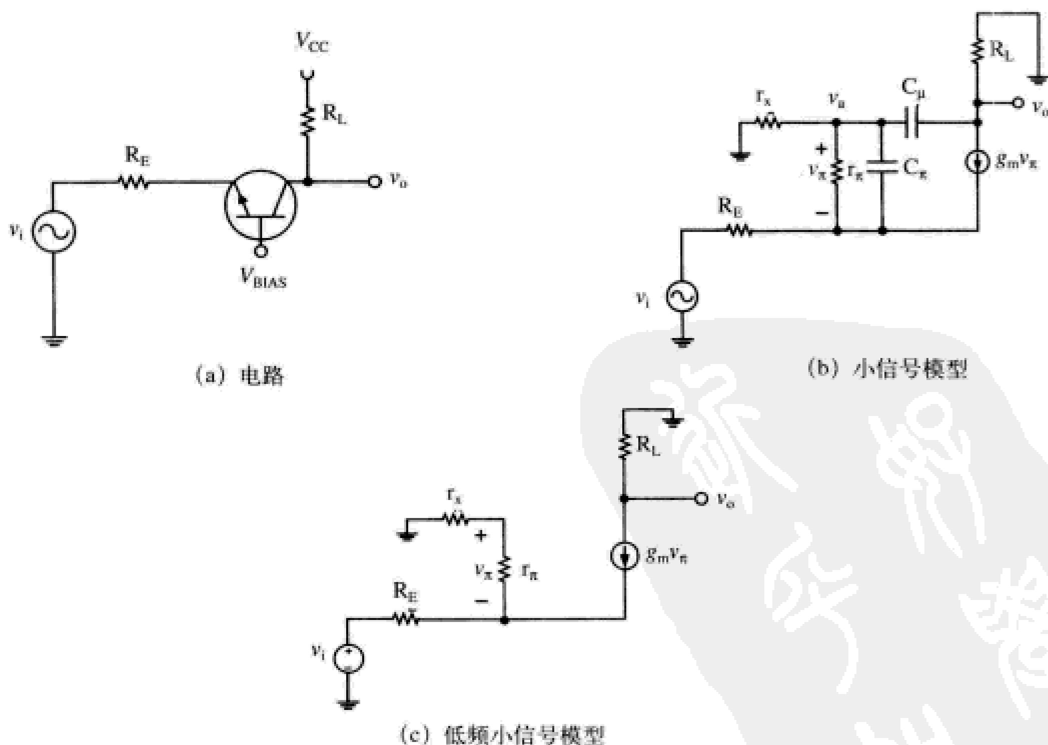


图7-35 共基极放大器

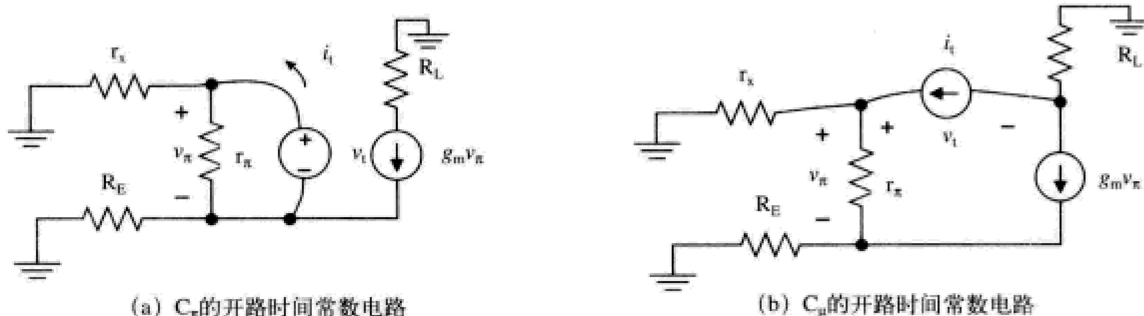


图7-36　求解共基极放大器的开路时间常数的电路

对于电容C_μ，我们解得

$$
\begin{aligned}
R_{\mathrm{EQ1}} &= r_x \| (r_\pi + (1+h_{\mathrm{fe}})R_{\mathrm{E}}) \approx r_x \approx 50\Omega \\
G_{\mathrm{M}} &\approx \frac{g_m}{1+g_m R_{\mathrm{E}}} \approx \frac{1}{R_{\mathrm{E}}} \approx 0.001 \\
R_{\mu\mathrm{o}} &= R_{\mathrm{EQ1}} + R_{\mathrm{L}} + G_{\mathrm{M}} R_{\mathrm{L}} R_{\mathrm{EQ1}} = 50 + 3300 + (0.001)(3300)(50) \approx 3515\Omega \\
\tau_{\mu\mathrm{o}} &= R_{\mu\mathrm{o}} C_\mu = (3515)(1\,\mathrm{pF}) = 3.5\,\mathrm{ns}
\end{aligned}
\tag{7-47}
$$

该放大器的开路时间常数之和为3.8ns，因此带宽估计为

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{h}} &= \frac{1}{3.8\,\mathrm{ns}} \approx 263\,\mathrm{Mrad/s} \\
f_{\mathrm{h}} &= \frac{\omega_{\mathrm{h}}}{2\pi} \approx 41.9\,\mathrm{MHz}
\end{aligned}
\tag{7-48}
$$

PSPICE仿真（如图7-37所示）表明，放大器的增益为＋3.2倍，–3dB带宽为44.4MHz。

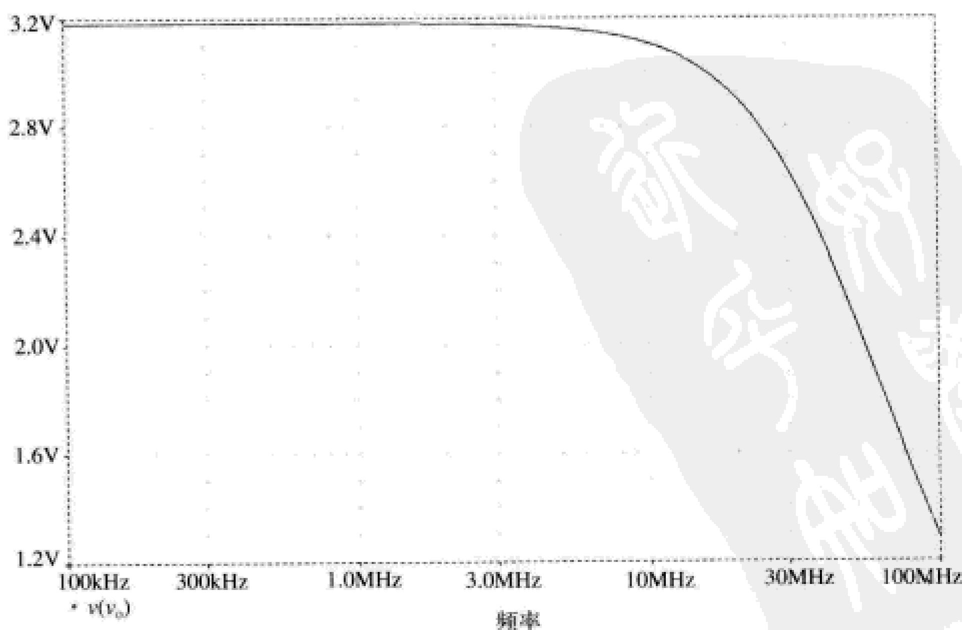


图7-37　共基极放大器的PSPICE仿真曲线，表明增益为＋3.2，–3dB带宽为44.4MHz

例题7.10：电流放大器

如图7-38所示是用于快速电流开关的放大器电路。能够对电流进行开关与/或放大的相似放大器电路广泛用于电流反馈型运算放大器（current-feedback operational amplifier）等高频电路。我们设定该电路的小信号工作点①，使用开路时间常数方法来估计其带宽。对于增长差模信号，我们可以将发射极接地（因为该节点的增长电压摆动为零）形成图示电路。通过观察可以发现，电容C_π和C_μ的开路电阻相同，得

$$
\begin{aligned}
R_{o1} &= r_x \| r_\pi \\
R_{o2} &= r_x \| r_\pi \\
\sum \tau_{oc} &= (r_x \| r_\pi)(C_\pi + C_\mu) \\
\omega_h &= \frac{1}{\sum \tau_{oc}} = \frac{1}{(r_x \| r_\pi) + (C_\pi + C_\mu)}
\end{aligned}
\tag{7-49}
$$

因为没有米勒效应，高频带宽很可能非常高。比如，对于电流开关型晶体管2N3904，其$f_T = 300\text{MHz}$，$\omega_T = 1.89 \times 10^9 \text{rad/s}$，$r_x = 100\Omega$，$h_{fe} = 150$，$C_\mu = 2\text{pF}$。如果我们将该晶体管的直流工作点偏置设置为$I_{BIAS} = 4\text{mA}$，那么$I_{C1} = I_{C2} = 2\text{mA}$。求解得到$C_\pi = 38.8\text{pF}$，$r_\pi = 1950\Omega$。形成的开路时间常数带宽估计为$\omega_h = 257\text{Mrad/s}$（$f_h = 41\text{MHz}$）。SPICE仿真（如图7-39所示）表明$f_h = 41.5\text{MHz}$，因此估计结果是极其准确的。

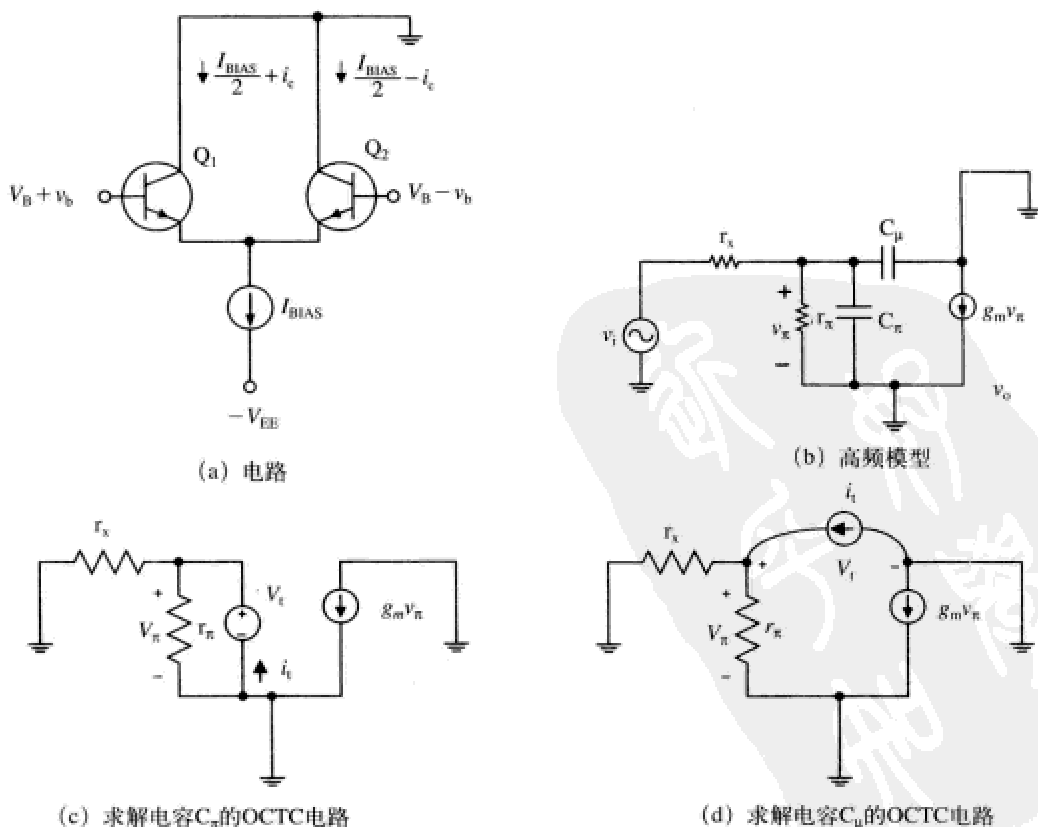


图7-38 电流开关放大器

① 后续章节将会更深入地讨论电流反馈运算放大器。

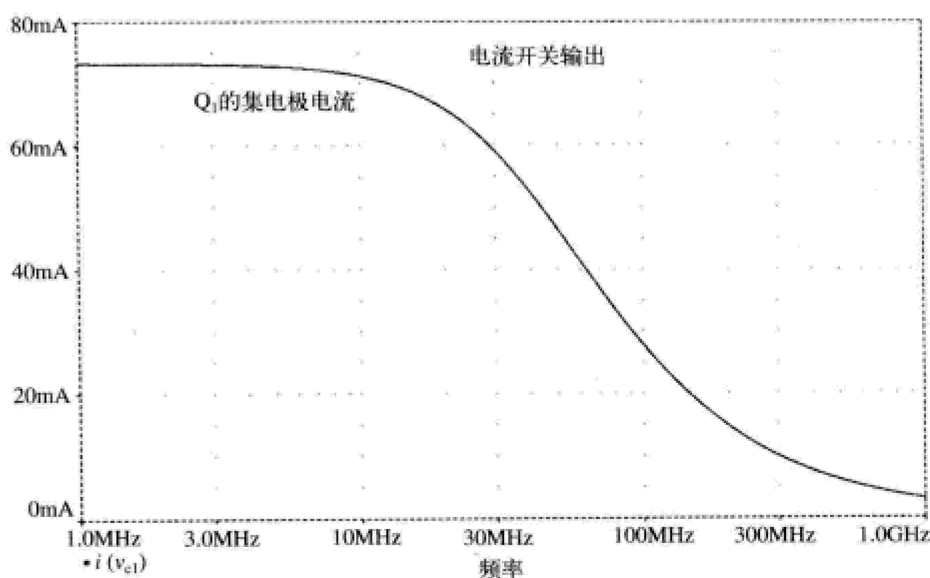


图7-39　电流开关放大器的频率响应，表明其−3dB带宽为−41.5MHz

7.5　极点分裂技术

极点分裂（pole splitting）是一项广泛用于修正放大器响应特性的技术，尤其是在运算放大器中。我们利用图7-40所示的电路来演示极点分裂技术。该电路将放大器抽象为增益$-A$、输入电阻R_i、输出电容C_i、输出电阻R_o以及输出电容C_o组成的电路模型。我们增加反馈电容C_f以修正极点位置，下面解释为什么这样做。这可能不是很直观，但是该系统确实存在2个极点（而不是3个极点）。

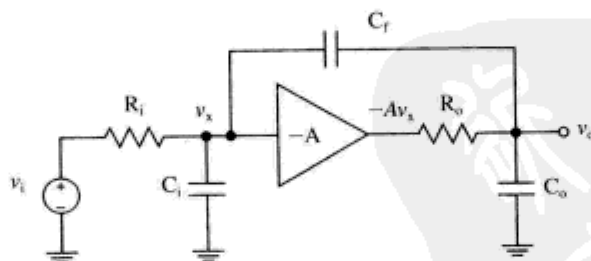


图7-40　用于演示极点分裂的电路

首先，我们使用该电路写出节点v_x以及输出节点v_o的节点方程。

$$\begin{aligned}&(1)\ (v_i - v_x)G_i - v_x C_i s + (v_o - v_x)C_f s = 0\\&(2)\ (-Av_x - v_o)G_o - v_o C_o s + (v_x - v_o)C_f s = 0\end{aligned} \tag{7-50}$$

其次，将上述方程按照v_x和v_o重组各项。

$$\begin{aligned}&(1)\ -v_x[G_i + (C_i + C_f)s] + v_o C_f s = -v_i G_i\\&(2)\ v_x[C_f s - AG_o] - v_o[G_o + (C_o + C_f)s] = 0\end{aligned} \tag{7-51}$$

接下来，将方程（1）除以G_i，方程（2）除以G_o。

$$(1) -v_x[1+R_i(C_i+C_f)s]+v_oR_iC_fs=-v_i$$
$$(2) v_x[R_oC_fs-A]-v_o[1+R_o(C_o+C_f)s]=0 \tag{7-52}$$

我们将其写成矩阵形式，为下面使用克莱姆法则做准备。

$$\begin{bmatrix} [R_i(C_i+C_f)s+1] & R_iC_fs \\ R_oC_fs-A & [R_o(C_o+C_f)s+1] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -v_i \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7-53}$$

使用克莱姆法则，我们可以得到输出电压v_o的解析表达式

$$v_o = \frac{\det\begin{bmatrix} [R_i(C_i+C_f)s+1] & -v_i \\ R_oC_fs-A & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} [R_i(C_i+C_f)s+1] & R_iC_fs \\ R_oC_fs-A & [R_o(C_o+C_f)s+1] \end{bmatrix}} \tag{7-54}$$

复杂的代数变换之后，我们可以得到输入输出传递函数的解析表达式

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{-A\left(1-\frac{R_oC_fs}{A}\right)}{R_iR_o(C_iC_o+C_iC_f+C_fC_o)s^2+(R_i(C_i+(1+A)C_f)+R_o(C_o+C_f))s+1} \tag{7-55}$$

下面，我们令电容$C_f=0$，来做个完整性检查，以确定传递函数看起来是否是正确的。

$$\left.\frac{v_o}{v_i}\right|_{C_f=0} = \frac{-A}{R_iR_oC_iC_os^2+(R_iC_i+R_oC_o)s+1} = \frac{-A}{(R_iC_is+1)(R_oC_os+1)} \tag{7-56}$$

令$C_f=0$，输入和输出之间就不存在耦合。因为令$C_f=0$，传递函数有两个极点1/（R_iC_i）、1/（R_oC_o），这是正确的。

在另一项完整性检查中，我们可以使用开路时间常数方法来分析该放大器，确定开路时间常数求解结果之和是否与前面推导的增益表达式中的s一次项的系数为相同值。

对于电容C_i，我们将C_o和C_f开路，使用如图7-41a所示电路求解面对C_i的电阻。

$$R_{o1}=R_i$$
$$\tau_{o1}=R_{o1}C_i=R_iC_i \tag{7-57}$$

对于电容C_o，我们将C_i和C_f开路，使用图7-41b所示电路求解面对C_o的电阻。

$$R_{o2}=R_o$$
$$\tau_{o2}=R_{o2}C_o=R_oC_o \tag{7-58}$$

对于电容C_f，使用图7-41c所示电路，求解过程相对复杂一些。

$$v_t=i_tR_i+i_tR_o+Ai_tR_i$$
$$R_{o3}=\frac{v_t}{i_t}=R_o+(1+A)R_i \tag{7-59}$$
$$\tau_{o3}=R_{o3}C_f=(R_o+(1+A)R_i)C_f$$

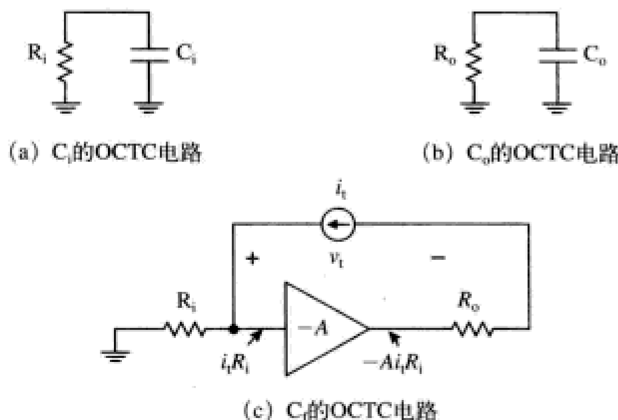
开路时间常数之和为

$$\sum\tau_{oc}=\tau_{o1}+\tau_{o2}+\tau_{o3}=R_iC_i+R_oC_o+(R_o+(1+A)R_i)C_f \tag{7-60}$$

这与增益表达式中的s一次项的系数完全相同，这是对式(7-55)结果的另一项完整性检查。

为了求解极点的位置，我们假设有两个极点，它们分布在负实轴上，相距很远，宽带放大器经常如此。极点相距很远的二阶系统的极点位置近似为

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + 1} \\
p_{\text{low}} &\approx -\frac{1}{a_1} \\
p_{\text{high}} &\approx -\frac{a_1}{a_2}
\end{aligned}
\tag{7-61}
$$



(a) C_i的OCTC电路 (b) C_o的OCTC电路

(c) C_f的OCTC电路

图7-41 极点分裂放大器的开路时间常数电路

利用该近似式，我们可以得到该放大器的低频极点（p_{low}）的大致位置和高频极点（p_{high}）的大致位置为

$$
\begin{aligned}
p_{\text{low}} &\approx -\frac{1}{(R_i(C_i + (1+A)C_f) + R_o(C_o + C_f))} \\
p_{\text{high}} &\approx -\frac{(R_i(C_i + (1+A)C_f) + R_o(C_o + C_f))}{R_i R_o (C_i C_o + C_i C_f + C_f C_o)}
\end{aligned}
\tag{7-62}
$$

如果我们假设$AR_iC_f \gg R_iC_i$，$AR_iC_f \gg R_oC_o$以及$AR_iC_f \gg R_oC_f$，还可以进一步近似为

$$
\begin{aligned}
p_{\text{low}} &\approx -\frac{1}{AR_iC_f} \\
p_{\text{high}} &\approx -\frac{AR_iC_f}{R_iR_o(C_iC_o + C_iC_f + C_fC_o)} \approx -\frac{A}{R_o\left(\dfrac{C_iC_o}{C_f} + C_i + C_o\right)}
\end{aligned}
\tag{7-63}
$$

我们看到了非常重要的函数关系：随着AC_f增大，低频极点在频率轴上降低，高频极点则在频率轴上升高，如图7-42所示。事实上，主控极点是由输入电阻和反馈电容的米勒乘积形成的。在运算放大器中，具有单个主控极点非常有用，极点分裂技术则用于完成这一设计。

极点分裂放大器的另一个电路模型如图7-43所示。这是共射极放大器驱动电容负载的电路模型。写出节点v_a和v_o的节点方程，我们就可以求解传递函数了。

$$
\begin{aligned}
&(1)\ (v_i - v_a)G_i - v_aC_is + (v_o - v_a)C_fs = 0 \\
&(2)\ -g_mv_a - v_oG_o - v_oC_os + (v_a - v_o)C_fs = 0
\end{aligned}
\tag{7-64}
$$

我们注意到这些节点方程与前面所述的极点分裂放大器是一致的。因此，我们进行如下替换后就可以使用前面的结果。

$$
A \Rightarrow g_mR_o \tag{7-65}
$$

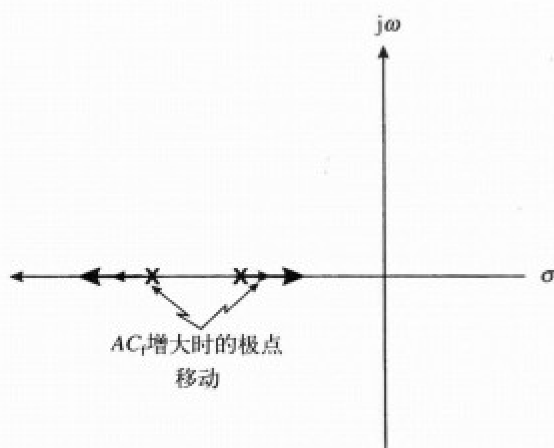


图7-42 随着AC_f增大，极点在负实轴上移动

因此，该放大器的传递函数为

$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{-g_mR_o\left(1-\frac{C_f s}{g_m}\right)}{R_iR_o(C_iC_o+C_iC_f+C_fC_o)s^2+(R_i(C_i+(1+g_mR_o)C_f)+R_o(C_o+C_f))s+1} \tag{7-66}$$

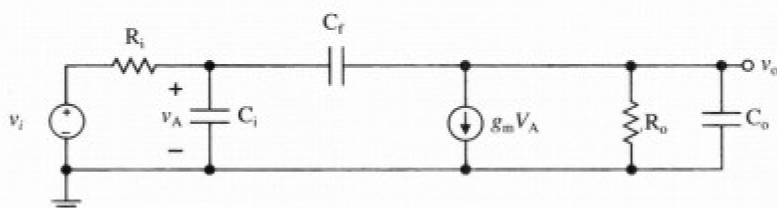


图7-43 另一个极点分裂放大器。这是典型的单极晶体管放大器电路模型。节点方程表明，该放大器与前面的极点分裂放大器是拓扑等效的

例题7.11：极点分裂实例

这个数字实例将演示极点分裂技术是如何发挥作用的。我们考虑图7-43所示的放大器，假设具有下列参数：$g_m=0.01\text{A/V}$，$R_o=10^5\Omega$，$R_i=10^5\Omega$，$C_i=C_o=10\text{pF}$。我们将看到随着C_f从0pF变化到30pF，极点位置是如何移动的。令$C_f=0$，我们可以得到两个非耦合极点，如下

$$p_1=-\frac{1}{R_iC_i}=-10^5\ \text{rad/s}$$
$$p_2=-\frac{1}{R_oC_o}=-10^6\ \text{rad/s} \tag{7-67}$$

当我们增大C_f时，低频极点在频率轴上向下移动，高频极点在频率轴上向上移动。如表7-2所示。如果我们假设$g_mR_oR_iC_f \gg R_iC_i$，R_oC_o以及R_oC_f，可以将极点位置近似为

$$p_{low}\approx-\frac{1}{g_mR_oR_iC_f}$$
$$p_{high}\approx-\frac{g_m}{\left(\frac{C_iC_o}{C_f}+C_i+C_o\right)} \tag{7-68}$$

图7-44说明极点位置随C_f增大时的变化。

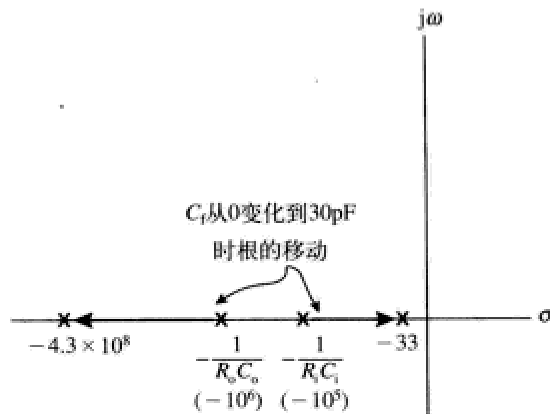


图7-44　极点分裂放大器实例随着C_f从0变化到30pF时的极点移动图

表7-2　极点分裂放大器的极点和零点作为反馈电容C_f的函数随着C_f变化的表格

C_f	ω_{p1}	ω_{p2}	ω_z
0	−105rad/s	−106rad/s	+∞
1pF	−988	-8.4×10^7	$+10^{10}$
5pF	−199	-2.5×10^8	$+2\times10^9$
10pF	−100	-3.3×10^8	$+10^9$
20pF	−49	-4×10^8	$+5\times10^8$
30pF	−33	-4.3×10^8	$+3.3\times10^8$

7.6　本章习题

习题7.1

(a) 假设图7-45所示的电路受交流电压源驱动。使用一种直观方法，比如思考性实验等，描绘v_o/v_i幅度响应的伯德图的形状。

(b) 使用短路时间常数方法求解低频断点f_L。

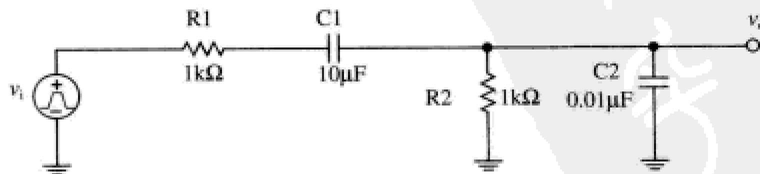


图7-45　习题7.1电路

习题7.2

对于图7-46所示的晶体管放大器电路，使用短路时间常数方法估计低频−3dB点的频率。对于晶体管MPSH20，可以假设$r_x=20\Omega$，交流电流增益$h_{fe}\approx$直流电流增益$h_{FE}=25$，$C_\mu=0.9\text{pF}$，$f_T=630\text{MHz}$。做出合理近似，并且进行评述和验证。假设室温为25°C，即$kT/q=26\text{mV}$。

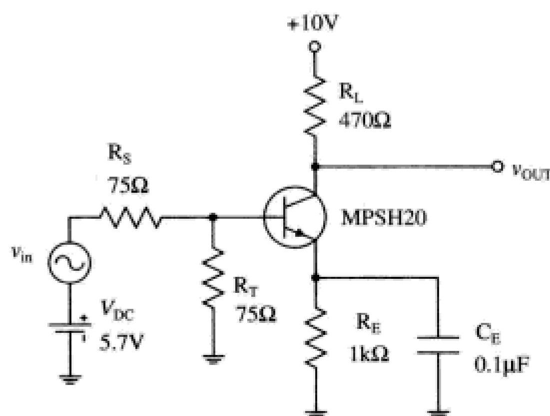


图7-46 习题7.2的共发射极放大器电路

习题7.3

如图7-47所示是演示放大器的米勒效应的一种合理模型。放大器具有无限大输入电阻、零输出电阻、增益$-A$特性，其传递函数为$v_o=-Av_x$。使用开路时间常数方法，求解该放大器的-3dB带宽。如果增益$A=+1$，带宽又是多少呢？

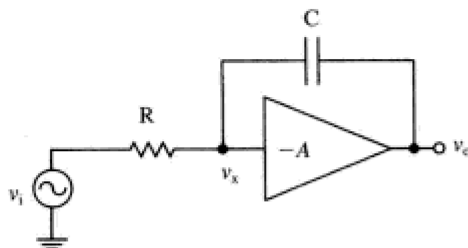


图7-47 习题7.3电路

习题7.4

图7-48所示电路是发射极退化的共发射极放大器的小信号模型。电路负载电阻$R_L=1\text{k}\Omega$，发射极退化电阻$R_E=22\Omega$。假设晶体管的直流偏置为集电极电流$I_C=10\text{mA}$。使用开路时间常数方法求解电路增益，估计其带宽。假设晶体管的小信号参数为$r_x=100\Omega$，$r_\pi=1\text{k}\Omega$，$g_m=0.1\text{A/V}$，$C_\pi=20\text{pF}$，$C_\mu=2\text{pF}$。

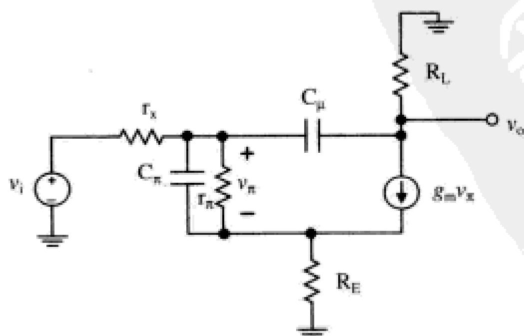


图7-48 习题7.4和习题7.5的发射极退化的共射极放大器电路

习题7.5

使用PSPICE软件对该电路进行仿真。在仿真中，评论该电路工作在$R_E = 22\Omega$、$R_E = 47\Omega$和$R_E = 100\Omega$时的差异。

习题7.6

下面的电路是个视频放大器，使用共基极放大器来驱动射随器。源电阻R_S可能是将信号输入到放大器的50Ω传输线的电阻（如图7-49所示）。

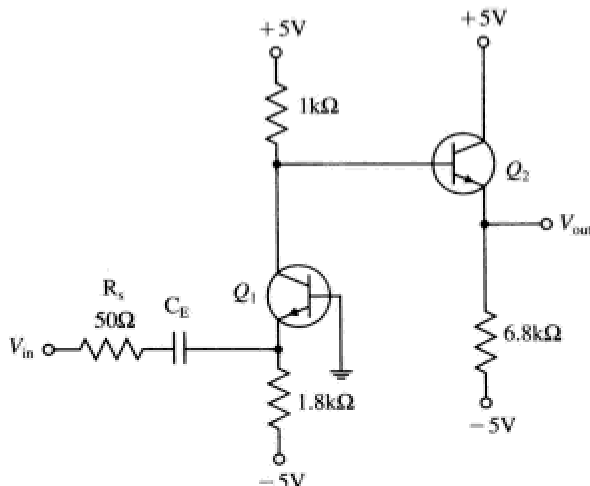


图7-49　习题7.6电路

假设该电路的工作条件为：两个晶体管的参数相同，$h_{FE} = 50$，$h_{fe} = 50$，$r_x = 50\Omega$。

(a) 输出电压V_{out}的工作点取值为多少？

(b) 中间带增益v_o/v_{in}为多少？

(c) 假设设计规定下限截止频率为50Hz，那么电容C_E的取值应为多少？

(d) 使用SPICE仿真来验证前面的计算结果。

习题7.7

对于图7-50所示电路，假设输入电压源为交流源，直流偏置为0V，工作在25°C。

(a) 假设晶体管内部电容C_π、C_μ的影响可以忽略不计，求解射随器的低频段和中间带增益。

(b) 使用开路时间常数方法，估计下面所示缓冲器的带宽。（在开路时间常数估计中，可以从晶体管2N3904的数据手册中查找电容C_π、C_μ的合适取值。）

(c) 使用SPICE对电路进行仿真，将SPICE仿真结果与OCTC计算结果进行比较。在SPICE模型中，可以直接输入小信号模型。（也就是说，不使用2N3904的SPICE模型，在小信号模型中直接输入C_π、C_μ、r_π、$g_m v_\pi$发生器等参数。）

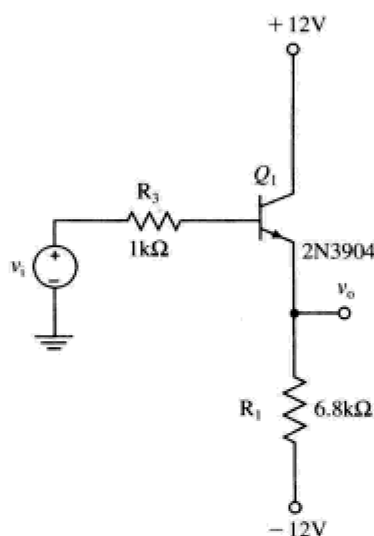


图7-50 习题7.7电路

7.7 参考文献

Abidi, A., "On the operation of cascode gain stages," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 23, no. 6, December 1988, pp. 1434—1437. 演示使用自举技术提升MOS放大器直流增益的有趣文档。

Barna, A., "On the Transient Response of Emitter Followers," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, June 1973, pp. 233-235.

Centurelli, F., Luzzi, R., Olivieri, M., and Trifiletti, A., "A bootstrap technique for wideband amplifiers," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 48, no. 10, October 2002, pp. 1474-1480.

Chuang, C. T., "Analysis of the settling behavior of an operational amplifier," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 17, no. 1, February 1982, pp. 74-80.

Choma, J., Jr., "Simplified design guidelines for dominant pole amplifiers peaked actively by emitter or source followers," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 36, no. 7, July 1989,pp.1005-1010.

Eschauzier, R. G. H., Kerklaan, L. P. T., and Huijsing, J. H., "A 100 MHz 100 dB operational amplifier with multipath nested miller compensation structure," *Proceedings of the 1992 IEEE Solid-State Circuits Conference*, (ISSCC), February 19-21, 1992, pp. 196-197.

Filipkowski, A., "Poles and zeros in transistor amplifiers introduced by Miller effect," *IEEE Transactions on Education*, vol. 42, no. 4, November 1999, pp. 349-351.

Fong, Keng Leong, and Meyer, R. G., "High-frequency nonlinearity analysis of commonemitter and differential-pair transconductance stages," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 33, no. 4, April 1998, pp. 548-555.

Grebene, Alan, *Bipolar and MOS Analog Integrated Circuit Design*, John Wiley, 1984.

Gray, Paul R., Hurst, Paul, Lewis, Stephen, and Meyer, Robert, *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, 4th edition, John Wiley, 2001.

Hamilton, D. K., "Use of inductive compensation for improving bandwidth and noise performance of high frequency optical receiver preamplifiers," *IEEE Proceedings G: Circuits, Devices and Systems*, vol. 138, no. 1, Feb. 1991, pp. 52-55.

Ki, Wing-Hung, Der, L., and Lam, S., "Re-examination of pole splitting of a generic single stage amplifier," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 44, no. 1, January 1997, pp. 70-74.

Kozikowski, J., "Analysis and Design of Emitter Followers at High Frequencies," *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1964, pp. 129-136.

Lee, Thomas, *The Design of CMOS Radio-Frequency Integrated Circuits*, Cambridge University Press, 1998.

Makris, C. A., and Toumazou, C., "Two pole, high speed operational amplifier modelling, methods and techniques," *Proceedings of the European Conference on Circuit Theory and Design*, September 5-8, 1989, pp. 304-308.

Oh, Yong-Hun, and Lee, Sang-Gug, "An inductance enhancement technique and its application to a shunt-peaked 2.5 Gb/s transimpedance amplifier design," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 51, no. 11, Nov. 2004, pp. 624-628.

Palmisano, G., and Palumbo, G., "An optimized Miller compensation based on voltage buffer," *Proceedings of the 38th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, August 13-16, 1995, pp. 1034-1037.

Solomon, J. E., "The monolithic op amp: a tutorial study," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 9, no. 6, December 1974, pp. 314-332.

Thompson, Marc T., "Design Linear Circuits Using OCTC Calculations," *Electronic Design (Special Analog Issue)*, June 24, 1993, pp. 41-47.

______, "Network Tricks Aid in OCTC," *Electronic Design*, December 16, 1993, pp. 67-70. Yang, H. C., and Allstot, D. J., "An equivalent circuit model for two-stage operational amplifiers," *Proceedings of the 1988 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, June 7-9, 1988, pp. 635-638.

______, "Modified modeling of Miller compensation for two-stage operational amplifiers," *Proceedings of the 1991 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, June 11-14, 1991, pp. 2557-2560.



第8章　高增益双极性放大器和BJT电流镜

本章概要

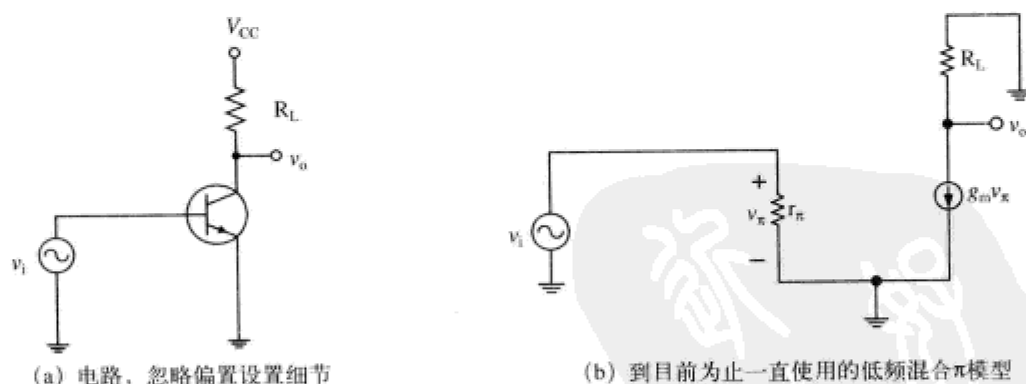
- 本章我们讨论更为详细的双极性晶体管增长模型，考虑基区宽度调制效应的影响。基区宽度调制形成的电阻元件对高增益放大器、射随器和电流镜均有重要的设计影响。

8.1　增大混合π模型的需求

到目前为止，我们考虑的混合π电路模型均假设双极性晶体管的增长输出电阻是无限大的。不过，实际情况并非如此，任何人只要在波形记录器上观察过晶体管特性曲线都可以明白这一点。我们需要考虑基区宽度调制效应（base-width modulation）来解释这一事实，即从晶体管集电极端看到的输出电阻是有限的。

如图8-1所示是电阻性负载的共射极放大器电路。为了使输出电压摆幅能够达到最大，我们将输出电压V_o的直流偏置工作点设置为$V_{CC}/2$（该电路图没有明确说明这一点）。反过来，这同时又设置了晶体管的集电极电流、跨导等参数。

$$g_m = \frac{|I_C|}{kT/q} = \frac{V_{CC}}{2R_L V_{TH}} \tag{8-1}$$



（a）电路，忽略偏置设置细节　　（b）到目前为止一直使用的低频混合π模型

图8-1　电阻性负载的共射极放大器电路

对于电阻性负载的共射极放大器，该电路导致形成最大的增长增益[①]。

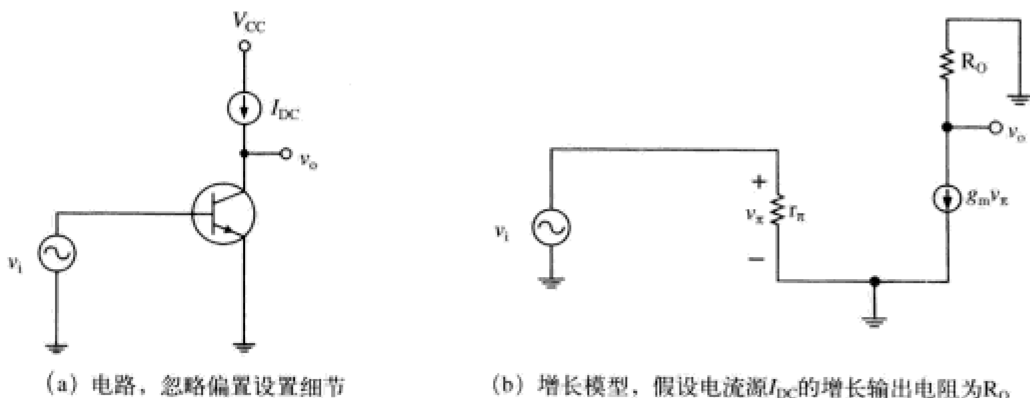
$$GAIN_{max} = -\frac{V_{CC}}{2V_{TH}} \tag{8-2}$$

如果$V_{CC} = +12V$，那么形成的最大增长增益为−230。

在不随意提高集电极电压情况下，为了得到更大增益，可以使用有源负载（也就是电流源）。我们首先考虑忽略基区宽度调制与晶体管有限输出电阻的理想情况。考虑如图8-2a所示的电流源负载的共射极放大器电路，为了简化分析，这里同样忽略了直流偏置电路的细节。在该电路中，我们没有使用常见的集电极负载电阻，而是使用了电流源I_{DC}作为集电极有源

① 如图8-1b所示电路的增长增益为$-g_m R_L$。

负载。



（a）电路，忽略偏置设置细节　　（b）增长模型，假设电流源I_{DC}的增长输出电阻为R_O

图8-2 驱动电流源负载的共射极放大器

如图8-2b所示是该放大器的小信号模型。假设电流源I_{DC}的增长输出电阻接近无限大，这就意味着小信号增长模型的负载电阻R_O也趋向无限大，即$R_O \to \infty$。可以看到该简化电路模型的增益为

$$\frac{v_o}{v_i} = -g_m R_O \to \infty \tag{8-3}$$

我们知道实际电路不可能如此。稍后我们将会看到，是晶体管内部的其他增长电阻将放大器的增益限定为有限值。

8.2 基区宽度调制

到目前为止，使用的简单混合π电路模型引导我们去相信：集电极电压变化时，晶体管集电极电流不会改变。换句话来说，简单电路模型说明在晶体管集电极端具有无限大的输出电阻。如果能够近距离观察晶体管曲线（如图8-3a所示，比如来自数据手册或者波形记录器），我们将会看到，集电极电流在线性工作区具有有限斜率特性。当晶体管工作在线性工作区时，这与它的小信号输出电阻是一致的。

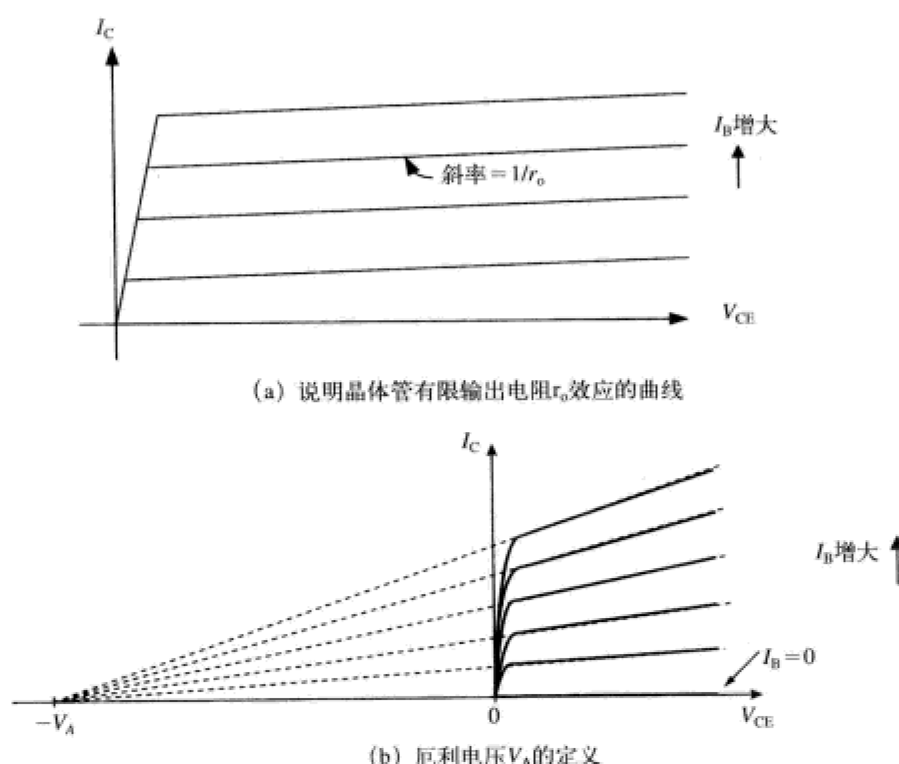
如果我们将晶体管曲线的斜直线延伸到负电压区域，如图8-3b所示，将会发现它们与负电压轴线在同一点V_A相交。V_A的幅度为*厄利电压*（Early Voltage，也可以称为厄雷电压）。我们可以修正晶体管的电压－电流关系曲线来说明厄利电压。

$$I_C = I_S\left(e^{\frac{qV_{BE}}{kT}} - 1\right)\left(1 + \frac{V_{CE}}{V_A}\right) \tag{8-4}$$

该方程捕获了集电极电流与集电极－发射极电压的函数依赖关系。

该效应是由晶体管的集电极－基极耗尽区宽度随电压V_{CB}的变化而展宽/缩窄引起的（如图8-4所示），反过来，这又改变了基区的有效宽度。当V_{CB}增大时，集电极－基极耗尽区的宽度从W展宽到$W+\Delta W$。因为集电极电流与基区少数载流子（这种情况为电子）浓度的斜率成比例，所以当V_{CB}变化时，集电极电流也将改变。该过程称为*基区宽度调制*（base-width modulation），由James Early于1952年首次进行描述[①]。

① 参见本章结尾的James Early参考文献。



（a）说明晶体管有限输出电阻r_o效应的曲线

（b）厄利电压V_A的定义

图8-3 NPN型晶体管的通用V-I曲线

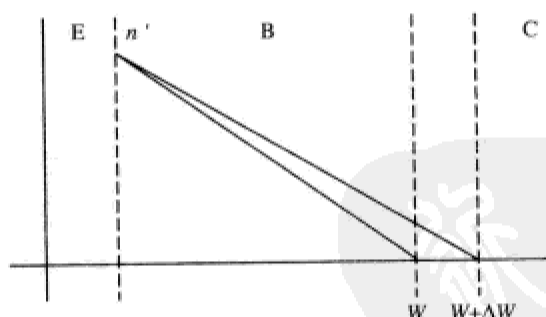


图8-4 基区宽度调制效应演示。少数载流子浓度n'的斜率随着V_{CB}变化，导致集电极电流改变

基区宽度调制效应导致，晶体管集电极电压变化时，集电极电流与基极电流均发生改变。这种小信号效应意味着晶体管电流源不可能具有无限大的输出电阻。在原混合π电路模型中额外增加两个电阻可以对该效应进行扩展建模，如图8-5所示。分析晶体管电路时，如果发现放大器的增益达到数百倍以上时，则需要使用这个扩展的混合π电路模型。

8.3 从晶体管数据手册查阅晶体管参数

详细分析表明，晶体管的输出电阻r_o与集电极电流成反比①，或者

① 该关系的详尽数学推导参见Gray、Hurst、Lewis和Meyer的著作*Analysis and Design of Analog Intergrated Circuits*, pp.14-16或者P.E.Gray等人的著作“Physical Electronics and Circuit Models of Transistors”，*SEEC* Volume 2，pp.149-152。

$$r_o = \frac{1}{\eta g_m} = \frac{V_A}{\left(\frac{kT}{q}\right) g_m} \tag{8-5}$$

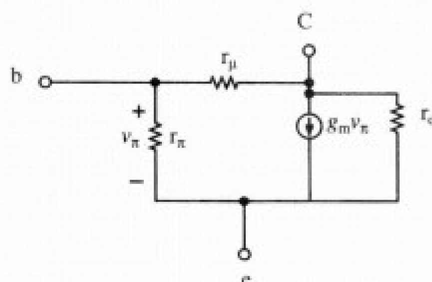


图8-5　晶体管的扩展混合π电路模型（低频），包含基区宽度调制效应，导致增加了两个电路元件r_o、r_μ。电阻r_o对集电极电流随V_{CE}变化的事实进行建模，电阻r_μ则对支撑集电极电流所需的额外基极电流进行建模

这里η是个常数，称为**基区宽度调制因子**（base-width modulation factor），其典型取值在10^{-3}~10^{-4}之间。集电极－基极电压的变化比基极－发射极电压的变化对输出电流的影响要小得多。因此，只有当放大器增益达到$1/\eta$时，基区宽度调制效应和输出电阻r_o的影响才显得重要起来。通常的经验处理方法是，当放大器的增益达到数百倍以上时，我们在进行增益计算时就需要考虑电阻r_o的影响了。

集电极电流的变化也导致基极电流按比例改变，比例常数为小信号电流增益h_{fe}，得

$$r_\mu = h_{fe} r_o = \frac{h_{fe}}{\eta g_m} \tag{8-6}$$

有些时候，晶体管制造商会使用两端口参数h来说明晶体管的工作参数，与图8-6所示电路一致。

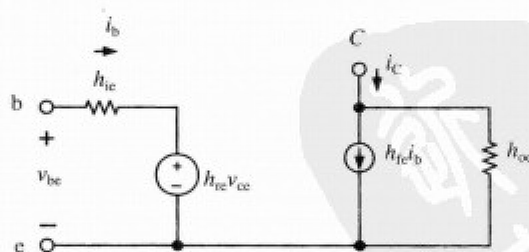


图8-6　标明两端口h参数的晶体管模型

描述该电路工作特性的方程如下

$$\begin{aligned} v_{be} &= i_b h_{ie} + h_{re} v_{ce} \\ i_c &= h_{fe} i_b + h_{oe} v_{ce} \end{aligned} \tag{8-7}$$

与扩展混合π模型相比，可得

$$\begin{aligned} h_{ie} &= r_\pi \\ h_{re} &= \eta \\ h_{fe} &= \beta_o \\ h_{oe} &= \eta g_m \end{aligned} \tag{8-8}$$

下图所示是晶体管2N3904的数据手册中描述的h参数曲线①（如图8-7所示）。

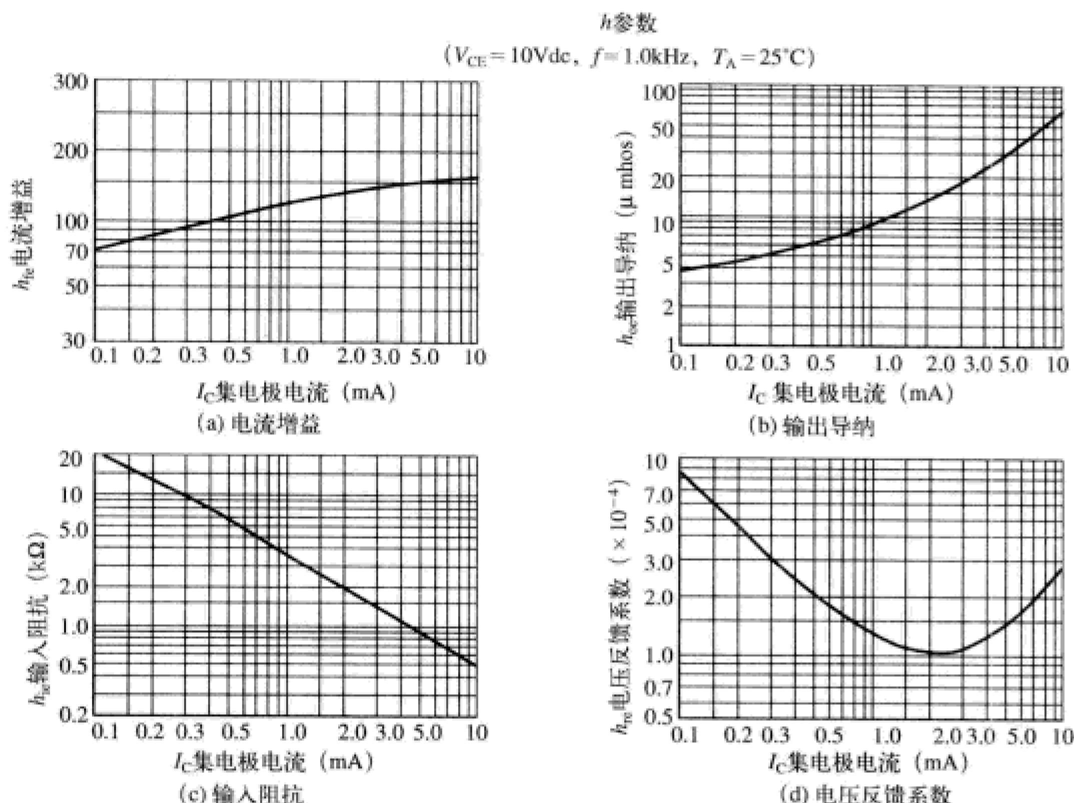


图8-7 摘自晶体管2N3904数据手册的h参数曲线

8.4 驱动电流源负载的共射极放大器

假设我们有个共射极放大器电路，使用1mA的理想电流源进行直流偏置设置（如图8-8a所示）。我们假设电流源是理想的，也就是电流源具有无限大的增长输出电阻。假设晶体管的基区宽度调制因子$\eta = 3.3\times10^{-4}$，下面来求解该放大器的增益。

该电路的小信号模型如图8-8b所示，这里我们使用了晶体管的扩展混合π模型。

针对输出节点（v_o）使用KCL定律，得②

$$(v_i - v_o)g_\mu - v_o g_o - v_i g_m = 0 \tag{8-9}$$

求解增益v_o/v_i，得③

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{g_\mu - g_m}{g_o + g_\mu} \approx \frac{-g_m}{g_o} \approx \frac{-1}{\eta} \tag{8-10}$$

---

① 得自www.onsemi.com，On Semiconductor公司授权使用。

② 我们又一次看到，如果使用电导而不是电阻，数学推导会更容易些。比如在该电路中，$g_\mu = 1/r_\mu$。

③ 注意$g_m \gg g_\mu$，$g_o \gg g_\mu$。

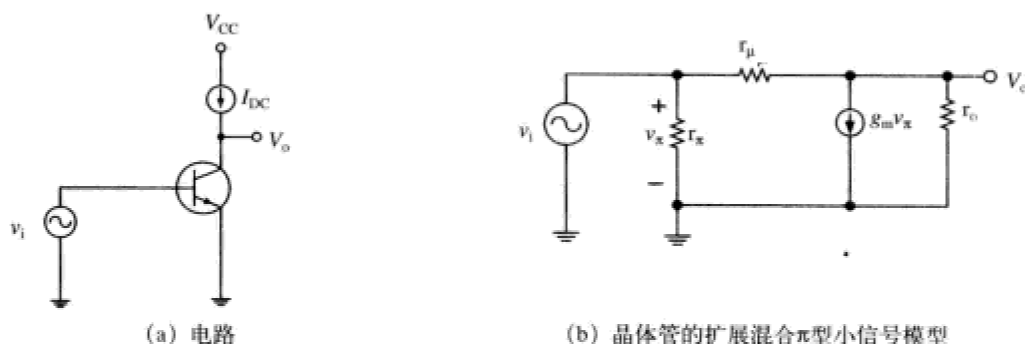


图8-8 有源负载共射极放大器

我们预测该放大器的增益为−3000。现在，能否得到如此高的增益需视搭建的电流源的理想程度而定。下一节，我们将会看到搭建高输出电阻的电流源的方法。

8.5 搭建电路模块

8.5.1 双极性电流源的增长输出电阻

下面，我们试图来回答这样一个问题：使用双极性结型晶体管搭建的电流源的理想程度到底如何。图8-9a所示是晶体管电流源电路，包含发射极电阻R_E。该电路的小信号模型如图8-9b所示，这里，为了计算电流源的增长输出电阻，我们为电路添加了测试电流源i_t，如图中晶体管集电极端所示。

将电阻r_π和R_E组合成一个公共电阻，删除电阻r_μ（稍后再将其并联进去），该电路的分析将会大大简化。使用图8-9c所示电路，得到测试电压v_t为

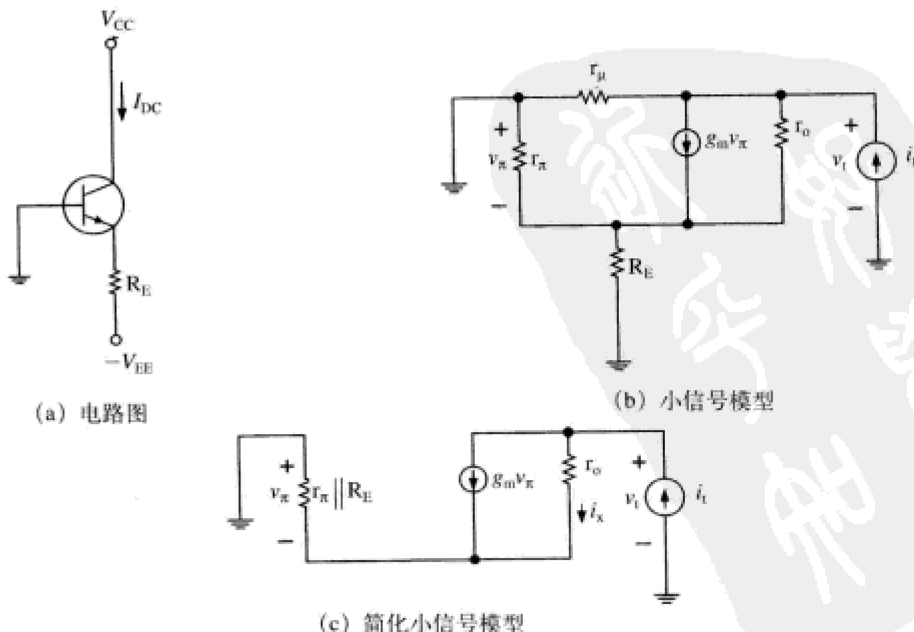


图8-9 具有有限发射极电阻R_E的电流源

$$v_t = i_t[r_\pi \parallel R_E] + i_x r_o \tag{8-11}$$

电流i_x为i_t与$g_m v_\pi$之差，或

$$i_x = i_t - g_m v_\pi \tag{8-12}$$

我们还知道v_π与i_t以及电阻r_π和R_E的并联组合相关。因此，我们可以得到v_t为

$$v_t = i_t[r_\pi \parallel R_E] + [i_t + g_m i_t[r_\pi \parallel R_E]]r_o \tag{8-13}$$

因此，电流源的输出电阻为

$$r_{out} = \frac{v_t}{i_t} = \left[r_\pi \| R_E\right] + \left[1 + g_m\left[r_\pi \| R_E\right]\right]r_o \approx \frac{\left[1 + g_m\left[r_\pi \| R_E\right]\right]}{g_o} \tag{8-14}$$

为了得到最终结果，我们不得不将电阻r_μ并联回去，得

$$r_{out} \approx r_\mu \left\| \frac{\left[1 + g_m\left[r_\pi \| R_E\right]\right]}{g_o} \right. \tag{8-15}$$

这里存在几个重要的极限情况。如果发射极接地（即$R_E = 0$），输出电阻则为

$$r_{out} \approx r_o，当R_E = 0时 \tag{8-16}$$

如果发射极电阻R_E与r_π相比非常大，则输出电阻又为

$$r_{out} \approx \frac{r_\mu}{2}，当 R_E \gg r_\pi 时 \tag{8-17}$$

课程讲到这里，我们只要保证发射极电阻R_E与r_π相比非常大，就可以搭建具有极高输出电阻的电流源了。不使用大阻值电阻实现这一点的另一种方法是使用共射共基放大器构成的电流源（如图8-10所示）。晶体管Q_2为输出电阻，提供期望的输出电流I_{DC}。晶体管Q_1提供大阻值输出电阻（从Q_2发射极端看过去）。这保证Q_2集电极端的输出电阻非常高。将R_{E1}包含在内增大了Q_1集电极端的输出电阻。

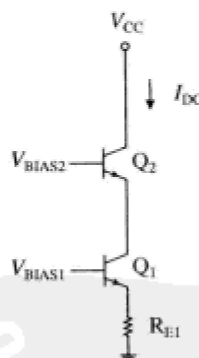


图8-10 共射共基放大器电流源。在Q_2集电极端将Q_1包含进去增大了Q_2的输出电阻

8.5.2 射随器的增长输入电阻

射随器的增长输入电阻（如图8-11a所示）可以使用图8-11b所示电路来进行计算。比如，如果有个共射极增益电路，跟随着射随缓冲器，我们可能想知道射随器对增益电路形成的负载有多大。图8-11b所示是射随器的增长电路，包含扩展混合π电路模型的电阻r_o与r_μ。

从图8-11b（增长模型）中可以看到，晶体管输出电阻与R_E是并联关系。因此，输出电阻（如图8-11所示，删除r_μ简化数学计算）为

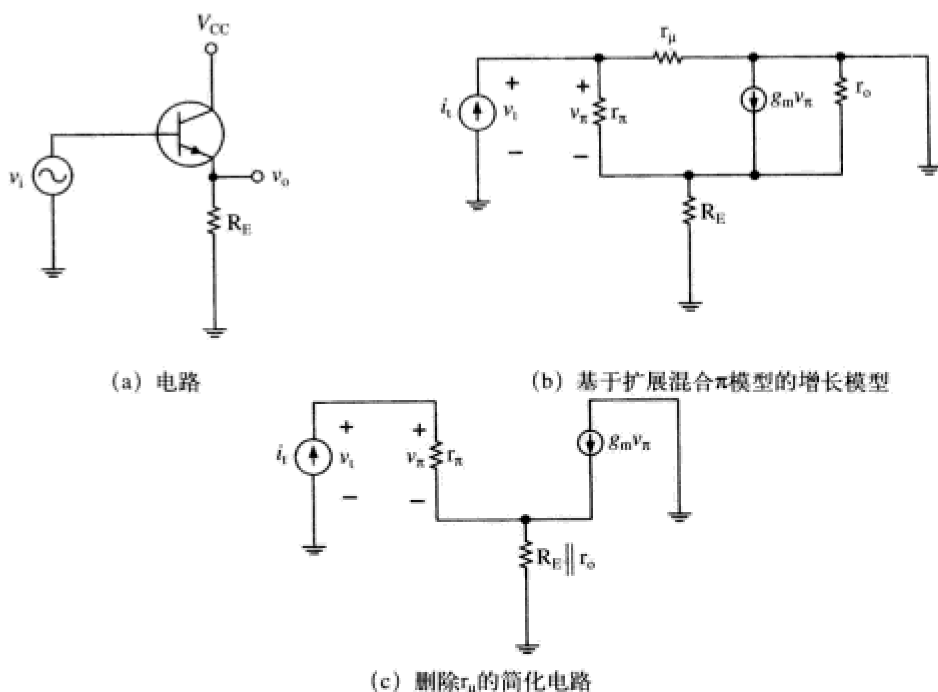
$$r_{in} = r_\pi + (1 + h_{fe})[R_E \parallel r_o] \tag{8-18}$$

现在，我们再将r_μ并联回去，得到最终结果为

$$r_{in} = r_\mu \parallel (r_\pi + (1 + h_{fe})[R_E \parallel r_o]) \tag{8-19}$$

现在，极大发射极电阻R_E的界限为

$$r_{in} \approx \frac{r_\mu}{2}，\text{当 } R_E >> r_o \text{时} \tag{8-20}$$



(a) 电路　　　　(b) 基于扩展混合π模型的增长模型

(c) 删除r_μ的简化电路

图8-11　射随器

极小发射极电阻R_E的界限为

$$r_{in} \approx r_\pi，\text{当 } R_E \to 0\text{时} \tag{8-21}$$

对于R_E取中间值的情况，可得

$$r_{in} \approx h_{fe} R_E，\text{当} r_\pi << R_E << r_o\text{时} \tag{8-22}$$

例题8.1：射随器的增长输入电阻

求解图8-12所示的射随器电路的增长输入电阻。晶体管的参数与偏置设置条件为：集电极电流$I_C = 1\text{mA}$，发射极电阻$R_E = 10\text{k}\Omega$，小信号电流增益$h_{fe} = 100$，基区宽度调制因子$\eta = 10^{-4}$。

解答方法

我们解得晶体管的小信号参数如下

$$\begin{aligned}
g_m &= \frac{I_C}{V_{TH}} = \frac{10^{-3}}{0.026} = 0.038\,\text{A/V} \\
r_\pi &= \frac{h_{fe}}{g_m} = \frac{100}{0.038} = 2600\Omega \\
r_o &= \frac{1}{\eta g_m} = \frac{1}{(10^{-4})(0.038)} = 260\,\text{k}\Omega \\
r_\mu &= h_{fe} r_o = 26\,\text{M}\Omega
\end{aligned} \tag{8-23}$$

射随器电路的小信号模型如图8-13所示。

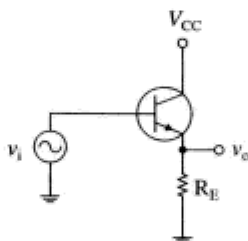


图8-12 射随器

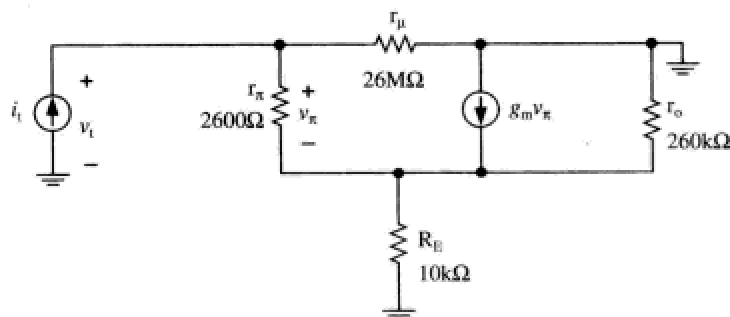


图8-13 射随器小信号模型

增长输入电阻为

$$r_{in} = r_\mu \| (r_\pi + (1 + h_{fe})[R_E \| r_o]) \approx (26\ \text{M}\Omega) \| ((100)[(10\text{k}) \| 260\text{k}]) \approx 1\ \text{M}\Omega \tag{8-24}$$

可以看到输入电阻近似为$r_{in} \approx h_{fe} R_E$，这是我们预计的发射极电阻取中间阻值结果。

8.5.3 电流镜

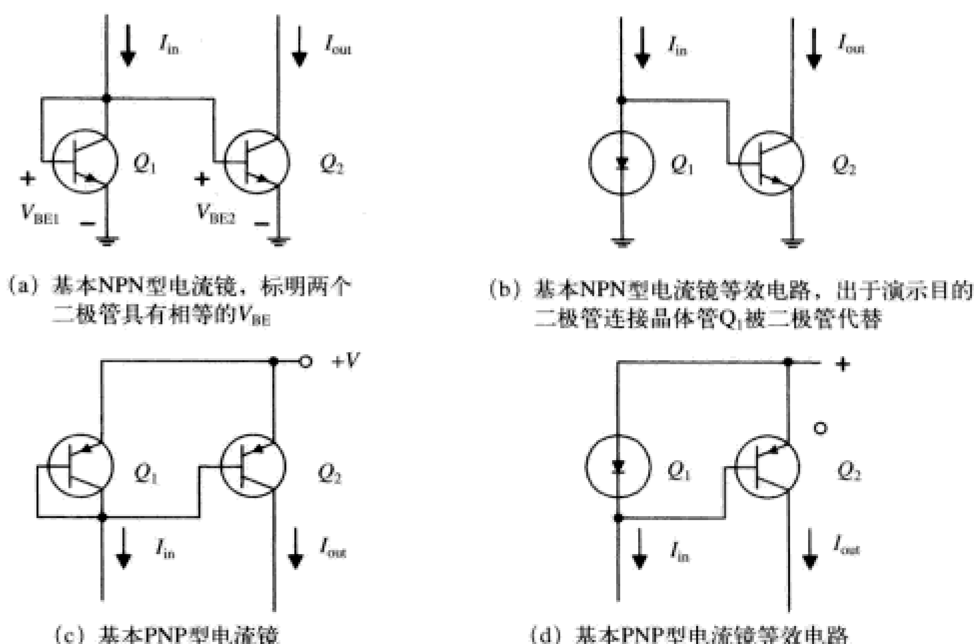
电流镜（current mirror），也叫**电流中继器**（current repeater），常用作放大器的偏置设置元件，以及放大器的有源负载[①]。基本的双极性结型晶体管电流镜由第一级的二极管连接晶体管[②]，一个控制电流流过的晶体管，以及第二级的输出晶体管组成，它的输出电流受第一级的二极管连接晶体管的两端产生的电压控制。因此，在电流镜中，两个晶体管的基极－发射极电压是相同的，导致两个晶体管内的电流按比例变化[③]。电流镜可以使用NPN型晶体管、PNP型晶体管、或者两类晶体管的组合来构建。某些基本的电流镜电路及其等效电路（在电路图中，二极管连接的晶体管被一个简单的二极管代替）如图8-14所示。

在许多集成电路运算放大器中都可以找到电流镜电路，包括Fairchild公司的μA709、μA741、μA776，模拟器件公司的OP07，美国国家半导体公司的LM301A、LM308，以及其他公司的放大器产品。电流镜可以使用双极性结型晶体管（BJT）或者MOSFET晶体管设计制造。

① 参见J.Roberge的著作*Operational Amplifiers: Theory and Practice*，p.393，Gray、Hurst Lewis以及Meyer的著作*Analysis and Design of Analog Integrated Circuit, 4th Edition*，p.255。

② “二极管连接”双极型晶体管的集电极与基极短接，利用晶体管的基极－发射极结作为二极管使用。参见J.Roberge的著作*Operational Amplifiers: Theory and Practice*，p.390。

③ 该分析假设基极电流可以忽略不计，晶体管具有非常大的输出电阻。为了使两个晶体管的集电极电流相等，两个晶体管必须匹配，具有相同大小的发射极区。如果发射极区制造有差异，则存在与输入、输出电流相关的比例因子。



（a）基本NPN型电流镜，标明两个二极管具有相等的V_{BE}

（b）基本NPN型电流镜等效电路，出于演示目的二极管连接晶体管Q_1被二极管代替

（c）基本PNP型电流镜

（d）基本PNP型电流镜等效电路

图8-14 基本的电流镜及其等效电路

由于晶体管的β_F参数有限，导致基本双极性电流镜存在输入/输出增益误差。如图8-15所示电路中，我们看到两个晶体管工作在相同的V_{BE}水平，因此两个晶体管一阶近似后，具有相同的集电极电流。然而，输入电流并不是集电极电流，因为I_{in}还为Q_1和Q_2提供基极电流。我们可以将该电流关系表述为

$$I_{in} = I_{C1} + \frac{I_{C1}}{\beta_F} + \frac{I_{out}}{\beta_F} \tag{8-25}$$

求解电流镜增益得

$$\frac{I_{out}}{I_{in}} = \frac{1}{1+\frac{2}{\beta_F}} \tag{8-26}$$

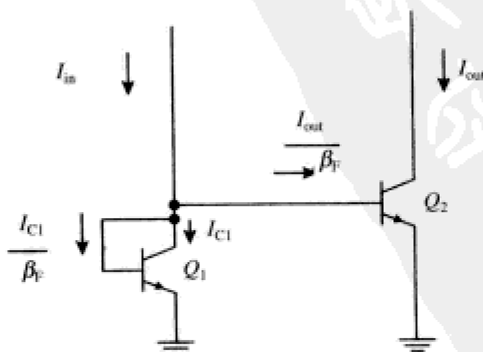


图8-15 确定基本电流镜增益误差的电路。为清楚起见，标出了中间电路的电流

我们看到误差与直流电流增益β_F的取值成反比例关系。当直流电流增益$\beta_F = 100$时，导致输出电流出现约2%的误差。

8.5.4 发射极退化的基本电流镜

一种减小电流镜因V_{BE}失配引起的误差的方法是，在电流镜电路中使用部分发射极退化（如图8-16所示）。我们看到与两个晶体管Q_1、Q_2发射极电流相关的方程为

$$I_{E1}R_{E1} + V_{BE1} = I_{E2}R_{E2} + V_{BE2} \tag{8-27}$$

假设发射极电阻匹配良好，如果$I_E R_{E1} \gg V_{BE1}$，$I_E R_{E2} \gg V_{BE2}$，我们可以看到V_{BE}失配造成的影响大为降低了。包含发射极电阻还增大了电流源的输出。我们还可以通过调节电阻R_1与R_2的相对比率来调节电流镜的比率。

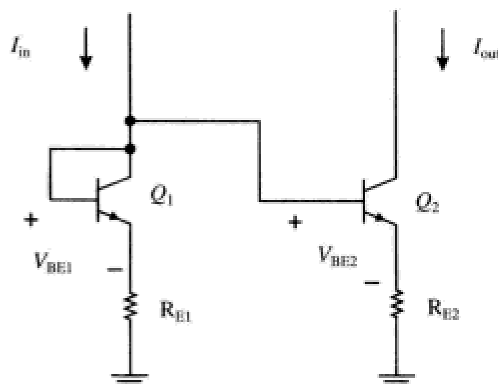


图8-16　发射极受R_{E1}和R_{E2}退化的基本电流镜

8.5.5 “β助推器”电流镜

再增加一个晶体管，并且按照图8-17所示电路来改变电流镜的电路结构，可以改善电流镜的输出电流对晶体管β_F的依赖性。每个电流成分的取值如图中所示，晶体管Q_3为Q_1和Q_2提供基极电流，因此，降低了电流镜的输出电流对晶体管电流增益的依赖性。

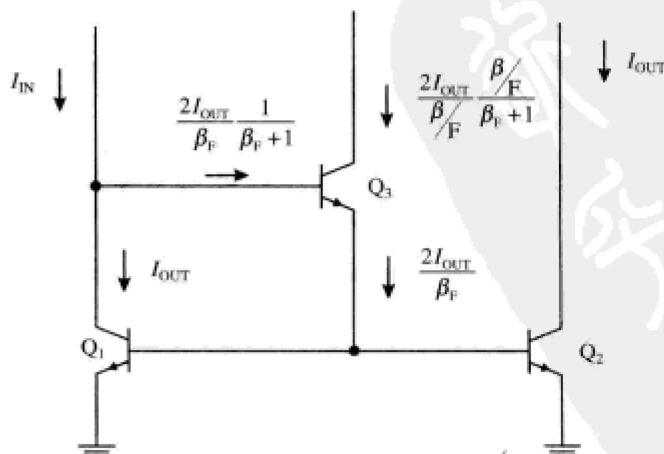


图8-17　“β助推器”电流镜，标明中间电流以帮助计算输出/输入比

分析该电路时，我们可以认为晶体管Q_1和Q_2的基极－发射极电压V_{BE}相同，因此它们的集电极电流（I_{OUT}）也是相同的。晶体管Q_3为Q_1、Q_2提供基极电流，因此它的发射极电流为

$2I_{OUT}/\beta_F$。输入电流I_{IN}与晶体管Q_1的集电极电流并不完全相等，因为它还包含了晶体管Q_3的基极电流。我们求得输出电流I_{OUT}如下

$$I_{IN} = I_{OUT} + \left(\frac{2I_{OUT}}{\beta_F}\right)\left(\frac{1}{\beta_F+1}\right) \tag{8-28}$$

经过某些代数变换，我们可以得到输出电流与输入电流的函数依赖关系

$$\frac{I_{OUT}}{I_{IN}} = \frac{\beta_F^2+\beta_F}{\beta_F^2+\beta_F+2} = \frac{1}{1+\dfrac{2}{\beta_F^2+\beta_F}} \tag{8-29}$$

我们看到，误差与β_F的平方成反比，因此与简单电流镜相比，新型电流镜的误差减小。

8.5.6 Wilson电流镜

因为β_F有限，Wilson电流镜（如图8-18所示）使用负反馈来减小输出输入误差。我们假设晶体管Q_3的基极电流I_{B3}稍微增大了一点。这将导致其集电极电流增大，因此Q_2的集电流也增大。晶体管Q_2的集电极电流增大反过来又导致I_{B3}减小（这是因为晶体管Q_1的集电极电流I_{C1}随之增大，从Q_3的基极电流中偷走了部分电流）。这就是负反馈。图8-18中标注了中间电流成分，以帮助我们确定输出电流与输入电流的函数依赖关系。

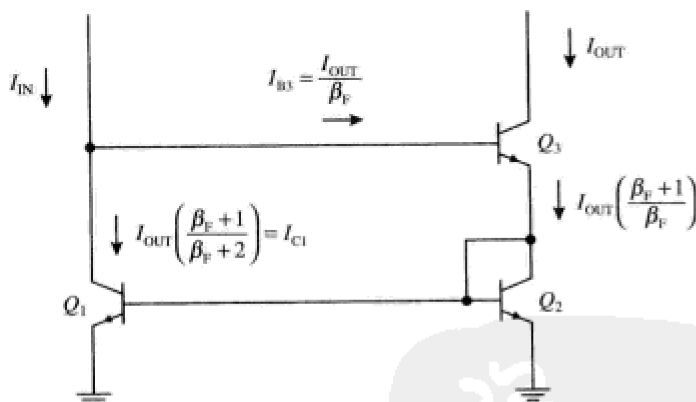


图8-18 Wilson电流镜

经过与“β助推器”电流镜相似的细致分析，可以得到Wilson电流镜的输入电流与输出电流的函数关系为

$$I_{IN} = \frac{I_{OUT}}{\beta_F} + I_{OUT}\left(\frac{\beta_F+1}{\beta_F+2}\right) \tag{8-30}$$

某些代数变换之后，可以得到Wilson电流镜的输入电流与输出电流之间的传递函数关系为

$$\frac{I_{OUT}}{I_{IN}} = \frac{\beta_F^2+2\beta_F}{\beta_F^2+2\beta_F+2} = \frac{1}{1+\dfrac{2}{\beta_F^2+2\beta_F}} \tag{8-31}$$

8.5.7 共射共基放大器电流镜

共射共基放大器电流镜（如图8-19所示）有一个输出晶体管堆。我们在前面推导扩展混

合π电路模型时已经看到，晶体管存在发射极电阻R_E，并且$R_E \gg r_\pi$时，则其输出电阻接近于$r_\mu/2$。达到该目标的一种方法是将输出晶体管堆叠在一起。该共射共基放大器电流镜具有非常高的输出电阻，这是因为受晶体管Q_2的输出电阻影响，从晶体管Q_4的发射极端看到的电阻很大。

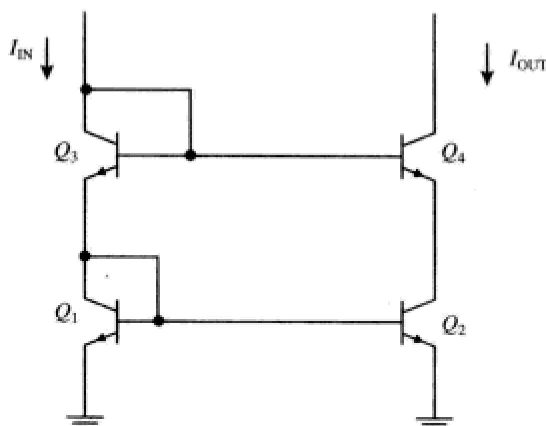


图8-19 共射共基放大器电流镜

8.5.8 Widlar电流镜

当需要微小的输出电流时，可以考虑使用Widlar电流镜。在前向放大区，晶体管的基极－发射极电压为

$$V_{BE} \approx \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_C}{I_S}\right) \tag{8-32}$$

这里kT/q为热电压，I_S为晶体管的反向饱和电流。如图8-20所示，我们可以围绕晶体管Q_1、Q_2的基极－发射极环路求解KVL方程，得

$$V_{BE1} = V_{BE2} + I_{E2}R_E \tag{8-33}$$

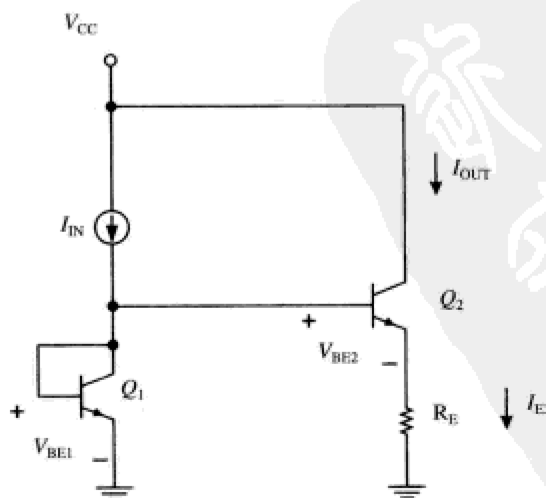


图8-20 Widlar电流镜

这意味着发射极电阻R_E偷走了一部分用于驱动晶体管Q_2基极－发射极结的电压。因此，Q_2的集电极电流比Q_1小，但是Q_1的集电极电流依然保持在某个受控量级上。

例题8.2：Widlar电流镜

对于图8-20所示的Widlar电流镜电路，假设输入电流$I_{in}=100\mu A$，$R_E=10k\Omega$，试着求解晶体管Q_2的集电极电流。假设每个晶体管的反向饱和电流为$I_S=10^{-6}A$，$\beta_F\gg1$，工作温度为300K。

解答方法

因为已经假设$\beta_F\gg1$，那么$I_E\approx I_C$，我们将忽略基极电流。

$$V_{BE1}=V_{BE2}+I_{E2}R_E\Rightarrow\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_{IN}}{I_{S1}}\right)\approx\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_{OUT}}{I_{S2}}\right)+I_{OUT}R_E \tag{8-34}$$

将对数项组合在一起，将该表达式简化为

$$\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_{IN}}{I_{OUT}}\right)\approx I_{OUT}R_E \tag{8-35}$$

可以看到，式（8-35）消除了对反向饱和电流的依赖关系。将$I_{IN}=100\mu A$等带入该方程，解得$I_{OUT}\approx6.9\mu A$。

例题8.3：Widlar电流镜的增长输出电阻

对于图8-20所示的Widlar电流镜电路，试求解晶体管Q_2集电极端的增长输出电阻。还是假设$R_E=10k\Omega$，晶体管Q_2的其他参数为$h_{fe}=100$，$\eta=3.3\times10^{-4}$。

解答方法

我们可以解得下列小信号参数

$$\begin{aligned}g_m&=\frac{I_{C2}}{V_{TH}}=\frac{6.9\times10^{-6}}{0.026}=2.65\times10^{-4}\text{ A/V}\\r_\pi&=\frac{h_{fe}}{g_m}=\frac{100}{2.65\times10^{-4}}=377\,k\Omega\\r_o&=\frac{1}{\eta g_m}=\frac{1}{(3.3\times10^{-4})(2.65\times10^{-4})}=11.4\,M\Omega\\r_\mu&=h_{fe}r_o=1140\,M\Omega\end{aligned} \tag{8-36}$$

发射极退化的晶体管Q_2的输出电阻的完整表达式为

$$r_{out}\approx r_\mu\left\|\frac{\left[1+g_m\left[r_\pi\|R_E\right]\right]}{g_o}\right. \tag{8-37}$$

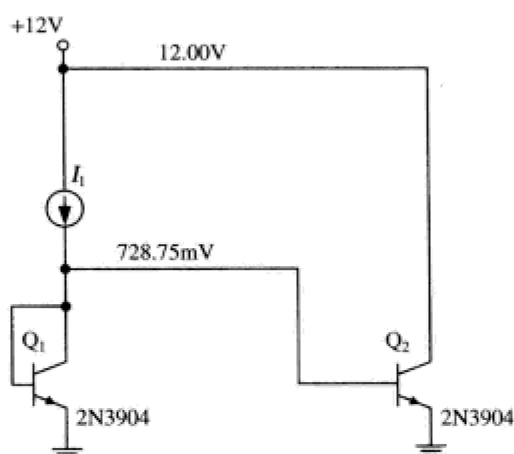
注意到，在该例题中，$R_E\ll r_\pi$，因此输出电阻可以近似为

$$r_{out}\approx g_mR_Er_o\approx2.65\times10^{-4}\times10\,000\times11.4\text{ M}\Omega)\approx30.2\text{ M}\Omega \tag{8-38}$$

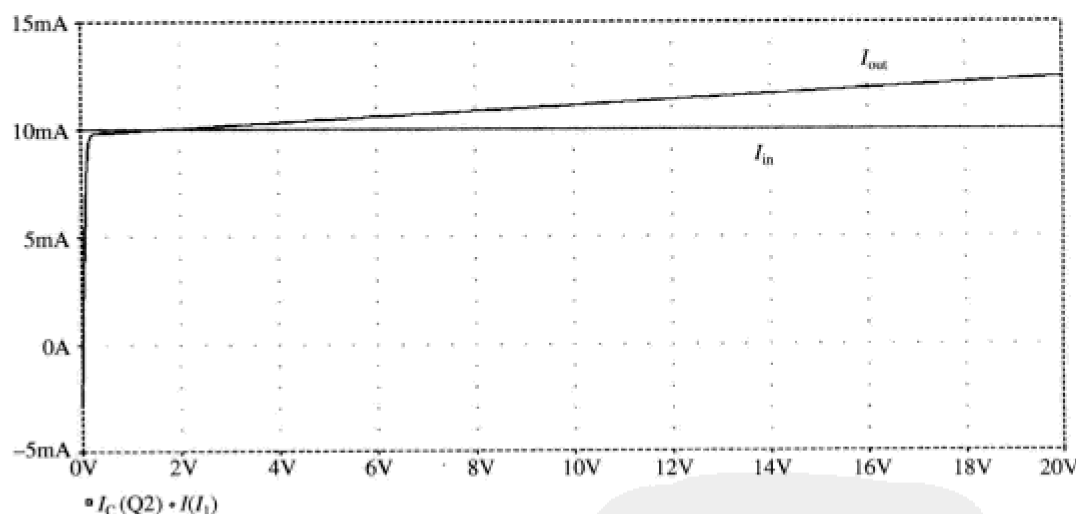
例题8.4：V_{CE}失配引起的电流镜误差

受厄利效应的影响，演示电流镜失配原因的电路如图8-21所示。晶体管Q_1为二极管连接的输入晶体管，使用10mA电流源I_1对其进行直流偏置设置。图8-21b所示的SPICE仿真[①]显示了电源电压从0V变化到20V时，晶体管Q_2的集电极电流变化曲线。在该例题中，在V_{BE}的某个压降点（受二极管连接的影响），Q_1的V_{CE}固定，同时Q_2的V_{CE}明显偏高。Q_2的集电极电流在电源电压变化范围内显著变化。当电源电压达到0.5V左右时，Q_2的集电极电流上升至10mA附近。这时晶体管Q_2离开饱和区，进入正向放大区。

① 如图8-21b所示电路图标注的是电源电压为+12V时的节点电压。



（a）电路



（b）PSPICE仿真结果，表明电源电压从0V变化到20V时，输出电流I_{OUT}的变化

图8-21 演示受V_{CE}失配影响的电流镜误差电路

例题8.5：设计实例——高增益放大器

考虑如图8-22所示的高增益晶体管放大器电路。假设NPN型与PNP型晶体管的基区宽度调制因子$\eta_{NPN}=3.2\times10^{-4}$，$\eta_{PNP}=1.2\times10^{-3}$。其他有关参数为$h_{fe,npn}=203$，$h_{fe,pnp}=164$。

晶体管Q_1为标准共射极电路，使用PNP型电流源Q_2对其进行偏置设置。1000kΩ电阻对放大器进行反馈偏置，以保证Q_1、Q_2均偏置设置在线性工作区。注意到，我们已经使晶体管Q_2的发射极电阻R_E足够大以使Q_2的增长输出电阻r_{out2}很大。该发射极电阻还将Q_1、Q_2的集电极电流设置在1mA左右。

在图8-22b中，我们绘制了该放大器的增长电路模型，使用等效输出电阻r_{out2}取代晶体管Q_2。Q_2的参数如下

$$
\begin{aligned}
&I_{C2} \approx 1\text{mA}\\
&g_{m2} = \frac{1\text{mA}}{26\text{mV}} \approx 0.038\text{A/V}\\
&r_{\pi 2} = \frac{h_{fe2}}{g_{m2}} = \frac{164}{0.038} = 4316\Omega\\
&r_{o2} = \frac{1}{\eta_{pnp} g_{m2}} = \frac{1}{(1.2\times 10^{-3})(0.038)} = 2.2\times 10^{4}\Omega\\
&r_{\mu 2} = h_{fe2} r_{o2} = (164)(2.2\times 10^{4}) = 3.6\times 10^{6}\Omega\\
&r_{out2} = r_{\mu 2}\left\|r_{o2}\left[1+g_{m2}\left[r_{\pi 2}\|R_E\right]\right]\right. = 5.9\times 10^{5}\Omega
\end{aligned}
\tag{8-39}
$$

对于晶体管Q_1，其偏置电流与增长参数为

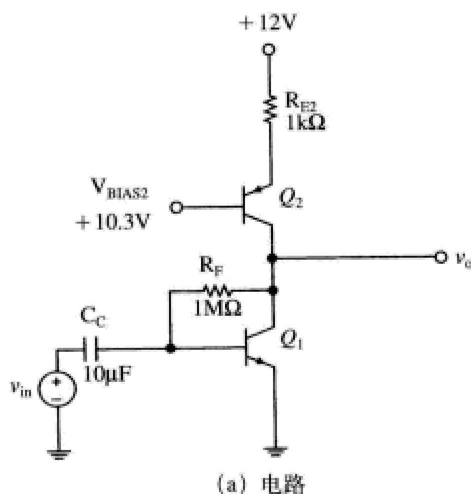
$$
\begin{aligned}
&I_{C1} \approx 1\text{mA}\\
&g_{m1} = \frac{1\text{mA}}{26\text{mV}} \approx 0.038\text{A/V}\\
&r_{o1} = \frac{1}{\eta_{npn} g_{m1}} = \frac{1}{(3.2\times 10^{-4})(0.038)} = 8.2\times 10^{4}\Omega\\
&r_{\mu 1} = h_{fe1} r_{o1} = (203)(8.2\times 10^{4}) = 1.7\times 10^{7}\Omega
\end{aligned}
\tag{8-40}
$$

求解增益的节点方程为

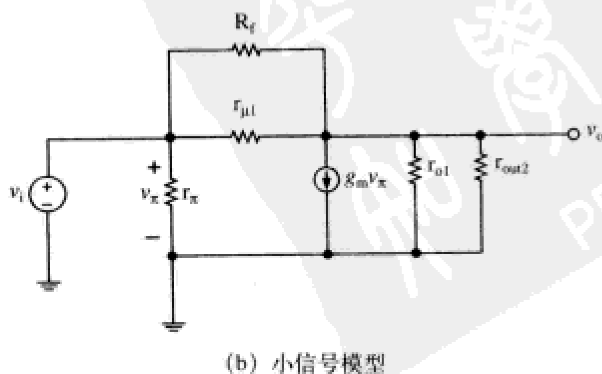
$$
\begin{aligned}
&(v_i - v_o)G_f' - g_{m1}v_i - v_o G_o = 0\\
&G_f' = \frac{1}{R_f \| r_{\mu 1}}\\
&G_o = \frac{1}{r_{o1} \| r_{out2}}
\end{aligned}
\tag{8-41}
$$

化简该方程，得

$$
\begin{aligned}
&v_i(G_f' - g_{m1}) = v_o(G_f' + G_o)\\
&\frac{v_o}{v_i} = \frac{(G_f' - g_m)}{(G_f' + G_o)} \approx \frac{-g_{m1}}{(G_f' + G_o)} \approx -g_{m1}(R_f \| r_{\mu 1} \| r_{o1} \| r_{out2}) = -2541
\end{aligned}
\tag{8-42}
$$



(a) 电路



(b) 小信号模型

图8-22　高增益放大器

PSPICE仿真（如图8-23所示）表明，中间带增益与计算相近。可以通过修改耦合电容C_C的取值来调节其低频截止频率。

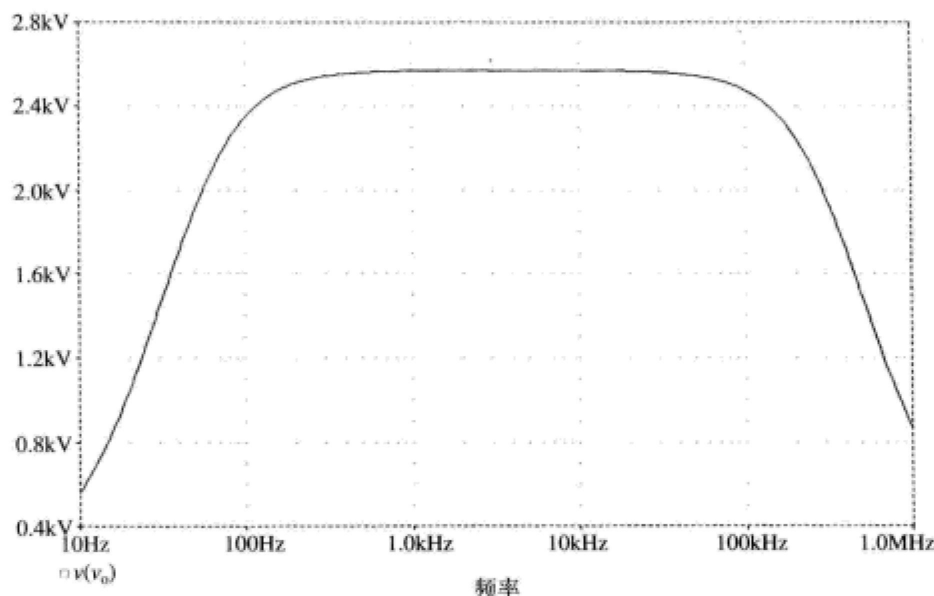


图8-23 高增益放大器的PSPICE仿真结果，表明中间带增益近似为–2500

例题8.6：另一个高增益放大器例子

我们使用高增益技术来设计一个增益幅度$|A_v|>1000$的交流耦合晶体管放大器。我们准备使用该放大器驱动一个100pF的电容负载，因此在输出端需要一级射随器电路将高增益节点与电容负载隔离开来。

假设手头的晶体管具有下列参数$\eta_{NPN}=6.7\times10^{-4}$，$\eta_{PNP}=1.8\times10^{-4}$，$C_\mu=2\text{pF}$，$f_T=300\text{MHz}$，$h_{fe,\,npn}=200$，$h_{fe,\,pnp}=175$。在该例题中，我们不必过度担心偏置设置细节。也就是说，我们可以假设集电极电流具有魔力特性，可以工作在正确的偏置水平上。我们来寻求一个满足增益指标的设计，然后使用开路时间常数与短路时间常数来估计其高频断点与低频断点。

解答方法

刚开始设计的电路结构如图8-24a所示。晶体管Q_1为共射极电路，驱动电流源负载Q_2。Q_2基极端的基极偏置电压V_{BIAS2}以及发射极电阻R_{E2}来设置Q_1和Q_2的静态电流。反馈电阻R_F将晶体管Q_1偏置设置在前向放大区。我们将假设R_F的阻值为1MΩ以满足其工作需要，但是其真实值依靠晶体管Q_1的直流电流增益以及Q_1集电极的期望输出电压来决定。晶体管Q_3将负载电容与Q_1集电极端的高增益节点缓冲隔离开来。为了能够达到高增益，我们希望电流源Q_2具有非常高的输出电阻，射随器Q_3具有非常高的输入电阻。我们知道，这种电路结构能够达到的最大增益为

$$|A_v|<\frac{1}{\eta_{npn}}<\frac{1}{6.7\times10^{-4}}<1492 \tag{8-43}$$

如图8-24b所示是该放大器的小信号模型[①]，我们可以依此来求解输入电压v_{in}与Q_1集电极端的增长电压v_{ci}之间的输入－输出依赖关系。对该增长模型进行分析时，我们使用电阻r_{out2}代

① 在该分析中，我们假设每个晶体管的基极扩展电阻$r_x=0$。

替电流源Q_2，它是电流源的输出电阻。相似地，我们使用电阻r_{in3}代替射随器Q_3，它是射随器的输入电阻。我们假设v_{c1}相对v_o的电压增益近似为1，该假设需要进一步验证。

为了简化增益分析，我们重新绘制该电路的增长电路模型，如图8-24c所示。我们已经将电阻r_{o1}、r_{out2}、r_{in3}的并联组合集总为单个电阻R_L'。我们还将电阻$r_{\mu 1}$、R_F的并联组合集总为单个反馈电阻R_F'。从数学上讲，我们可以将此表述为

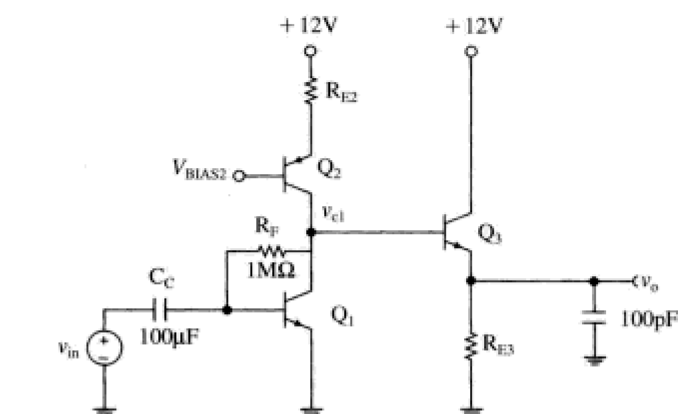
$$
\begin{aligned}
R_L' &= r_{o1} \parallel r_{out2} \parallel r_{in3} \\
R_F' &= R_F \parallel r_{\mu 1}
\end{aligned}
\tag{8-44}
$$

如果我们在输出节点v_{c1}上使用KCL方程，可得

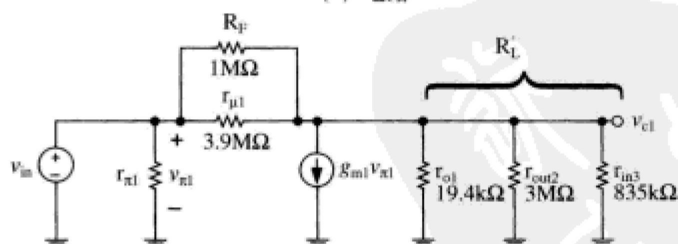
$$(v_{in} - v_{c1})G_F' - g_{m1}v_{in} - v_{c1}G_L' = 0 \tag{8-45}$$

接下来，求解v_{c1}/v_{in}，得

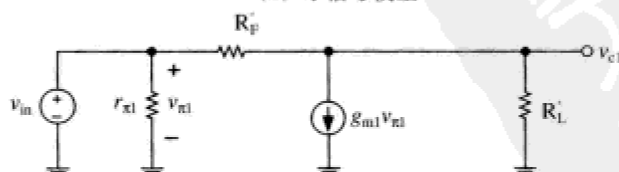
$$\frac{v_{c1}}{v_{in}} = \frac{G_F' - g_{m1}}{G_F' + G_L'} \approx -\frac{g_{m1}}{G_F' + G_L'} \approx -\frac{g_{m1}}{G_F + g_{\mu 1} + g_{o1} + g_{out2} + g_{in3}} \tag{8-46}$$



（a）电路



（b）小信号模型



（c）简化小信号模型

图8-24 高增益放大器设计实例

若我们将晶体管Q_1、Q_2的集电极电流设置为2mA，则可以得到共射极晶体管放大器Q_1具有下列小信号参数

$$
\begin{aligned}
g_{m1} &= \frac{I_{C1}}{\left(\frac{kT}{q}\right)} = \frac{0.002}{0.026} = 0.077\,\text{A/V} \\
r_{\pi 1} &= \frac{h_{fe1}}{g_{m1}} = \frac{200}{0.077} = 2.6\,\text{k}\Omega \\
r_{o1} &= \frac{1}{\eta_{npn} g_{m1}} = \frac{1}{(6.7\times10^{-4})(0.077)} = 19.4\,\text{k}\Omega \\
r_{\mu 1} &= h_{fe1} r_{o1} = (200)(19.4\,\text{k}\Omega) = 3.9\,\text{M}\Omega
\end{aligned} \tag{8-47}
$$

现在，我们看到电阻r_{o1}的阻值远远小于R_F与$r_{\mu1}$，因此我们可以将增益关系进一步近似为

$$
\frac{v_{c1}}{v_{in}} \approx -\frac{g_{m1}}{g_{o1} + g_{out2} + g_{in3}} \tag{8-48}
$$

为了达到尽可能高的增益，我们需要使电流源的输出电阻、电压源的输入电阻与电阻r_{o1}相比非常大。对于电流源来说，我们可以设置$R_{E2} = 1\text{k}\Omega$，$V_{BIAS2} = 9.3\text{V}$，这使得电流源可以大致工作在我们期望的偏置设置点。使用这些参数取值，我们可以得到电流源晶体管具有下列增长参数

$$
\begin{aligned}
g_{m2} &= 0.077\,\text{A/V} \\
r_{\pi 2} &= \frac{h_{fe2}}{g_{m2}} = \frac{175}{0.077} = 2.3\,\text{k}\Omega \\
r_{o2} &= \frac{1}{\eta_{pnp} g_{m2}} = \frac{1}{(1.8\times10^{-4})(0.077)} = 72.1\,\text{k}\Omega \\
r_{\mu 2} &= h_{fe2} r_{o2} = (175)(72.1\,\text{k}\Omega) = 12.6\,\text{M}\Omega
\end{aligned} \tag{8-49}
$$

下面，我们可以求解电流源的输出电阻

$$
r_{out2} \approx r_{\mu 2} \left\| \frac{\left[1 + g_{m2}\left[r_{\pi 2} \| R_{E2}\right]\right]}{g_{o2}} \right. \approx 3\,\text{M}\Omega \tag{8-50}
$$

可以看到，电流源的输出电阻如此大，肯定保证不会使高增益节点负载过重。

对于射随器Q_3，我们假设将其集电极电流偏置设置为1mA。如何确定R_{E3}的阻值相对稍困难些，因为我们并不是准确地知道晶体管Q_1集电极的偏置设置工作点。我们不妨假设Q_1的集电极电压近似为6V（或者电源电压的一半）。这意味着$R_{E3} = 5.3\text{k}\Omega$，将$Q_3$的集电极电流设置为1mA。

我们可以解得射随器Q_3具有下列增长参数

$$
\begin{aligned}
g_{m3} &= \frac{I_{C3}}{\left(\frac{kT}{q}\right)} = 0.038\,\text{A/V} \\
r_{\pi 3} &= \frac{h_{fe3}}{g_{m3}} = \frac{200}{0.038} = 5.3\,\text{k}\Omega \\
r_{o3} &= \frac{1}{\eta_{npn} g_{m3}} = \frac{1}{(6.7\times10^{-4})(0.038)} = 39.3\,\text{k}\Omega \\
r_{\mu 3} &= h_{fe3} r_{o3} = (200)(39.3\,\text{k}\Omega) = 7.9\,\text{M}\Omega
\end{aligned} \tag{8-51}
$$

接下来，我们来求解射随器Q_3的输入电阻。

$$r_{in3} = r_{\mu 3} \parallel (r_{\pi 3} + (1 + h_{fe3})[R_{E3} \| r_{o3}]) \approx (7.9\ \text{M}\Omega) \| ((200\Omega)[(5.3\text{k}\Omega) \| 39.3\text{k}\Omega]) \approx 835\ \text{k}\Omega \quad (8\text{-}52)$$

为了方便继续分析，我们将所有晶体管的小信号参数制成表格，如表8-1所示。

表8-1　高增益放大器例子中晶体管的小信号参数表

	Q_1	Q_2	Q_3
h_{fe}	200	175	200
g_m	0.077	0.077	0.038
r_π	2.6kΩ	2.3kΩ	5.3kΩ
r_o	19.4kΩ	72.1kΩ	39.3kΩ
r_μ	3.9MΩ	12.6MΩ	7.9MΩ
C_π	39pF	39pF	20pF
C_μ	2pF	2pF	2pF

可以看到，与电流源Q_2的输出电阻r_{out2}、射随器Q_3的输入电阻r_{in3}相比，Q_1的输出电阻r_{o1}的值非常小。因此，我们可以认为该放大器的增益近似为$-1/\eta_{npn}$，即-1400。

下面，我们使用开路时间常数方法来估计该放大器的带宽。对于电容$C_{\pi 1}$，我们得到其增长电路，如图8-25a所示。在接下来的开路时间常数计算中，我们将忽略所有晶体管的r_μ电阻。如果必要，我们还将晶体管的输出电阻r_o的影响包含在内。我们注意到电容$C_{\pi 1}$的开路电阻为0Ω，这是因为$C_{\pi 1}$的两端增长接地。

接下来，我们注意到，三个晶体管共享高增益节点v_{c1}，因此增长电容$C_{\mu 1}$、$C_{\mu 2}$、$C_{\mu 3}$为并联关系。这种情况的开路时间常数电路如图8-25b所示。该节点对地的增长电阻近似为r_{o1}，其实这就是晶体管Q_1的增长输出电阻。因此，其开路时间常数为

$$\tau_{oc1} = r_{o1}(C_{\mu 1} + C_{\mu 2} + C_{\mu 3}) = (19.4\ \text{k}\Omega)(6\ \text{pF}) = 116.4 \times 10^{-9}\ \text{s} \quad (8\text{-}53)$$

电容$C_{\pi 2}$、$C_{\pi 3}$的开路电阻求解电路分别如图8-25c与图8-25d所示。这两种情况下，每个电容C_π两端的开路电阻近似为$1/g_m$，这是因为发射极电阻相对较大[①]。这导致这两个开路时间常数与高增益节点的开路时间常数相比非常小。

$$\begin{aligned}\tau_{oc2} &\approx \frac{C_{\pi 2}}{g_{m2}} \approx \frac{39\,\text{pF}}{0.077} \approx 0.5 \times 10^{-9}\,\text{s} \\ \tau_{oc3} &\approx \frac{C_{\pi 3}}{g_{m3}} \approx \frac{20\,\text{pF}}{0.038} \approx 0.5 \times 10^{-9}\,\text{s}\end{aligned} \quad (8\text{-}54)$$

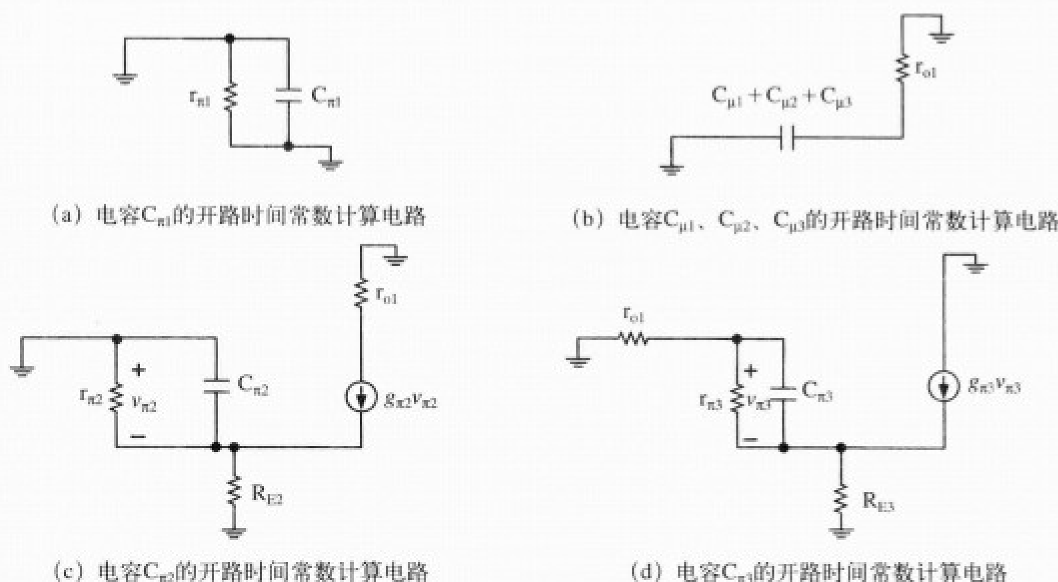
负载电容的开路时间常数为射随器Q_3的增长输出电阻与负载电容的乘积。计算过程如下

$$\begin{aligned}r_{out,Q3} &\approx R_{E3} \left\| \left(\frac{r_{\pi 3} + r_{o1}}{1 + h_{fe3}} \right) \right. \approx 120\Omega \\ \tau_{oc4} &= r_{out,Q3} C_L = (120\Omega)(100\,\text{pF}) = 12 \times 10^{-9}\,\text{s}\end{aligned} \quad (8\text{-}55)$$

该放大器的开路时间常数之和为129.4ns，得到带宽估计为

$$\begin{aligned}\omega_h &\approx \frac{1}{\sum \tau_{oc}} \approx \frac{1}{129.4 \times 10^{-9}} \approx 7.73\,\text{Mrad/s} \\ f_h &\approx \frac{\omega_h}{2\pi} \approx 1.23\,\text{MHz}\end{aligned} \quad (8\text{-}56)$$

① 计算细节参见第7章。



(a) 电容$C_{\pi1}$的开路时间常数计算电路

(b) 电容$C_{\mu1}$、$C_{\mu2}$、$C_{\mu3}$的开路时间常数计算电路

(c) 电容$C_{\pi2}$的开路时间常数计算电路

(d) 电容$C_{\pi3}$的开路时间常数计算电路

图8-25 开路时间常数计算电路

我们可以看到带宽瓶颈为高增益节点电容的开路时间常数。

为了估计该放大器受耦合电容影响形成的低频断点，我们注意到耦合电容C_c看到的增长电阻很简单，就是$r_{\pi1}$。因此，低频断点为

$$\omega_L = \frac{1}{r_{\pi1}C_C} = \frac{1}{(2600)(100\times10^{-6})} = 3.8\,\text{rad/s}$$
$$f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = 0.6\,\text{Hz} \tag{8-57}$$

PSPICE仿真（如图8-26所示）表明，我们的增益与带宽估计非常准确。还进一步看到，我们假设该例子中的射随器具有单位增益是非常合理的。

例题8.7：另一个高增益放大器例子

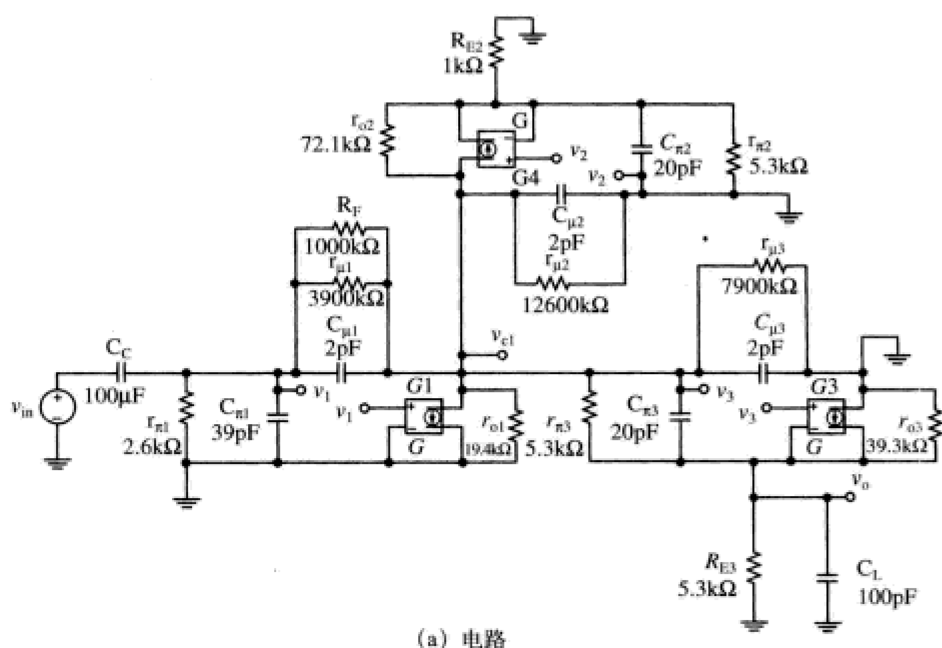
在前面的例子中，我们曾经假设每个晶体管的r_x阻值均为0Ω，也就是忽略不计了。我们很快将会看到，该假设尽管大大简化了数学计算，同时也给出了我们重新考虑增益与带宽估计的必要性。这次，我们假设每个晶体管的r_x阻值均为100Ω，重新对增益和带宽进行估计。

对于增益，我们预计r_x的有限阻值将使增益降低，这是因为它与$r_{\pi1}$以及Q_1的输入电阻的负载效应造成的。我们向前深入一步，使用图8-27所示电路书写节点方程，不过我们可以有先见地估计一下增益降低的程度。我们知道，将电阻r_{x1}包含在内意味着，电压$v_{\pi1}$现在受电阻r_π与r_{x1}之间的分压器设置。尽管Q_1的反馈电阻R_F(＝1000kΩ) 与$r_{\mu1}$(＝3900kΩ) 并联在一起，但是受该电阻周围很高的负增益 (约–1400) 的影响，输入电阻r_{in}还是非常小的。从晶体管基极端看进去的输入电阻（仅将R_F'的影响考虑在内）近似为

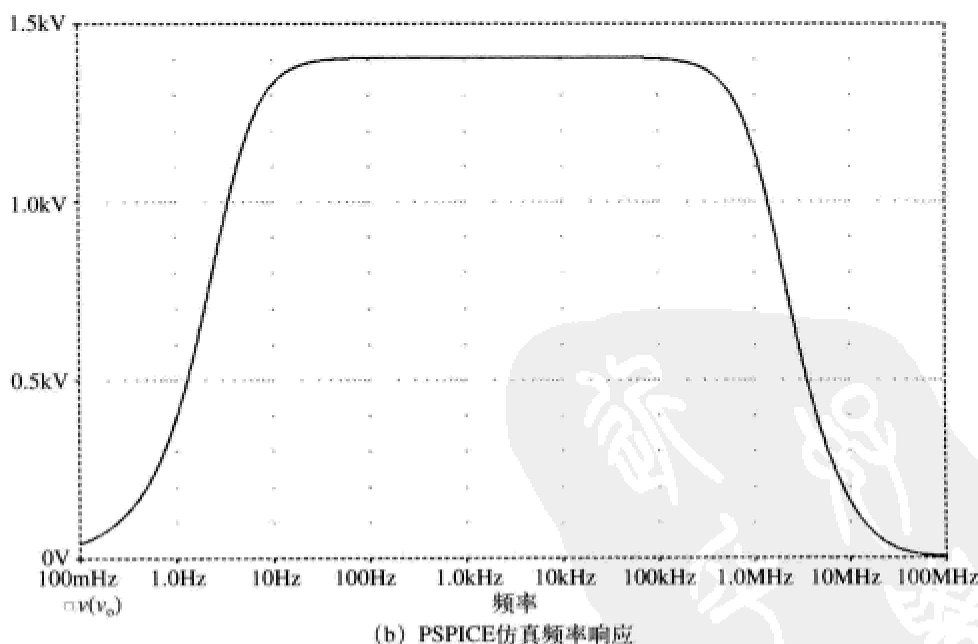
$$r_{in} = \frac{R_F'}{A_V} = \frac{796\,\text{k}\Omega}{1400\Omega} \approx 570\Omega \tag{8-58}$$

因此，降低增益的分压器现在为

$$\frac{r_{\pi1}\|r_{in}}{r_{\pi1}\|r_{in} + r_x} = \frac{467}{467+100} = 0.82 \tag{8-59}$$



（a）电路



（b）PSPICE仿真频率响应

图8-26　高增益放大器的PSPICE分析

因此，我们预计新增益为前一例题的82%左右[①]，或者说是−1150左右。因此，有限电阻r_x对增益降低的影响程度极为严重。

现在，我们使用图8-28所示的电容C_π、C_μ的OCTC电路来挖掘开路时间常数计算的某些细节。对于电容$C_{\pi1}$，我们使用图8-28a所示电路，解得其开路电阻为96Ω（或者说与电阻r_{x1}的阻值相当），这是因为$r_{x1} \ll r_{\pi1}$。$C_{\pi1}$的开路时间常数现在为3.8ns。

① 我们应该使用新的增益值迭代r_{in}计算，不过具体怎么做该由你自己拿主意。

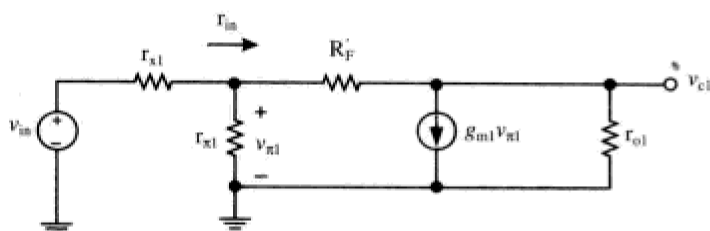


图8-27 高增益放大器受有限电阻r_x影响，计算增益降低程度的电路

对于电容$C_{\mu1}$，我们使用图8-28b所示电路。我们注意到r_{x1}为晶体管Q_1的基极提供了一个电阻。我们现在可以预计电容$C_{\mu1}$具有更大的米勒乘积效应。计算表明$C_{\mu1}$的开路电阻为163.3kΩ，结果其开路时间常数为327ns。注意到该开路时间常数大于$r_x=0\Omega$时的所有开路时间常数之和。这样，我们就已经知道电阻r_x是极其重要的带宽退化因素。

(a) $C_{\pi1}$的OCTC电路

(b) $C_{\mu1}$的OCTC电路

(c) $C_{\pi2}$的OCTC电路

(d) $C_{\mu2}$的OCTC电路

(e) $C_{\pi3}$的OCTC电路

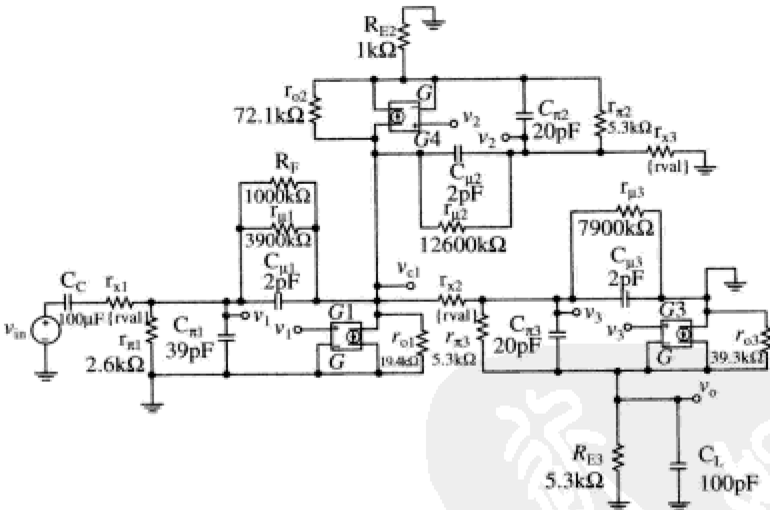
(f) $C_{\mu3}$的OCTC电路

图8-28 带有有限电阻r_x的开路时间常数计算电路

我们为读者节约剩余四个电路（图8-28c~图8-28f）以及负载电容的OCTC计算细节，继续总结在表8-2中。我们注意到，将电阻r_x包含在内大大增加了共射极晶体管Q_1的电容$C_{\mu1}$的开路时间常数。包含r_x的整体影响是放大器的OCTC估计带宽为373kHz左右，相比较$r_x = 0\Omega$时的带宽为1MHz，远远高于新的带宽估计。图8-29a与图9-29b所示的PSPICE仿真也验证了该结果。我们看到基极扩展电阻导致中间带增益降低至–1150左右，带宽降至500kHz左右。这里郑重警告：忽略电阻r_x，后果自负。

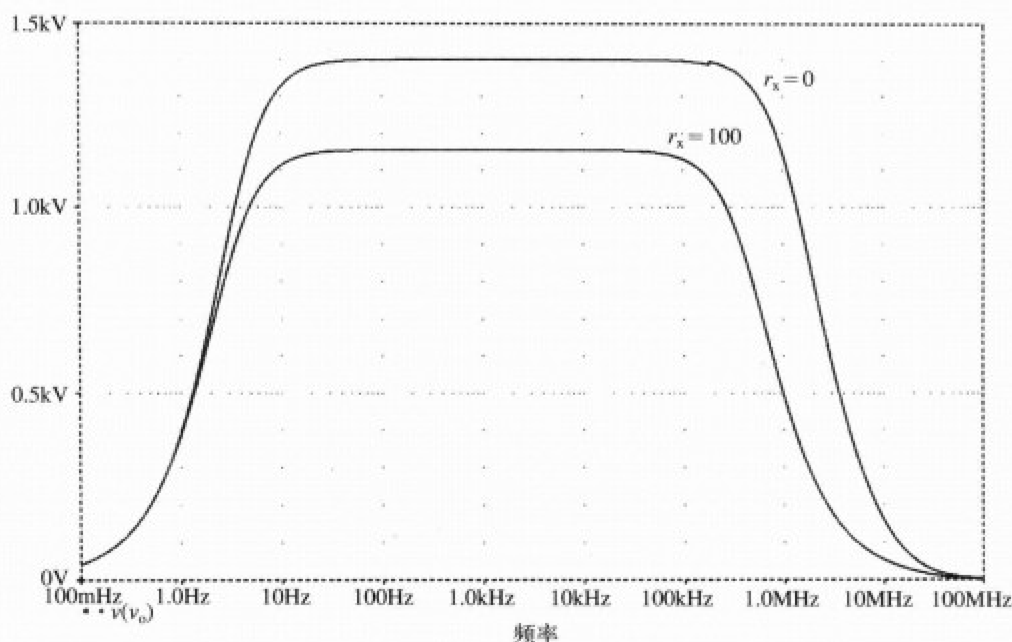
表8-2　高增益放大器$r_x = 100\Omega$时的OCTC计算总结表

	Q_1	Q_2	Q_3
R_{OC} for C_π	96.3Ω	14Ω	120Ω
R_{OC} for C_μ	163.3kΩ	21.4kΩ	19.1kΩ
τ_{OC} for C_π	3.8ns	0.5ns	2.4ns
τ_{OC} for C_μ	327ns	43ns	38ns
τ_{OC} for C_L	12ns		
OCTC之和	427ns		
ω_h的估值	2.34 Mrad/s		
f_h的估值	373kHz		



（a）电路

图8-29　高增益放大器$r_x = 100\Omega$时的PSPICE分析



（b）晶体管$r_x=0\Omega$与$r_x=100\Omega$时的放大器频率响应比较。可以看到，与$r_x=0\Omega$相比，有限电阻r_x使增益和带宽降低

图8-29 （续）

8.6 本章习题

习题8.1

使用扩展混合π模型，确定图8-30所示射随器连接电路的低频输入电阻，将其表述为晶体管参数以及静态工作电平的函数。假设两个晶体管相同，Q_1的集电极与$+V_{CC}$电压源连接在一起。

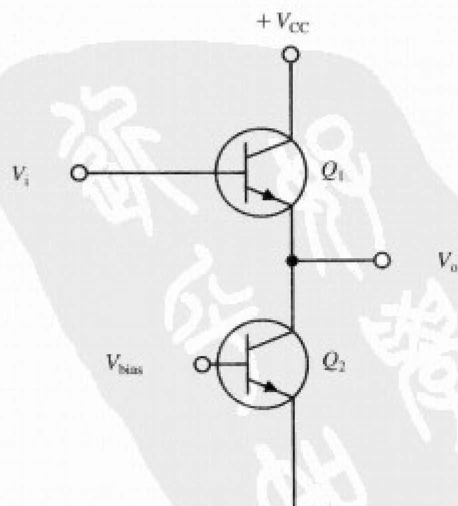


图8-30 习题8.1与习题8.2的电路

习题8.2

继续使用扩展混合π模型与图8-30所示电路，求解从Q_1集电极看进去的输出电阻，将其表述为晶体管参数以及静态工作条件的函数。

习题8.3

使用开路时间常数方法，估计图8-31所示电流镜电路小信号响应的速度。假设两个晶体管均为2N3906，直流偏置设置为$I_C=10\text{mA}$，$V_{CB}=6\text{V}$。假设电阻$r_x=0\Omega$，增长输入电流I_{in}具有非常高的电阻特性，输出电流I_{out}则有非常低的电阻特性。

（a）绘制小信号模型。

（b）使用开路时间常数方法估计其带宽。

（c）使用PSPICE进行仿真，将PSPICE仿真结果与OCTC估计结果进行比较。

习题8.4

我们回顾一下习题8.3的电流镜电路，不过这次并不设定基极电阻$r_x = 0\Omega$，而是假设其在100~200Ω之间变化。很不幸，因为r_x是有限电阻，这种情况下开路时间常数问题变得非常困难。使用PSPICE重新进行仿真，求解有限电阻r_x在该范围内变化时电路的带宽。评论该结果与$r_x = 0\Omega$的结果应该如何进行比较。

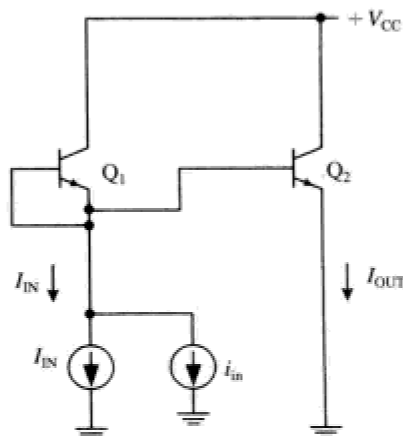


图8-31 习题8.3与习题8.4的电路

习题8.5

使用高增益技术设计一个增益幅度$|A_v| = 10\ 000$的晶体管放大器。使用设计的放大器驱动电容负载，假设在输出端需要一个射随器将高增益节点与电容负载隔离开来。假设手头可使用的晶体管的基区宽度调制因子$\eta_{npn} = 6.7 \times 10^{-4}$，$\eta_{pnp} = 1.8 \times 10^{-4}$。不需要操心偏置设置电路细节（可以假设集电极电流可以魔术般地工作在正确的直流偏置水平上）。在计算时忽略r_x的影响，并且假定$h_{fe,\ npn} = 200$，$h_{fe,\ pnp} = 175$。使用SPICE对设计电路的增益进行仿真。假设两个晶体管的$C_\pi = 0\text{pF}$、$C_\mu = 2\text{pF}$，使用OCTC方法估计设计电路的带宽，并且使用SPICE仿真进行验证。

8.7 参考文献

Early, J. M., "Effects of Space-Charge Layer Widening in Junction Transistors," *Proceedings of the I.R.E.*, 1952, pp. 1401-1406.

Gray, P. E., DeWitt, D., Boothroyd, A. R., and Gibbons, J. F., *Physical Electronics and Circuit Models of Transistors*, Semiconductor Electronics Education Committee, volume 2, JohnWiley, 1964.

Gray, Paul R., Hurst, Paul J., Lewis, Stephen H., and Meyer, Robert G., *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, 4th edition, John Wiley, 2001.

Grebene, Alan B., *Bipolar and MOS Analog Integrated Circuit Design*, John Wiley, 1984.

Hart, B. L., "Modeling the Early Effect in Bipolar Transistors," *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. 18, no. 1, February 1983, pp. 139-140.

Huiting, Chen, Whiteside, F., and Geiger, R., "Current Mirror Circuit with Accurate Mirror Gain for Low β Transistors," *Proceedings of the 2001 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, (ISCAS 2001), May 6-9, 2001, pp. 536-539.

Joardar, K., "A New Approach for Extracting Base Width Modulation Parameters in Bipolar Transistors," *Proceedings of the 1994 Bipolar/BiCMOS Circuits and Technology Meeting*, October 1994, pp.140-143.

Kimura, K., "Low Voltage Techniques for Bias Circuits," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 5, May 1997, pp. 459-465.

Liou, J. J., "Comments on 'Early Voltage in Very-Narrow-base Bipolar Transistors,' by D. J. Roulston" *IEEE Electron Device Letters*, vol. 11, no. 5, May 1990, p. 236.

Mahattanakul, J., Pookaiyaudom, S., and Toumazou, C., "Understanding Wilson Current Mirror via the Negative Feedback Approach," *Proceedings of the 2001 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, (ISCAS 2001), May 6-9, 2001, pp. 532-535.

McAndrew, C. C., and Nagel, L. W, "SPICE Early Modeling [Bipolar Transistors]," *Proceedings of the 1994*

Bipolar/BiCMOS Circuits and Technology Meeting, October 10-11, 1994, pp 144-147.

Roberge, James K., *Operational Amplifiers: Theory and Practice*, John Wiley, 1975.

Roulston, D. J., "Early Voltage in Very-Narrow-base Bipolar Transistors," *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. 11, no. 2, February 1990, pp. 88-89.

Rucker, L. M., "Monolithic Bipolar Diodes and Their Models," *IEEE Circuits and Devices Magazine*, vol. 7, no. 2, March 1991, pp. 26-31.

Soclof, Sidney, *Analog Integrated Circuits*, Prentice-Hall, 1985.

Thompson, Marc T., "Tips for Designing High-Gain Amplifiers," *Electronic Design*, May 16, 1994, pp. 83-90.

van Kessel, J., and van de Plassche, R. J., "Integrated Linear Basic Circuits," *Philips Technical Review*, vol. 32, no. 1, 1971, pp. 1-10.

Yuan, J. S., and Liou, J. J., "An Improved Early Voltage Model for Advanced Bipolar Transistors," *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 38, no. 1, January 1991, pp. 179-182.



第9章　MOSFET器件与基本MOS放大器简介

本章概要

- ❑ 本章绕开双极性晶体管世界，进入金属－氧化物半导体场效应晶体管（MOSFET[1]）世界。本章先讨论基本的信号MOS门电路，然后讨论MOS放大器。这里一并给出了MOS晶体管的增长模型，并且在设计实例中使用它们来分析MOS放大器的增益和带宽计算。

9.1　场效应晶体管早期历史

MOSFET的发明早于双极性晶体管。图9-1所示电路摘自1933年Julius Lilienfeld博士获得的美国专利。Julius Lilienfeld博士在三个专利中分别给出了MOSFET、MESFET以及其他MOS器件的物理结构，但是受当时制造实际半导体器件的困难制约，他没能构建出任何可工作的FET器件。事实上，直到20世纪60年代，才制造出世界上第一款商业上取得成功的FET器件。

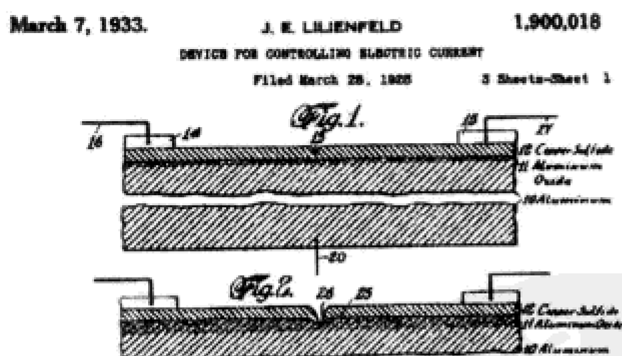


图9-1　Lilienfeld的1900018号美国专利摘录[2]，给出了两个不同版本的MOSFET结构。在专利的图1中，16号端点是源极，15号端点是漏极，20号端点是栅极

9.2　基本MOS器件的定性讨论

基本的N沟道水平MOS门如图9-2所示。这之所以是个水平器件的原因在于，电流的方向在x轴上水平跨越器件的表面[3]。N沟道MOS器件以轻度掺杂的P型衬底为起点，N型源极区与漏极区叠加在沟道的两端。接下来在衬底表面生长出隔离氧化物层，栅极连接由氧化物层与P型衬底隔离开来，具有非常低的电导率。这个氧化物层就形成了一个栅极电容。第四个端点（衬底）与电路的最低电位连接在一起。图中所示MOS器件的四个端点分别为：源极

① 这里不涵盖JFET（结型场效应晶体管）的内容。

② Lilienfeld的三个专利连续涵盖了基本MOS晶体管结构。它们是美国专利1745175号（1926年10月8日提出申请，1930年1月18日授予专利权）、1877140号（1928年12月8日提出申请，1932年9月13日授予专利权）、1900018号（1928年3月28日提出申请，1933年3月7日授予专利权）。

③ 功率型MOS器件通常是垂直器件，电流沿竖直方向流过器件。

(source，简称S)、栅极（gate，简称G)、漏极（drain，简称D）以及衬底（substrate或者bulk，简称B)。

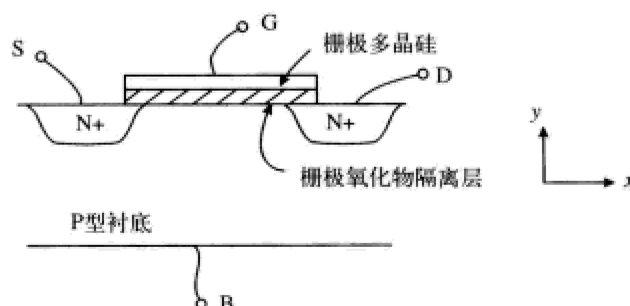


图9-2 基本N沟道MOS器件。器件的宽度在书页内为W（向书页内看进去的方向，译者注）。端点包括源极（S)、栅极（G)、漏极（D）以及衬底（B)

栅极接触与氧化物隔离层单位面积区域形成的电容[①]为

$$C_{ox} = \frac{\varepsilon_{ox}}{t_{ox}} \tag{9-1}$$

这里ε_{ox}是氧化物层的介电常数，t_{ox}是氧化物层的厚度。

现在我们来做个思想试验。我们来考虑MOSFET器件处于关闭状态时的等效电路。如果栅极没有连接，源极沟道结点和漏极沟道结点的通路均可看作是二极管，这些二极管背靠背连接。除了二极管漏电流以外，没有电流流过该器件（如图9-3所示)。

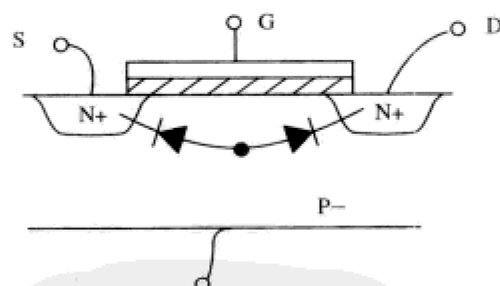


图9-3 N沟道MOS器件，标明背靠背连接二极管。栅极不连接，没有电流流入MOS器件

在第二个思想试验中，我们将源极和漏极接地，在栅极施加正向电压（如图9-4所示)。栅极电压在氧化物层产生电场，该电场方向起始于栅电极的正电荷，终止于沟道内的负电荷。如果我们在栅极施加足够的正向电压，我们就可以吸引足够的迁移电子到栅极下面的沟道中，以形成*逆向层*（inversion layer)。基本上来说，在这个魔术电压点（称为门限电压V_T（threshold voltage)），可以导致栅极下的P型材料表现为N型材料的特性，这是由形成的逆向层造成的。在N＋岛之间，我们看到了一个表现为N型区域的逆向层。如果施加的栅－源电压在门限电压V_T以下，那么MOSFET晶体管实质上处于关闭状态。如果$V_{GS}>V_T$，MOSFET器件则支持电流通过。

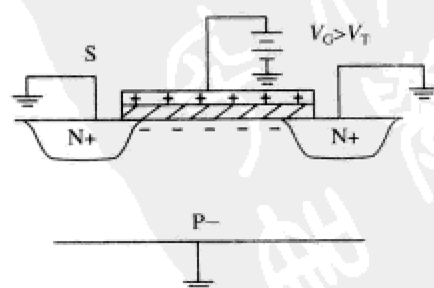


图9-4 N沟道MOS器件，施加的正向栅极电位大于门限电压V_T，形成逆向层

为了理解MOS晶体管V/I曲线形状的细节，

① ε_{ox}的单位是F/m，因此C_{ox}的单位是F/m²。

我们必须求助于数学模型。

9.3 MOS器件的V/I曲线

如果期望得到理想的MOS器件的V/I曲线，我们就必须考虑更为详细的N沟道MOSFET器件模型，如图9-5所示。如果在MOSFET晶体管的沟道内有电流通过，我们预计存在一个沿着沟道长度变化的电压。我们将该沟道电压命名为$V_c(x)$。记住，如果栅－源电压（V_{GS}）小于门限电压V_T，就没有电流通过。我们可以求得栅极下面沟道内单位面积的电荷为

$$Q_c(x) = -C_{ox}(V_{GS} - V_T - V_c(x)) \tag{9-2}$$

请注意，只有在栅－源电压超过门限电压时，才存在栅极迁移电荷。栅极迁移电荷$Q_c(x)$是沿着栅极方向x位置处的电荷密度C/m^2。

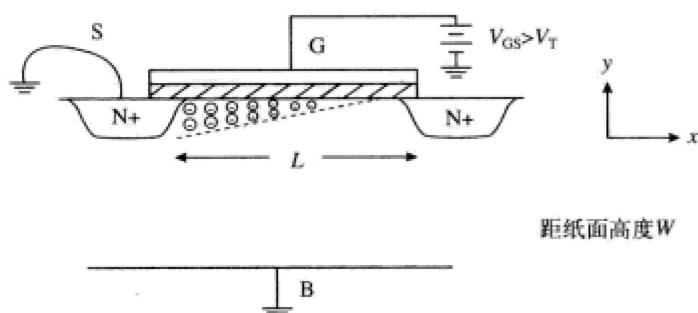


图9-5 N沟道MOS器件，具有正向栅极电位（$>V_T$），标明栅极下面的逆向层。宽度W沿着指向书页内的方向

漏极电流等于[①]

$$I_D = -WQ_c(x)v(x) \tag{9-3}$$

这里W是MOS器件纵向宽度[②]，$v(x)$是电荷通过沟道的速率。

如果假设这是个低电场（也就是说是个大长度器件），那么漂移速率与电场强度线性相关，即

$$v(x) = \mu_n E_x = \mu_n \frac{dV_c(x)}{dx} \tag{9-4}$$

那么，我们可以推导出漏极电流的表达式为

$$I_D = WC_{ox}\left[V_{GS} - V_c(x) - V_T\right]\mu_n \frac{dV_c(x)}{dx} \tag{9-5}$$

我们可以将导数dx移至等式的左端，得

$$I_D dx = W\mu_n C_{ox}\left[V_{GS} - V_c(x) - V_T\right]dV_c(x) \tag{9-6}$$

接下来，我们对等式的两端进行积分。对于x，我们沿着沟道长度从0到L进行积分，对于沟道电压$V_c(x)$，我们从0到V_{GS}进行积分。

$$\int_0^L I_D dx = \int_0^{V_{GS}} W\mu_n C_{ox}[V_{GS} - V_c(x) - V_T]dV_c(x) \tag{9-7}$$

① 注意各个物理量的单位关系。电流的单位是C/s，W的单位是m，$Q_c(x)$的单位是C/m^2，速率的单位是m/s。

② 即如图9-4所示的器件，向书页看进去的器件宽度。——译者注

积分结果为

$$I_D L = \mu_n W C_{ox}\left[(V_{GS} - V_T)V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2}\right]$$
$$\Downarrow$$
$$I_D = \mu_n C_{ox}\left(\frac{W}{L}\right)\left[(V_{GS} - V_T)V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2}\right] \tag{9-8}$$

这就是理想MOSFET晶体管的漏极电流方程，在栅－源电压大于门限电压时有效，即$V_{GS} > V_T$。

如果V_{DS}非常小（$V_{DS} << V_{GS}$），并且$V_{GS} > V_T$，则该器件表现为一个压控电阻。

$$I_D \approx \mu_n C_{ox}\left(\frac{W}{L}\right)((V_{GS} - V_T)V_{DS}) \quad V_{DS} << V_{GS} \tag{9-9}$$

随着V_{DS}逐渐增大，电流也逐渐增加，这是因为存在更大的水平电场加速载流子通过沟道。电流也随着更高的（$V_{GS}-V_T$）增加，因为这增加了栅极下面用于支持电流的电荷数量。这个工作区域如图9-6所示。

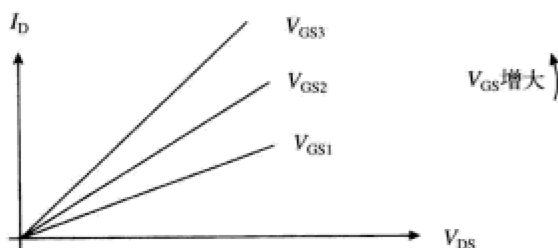


图9-6 $V_{DS} << V_{GS}$时MOS器件的V/I曲线。漏极－源极连接表现为受V_{GS}控制的压控电阻

如果V_{DS}等于或者大于（$V_{GS}-V_T$），存在足够的漏极－源极电压，可以“关断”(pinch off)在沟道漏极端的沟道。这意味着在沟道漏极端的栅极电荷数量为零，如图9-7所示，达到了V_{GS}能够支持的最大漏极电流。如果V_{DS}继续增大，首先是漏极电流不再继续增大。在MOS器件中，这称为饱和区[①]。

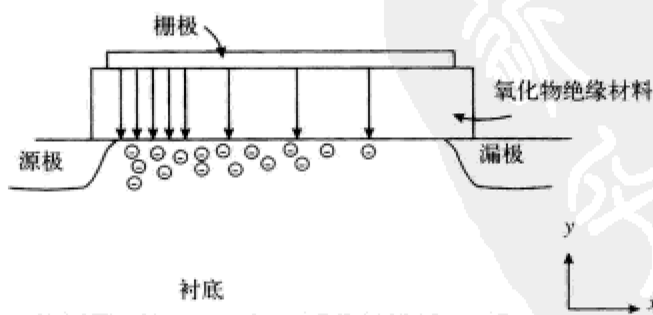


图9-7 MOS器件工作在关断区，即$V_{DS}>$（$V_{GS}-V_T$），栅极电荷和氧化物层电场的定性分析图。在沟道的漏极端，不存在栅极迁移电子，漏极关断（为清晰起见，分析图的坐标维向发生了扭曲）。

对于$V_{DS}>$（$V_{GS}-V_T$）的情况，我们发现漏极电流饱和。事实上，在漏极电流方程中设定

① 不要与双极性晶体管混淆，双极性晶体管的饱和区发生在$V_{CE} < V_{CE,sat}$时。

$V_{DS}=(V_{GS}-V_T)$，我们就可以求得饱和区的漏极电流。饱和漏极电流为

$$I_D=\frac{\mu_n C_{ox}}{2}\frac{W}{L}(V_{GS}-V_T)^2 \tag{9-10}$$

理想MOS器件的V/I曲线如图9-8所示。

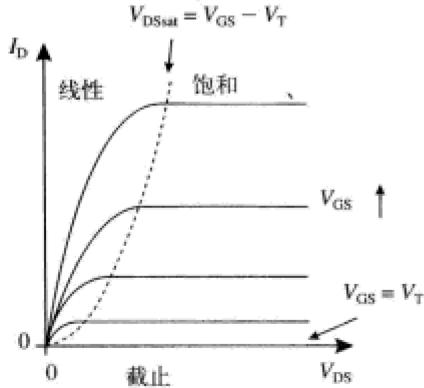


图9-8　MOS器件的V/I曲线。标明线性、饱和以及关闭工作区

9.4　MOS器件的低频小信号模型

只有当MOS器件工作在饱和区，即$V_{DS}>(V_{GS}-V_T)$，并且$V_{GS}>V_T$时，MOS器件才用作放大器。在饱和区，因为漏极电流随V_{GS}变化，并且（主要是）不随V_{DS}变化，所以具有放大作用。该工作区与双极性晶体管的正向放大区类似，双极性晶体管在正向放大区具有放大作用。

如果我们使MOS器件工作在饱和区，为了得到漏极电流随栅－源电压的小信号变化，我们还必须得到MOS器件的跨导。

$$g_m=\frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}}=\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}(V_{GS}-V_T)=\sqrt{2\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}I_D} \tag{9-11}$$

该表达式意味着，MOS器件的跨导与偏置电流I_D的平方根成比例变化。将该表达式与双极性晶体管的跨导表达式进行比较，双极性晶体管的跨导则是与集电极偏置电流的一阶指数成比例变化。

受沟道长度调制（channel-length modulation）效应的影响，MOS晶体管的输出电阻也是有限的，这与双极性晶体管的基区宽度调制效应类似。漏极耗尽区宽度随V_{DS}的变化而变化，带来的影响是漏极电流也随V_{DS}变化。与前面的双极性晶体管推导类似，我们可以引入参数λ来修改MOSFET的大信号V/I特性曲线，参数λ可以帮助我们对器件的有限输出电阻进行建模

$$I_D=\frac{\mu_n C_{ox}}{2}\frac{W}{L}(V_{GS}-V_T)^2(1+\lambda V_{DS}) \tag{9-12}$$

我们可以将该效应增长建模为跨接在漏极和源极端点之间的输出电阻r_o。可以得到小信号模型的输出电阻为

$$r_o=\frac{1}{\frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}}}=\lambda I_D \tag{9-13}$$

源极－衬底端点表现为输入端点的次级集合。在某些情况下，我们会将源极和衬底端点接合在一起，因此我们可以忽略这一次级输入的影响。不过，如果衬底端点没有与源极端点

连接在相同的电位上，我们就需要考虑这一影响。其结果是，要在小信号模型中引入一个跨导以对这个后向栅板效应（back-gate effect）建模，即

$$g_{mb} = \frac{\partial I_D}{\partial V_{BS}} \tag{9-14}$$

将这些特性综合在一起，我们得到MOS晶体管工作在饱和区的低频小信号模型如图9-9所示。

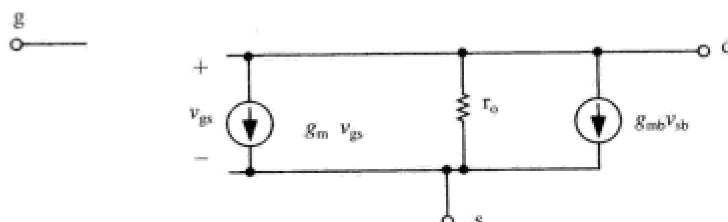


图9-9 MOS晶体管工作在饱和区的低频小信号模型。标明栅极（g）、漏极（d）、源极（s）端点。衬底（b）连接也考虑在内，只不过没有标出。$g_{mb}v_{sb}$源发生器产生与源极－衬底电压v_{sb}成比例的电流

9.5 MOS器件的高频小信号模型

MOS器件的高频小信号模型包含电容元件，以对栅极－源极电容（C_{gs}）、栅极－漏极电容（C_{gd}）、源极－衬底电容（C_{sb}）、漏极－衬底电容（C_{db}）进行建模。电容C_{gs}对栅极下面的电荷效应进行建模，电容C_{gd}对漏极区上面与栅极氧化物层重叠的区域进行建模，电容C_{db}和C_{sb}分别为漏极－衬底以及源极－衬底的耗尽电容。MOS晶体管的高频小信号模型如图9-10所示。

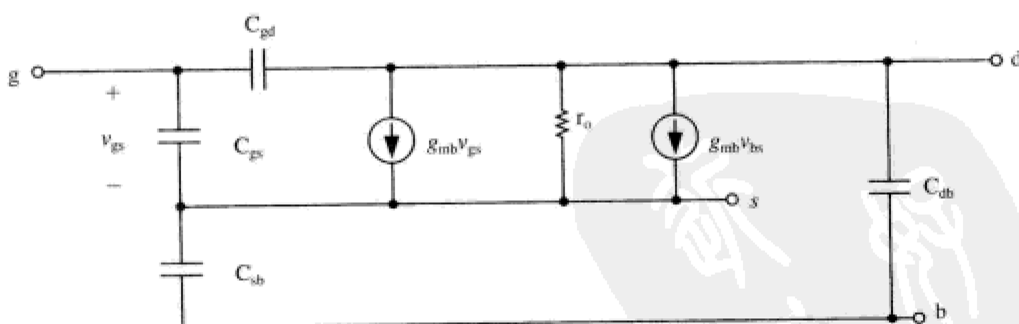


图9-10 MOS晶体管的高频小信号模型，标明栅极－源极电容（C_{gs}）、栅极－漏极电容（C_{gd}）、源极－衬底电容（C_{sb}）、漏极－衬底电容（C_{db}）

9.6 基本MOS放大器

MOS放大器的电路结构与双极性晶体管相似，如表9-1所示。

表9-1 BJT放大器与MOS放大器比较表

BJT	MOS	BJT	MOS
射随器	源极跟随器	共基极	共栅极
共射极	共源极	BJT差分放大器	MOS差分放大器

与双极性放大器的分析相比，分析MOS放大器时，存在下列几个不同点需要考虑：

- MOS器件的增长输入电阻非常大，在BJT器件中，基极端的输入电阻受r_π和$(1+\beta_0)R_E$限制。
- MOSFET晶体管属于4端口器件。在MOS器件中，必须考虑衬底的连接。更进一步，存在额外的相对衬底的寄生元件（C_{sb}、C_{db}）也必须考虑。
- MOS器件包含另外一个必须考虑的受控电流发生器，这是由后向栅极效应造成的。事实上，栅极－衬底电压表现为一个额外栅极。

9.6.1　源极跟随器

源极跟随器缓冲电路（source-follower buffer）如图9-11a所示。该电路具有高输入电阻，低输出电阻，增益接近于1.0倍。其低频小信号模型[①]如图9-11b所示。使用该模型，我们可以求解缓冲器电路的小信号增益。在输出节点建立KCL方程，得

$$g_m v_{gs} - v_o g_o = 0 \rightarrow g_m(v_i - v_o) - v_o g_o = 0 \tag{9-15}$$

简化后得到

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{g_m}{g_m + g_o} \tag{9-16}$$

如果MOS器件的跨导与$1/r_o$相比非常大，即$g_m >> g_o$，则该增益非常接近于+1倍。

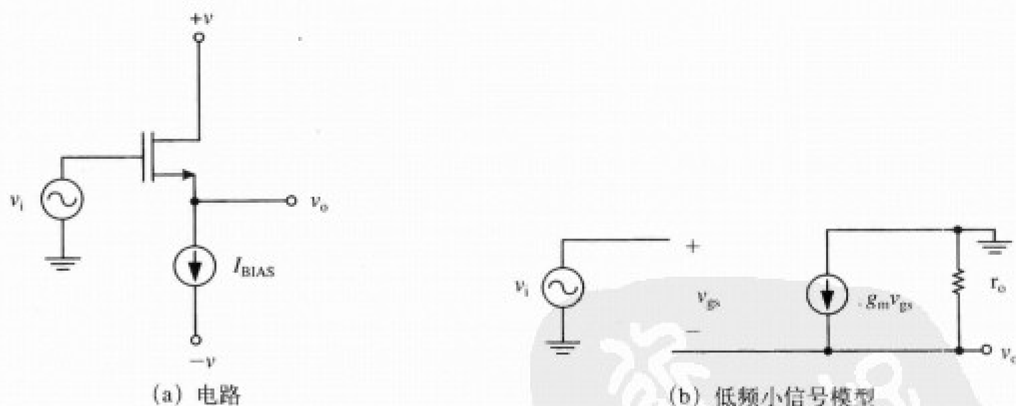


图9-11　源极跟随器

9.6.2　共源极放大器

共源极放大器（common-source amplifier）如图9-12a所示。该电路具有高输入电阻，提供的电压增益与输入电压极性相反。它的低频小信号模型[②]如图9-12b所示。使用该模型，我们可以求得电路的小信号增益为

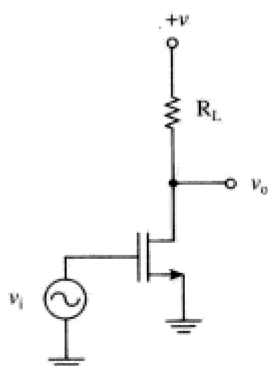
$$\frac{v_o}{v_i} = -g_m(R_L \| r_o) \tag{9-17}$$

如果我们使用理想电流源作为共源极放大器的负载，而不是电阻，则得到如图9-13所示电路。该放大器的增益为

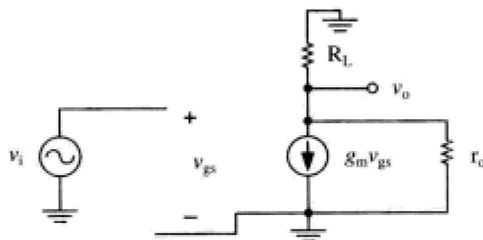
① 在本例中，我们忽略后向栅极效应，因此$g_{mb}=0$。我们还注意到$v_{gs}=v_i-v_o$。

② 这里，又一次忽略了后向栅极效应。

$$\frac{v_o}{v_i} = -g_m r_o \tag{9-18}$$

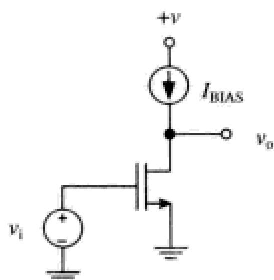


(a) 电路，为了简化忽略偏置设置细节

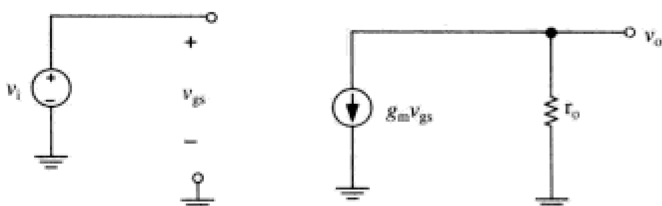


(b) 低频小信号模型

图9-12 电阻负载共源极放大器



(a) 电路。为了简化忽略偏置设置细节，并且假设理想电流源具有无限增长输出电阻



(b) 低频小信号模型，假设后向栅极效应可以忽略（也就是假设$g_{mb}=0$）

图9-13 理想电流源负载共源极放大器

9.6.3 共栅极放大器

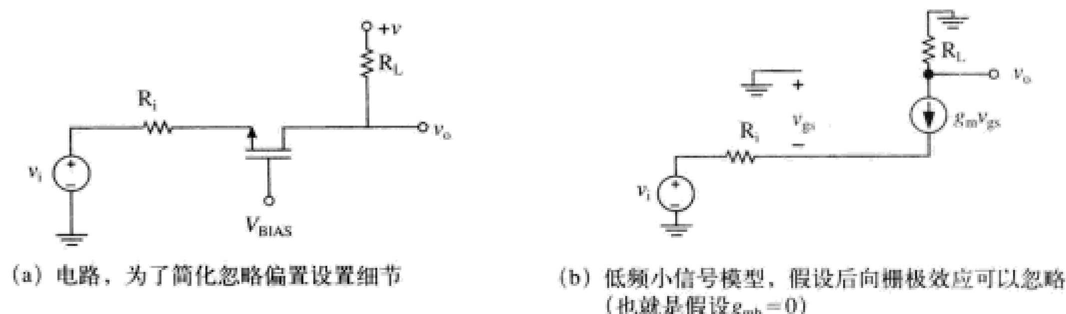
共栅极放大器（common-gate amplifier）如图9-14所示。我们可以使用图9-14b所示的增长电路，并且对源极端电流进行求和，来求解电压v_{gs}。

$$\frac{v_i + v_{gs}}{R_i} + g_m v_{gs} = 0 \Rightarrow v_{gs} = -v_i\left(\frac{1}{1+g_m R_i}\right) \tag{9-19}$$

电路的输入－输出传递函数为

$$v_o = -g_m v_{gs} R_L = v_i\left(\frac{g_m R_L}{1+g_m R_i}\right)$$
$$\therefore \frac{v_o}{v_i} = \frac{g_m R_L}{1+g_m R_i} \tag{9-20}$$

可以看到，如果$g_m R_i >> 1$，则增益近似为R_L/R_i。



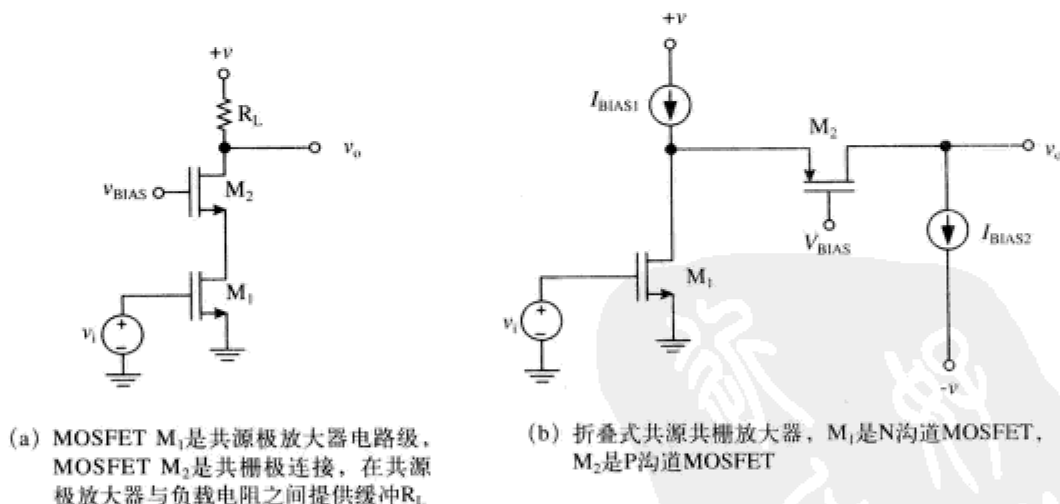
（a）电路，为了简化忽略偏置设置细节

（b）低频小信号模型，假设后向栅极效应可以忽略（也就是假设$g_{mb}=0$）

图9-14 电阻负载共栅极放大器

我们可以在共源共栅放大器电路结构中使用共栅极放大器来对共源极放大器的输出进行放大（如图9-15a所示）。在这个广泛使用的电路结构中，共栅极缓冲电路M_2是共源极晶体管M_1的负载。M_1漏极产生的压控电流被M_2缓冲，流过负载电阻R_L。对于M_1的漏极来说，M_2的源极具有低电阻特性，因此消除了米勒效应的影响。

该电路结构的另一变种是如图9-15b所示的折叠式共源共栅放大器（folded cascode amplifier）。折叠式共源共栅放大器与基本型共源共栅放大器的电路结构是相似的，因为它也包含了一个共源极晶体管，向共栅极缓冲晶体管馈入电流。P沟道共栅极晶体管在M_1和电流源负载之间提供缓冲。



（a）MOSFET M_1是共源极放大器电路级，MOSFET M_2是共栅极连接，在共源极放大器与负载电阻之间提供缓冲R_L

（b）折叠式共源共栅放大器，M_1是N沟道MOSFET，M_2是P沟道MOSFET

图9-15 MOS共源共栅放大器

9.6.4 MOS电流镜

基本的CMOS电流镜如图9-16a所示。该电路模块工作的基本前提与双极性电流镜相同，首先假设两个器件都工作在饱和区，CMOS晶体管的栅极具有的相同V_{GS}，它们的漏极电流I_D也相同。

为了顾及MOS电流镜的小信号带宽，我们参考图9-16b所示的电路模型。注意到，所有的电容相互都是并联关系。电容两端的电阻约为1/（$2g_m$）。因此，使用开路时间常数方法，该电路的小信号带宽估计为

$$\omega_h \approx \frac{2g_m}{C_{gs1}+C_{db1}+C_{gs2}+C_{gd2}} \tag{9-21}$$

我们还注意到，简单电流镜的低频小信号增长输出电阻非常适中，约为r_o。

Wilson电流镜（如图9-17所示）使用负反馈电路来增加电流镜的输出电阻。我们可以使用图9-17b的低频小信号模型来理解电流镜的工作。首先假设，所有MOS器件都是相同的，偏置设置在相等大小的漏极电流，因此$g_{m1}=g_{m2}=g_{m3}$，$r_{o1}=r_{o2}=r_{o3}$。二极管连接MOS器件M_2被它的输出电阻（$1/g_{m2}$）代替。其次，我们为电路增加了测试电流源i_t，再来计算其测试电压v_t，以求解M_3漏极节点的增长输出电阻。

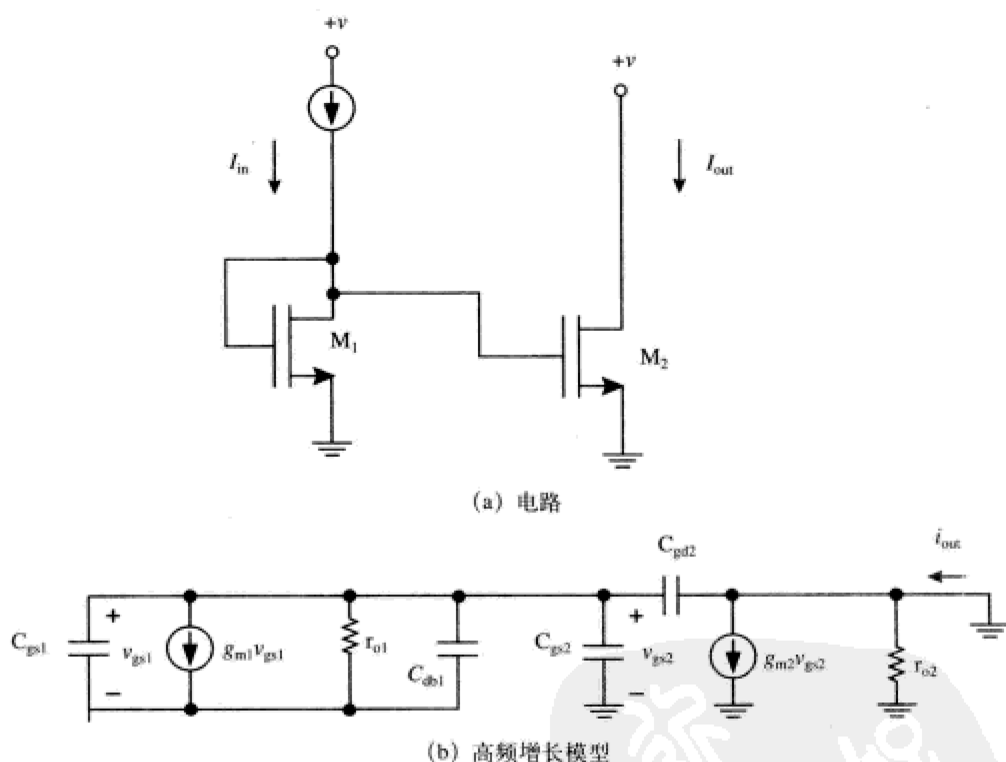


图9-16 基本MOS电路镜

写出测试电压源环路周围的KVL方程，得

$$v_t = i_x r_o + v_b = i_x r_{o3} + \frac{i_t}{g_{m2}} \tag{9-22}$$

未知电流i_x为

$$i_x = i_t - g_{m3}v_a \tag{9-23}$$

未知电压v_a为

$$v_a = -g_{m1}v_b r_{o1} = -g_{m1}\left(\frac{i_t}{g_{m2}}\right)r_{o1} \tag{9-24}$$

求解输出电阻，得

$$r_{out} = \frac{v_t}{i_t} \approx \left(1+\frac{g_{m1}g_{m3}}{g_{m2}}r_{o1}\right)r_{o3} \tag{9-25}$$

可以看到，该输出电阻远远大于基本电流源的输出电阻。

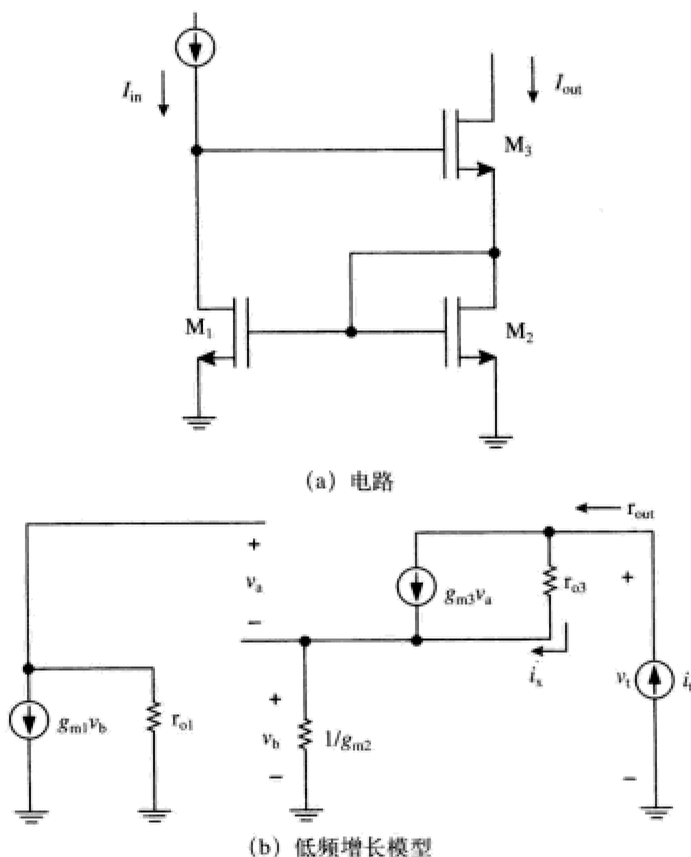


图9-17　Wilson电流源

Wilson电流镜的另一个变种是"增强"Wilson电流镜（如图9-18所示）。电路中增加了MOS器件M_4，确保M_1和M_2的漏极－源极电压相等。这降低了M_1和M_2的有限输出电阻造成的增益误差。

能够提供高输出电阻的另一种MOS电流镜是共源共栅放大器电流镜（如图9-19所示）。注

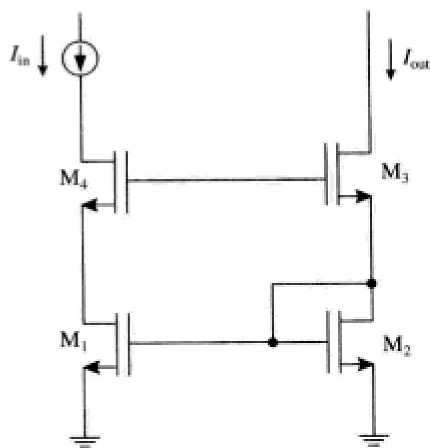


图9-18　"增强"Wilson电流镜

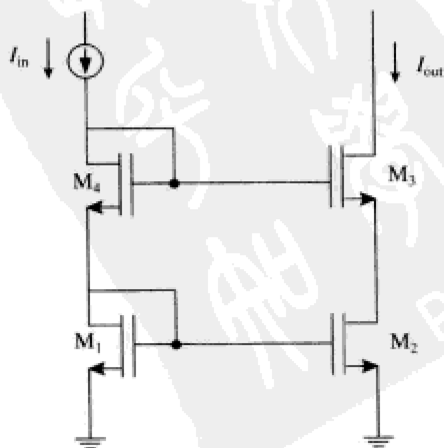


图9-19　共源共栅放大器电流镜

意到，输出晶体管M_3驱动输出电流进入M_2的漏极端。这确保在M_3的漏极端看到的输出电阻非常大。

例题9.1：MOS放大器设计实例

我们来计算一个MOS放大器设计实例，以演示MOS器件模型以及开路时间常数在带宽分析中的应用。我们假设需要的增益幅度为10（也就是20dB），−3dB带宽超过350MHz。输入信号源有一个1kΩ串联电阻，放大器要驱动一个1pF的负载电容。忽略后向栅极效应（也就是假设$g_{mb}=0$）。假设晶体管的衬底与地相连接。MOS晶体管具有下列参数：

- $g_m = 0.01\text{A/V}$
- $r_o = 3\text{k}\Omega$
- 栅极－源极电容$C_{gs}=0.2\text{pF}$
- 栅极－漏极电容$C_{gd}=0.05\text{pF}$
- 源极－衬底电容$C_{sb}=0.02\text{pF}$
- 漏极－衬底电容$C_{db}=0.02\text{pF}$

尝试#1：共源极放大器

该放大器的第一轮粗略设计如图9-20a所示，其低频小信号模型如图9-20b所示。为了满足增益指标的要求，我们可以使用低频小信号模型来求解负载电阻R_L的最小值，得

$$\frac{v_o}{v_i} = -g_m R_L \| r_o \Rightarrow R_L > 1500\Omega \tag{9-26}$$

我们设定$R_L = 1.6\text{k}\Omega$，以使电路增益稍大于指标要求，同时也为了应对忽略后向栅极效应的情况。

我们将使用图9-20c的高频小信号模型来求解电路带宽。可以看到，负载电容C_L与漏极－衬底电容C_{db}是并联关系。源极－衬底电容C_{sb}未包含在内，这是因为源极和衬底均是累加接地的。

求解开路时间常数的电路如图9-21所示。对于栅极－源极电容和栅极－衬底电容，可以使用图9-21a电路来求解。

$$\begin{aligned} R_{o1} &= R_s = 1\text{k}\Omega \\ \tau_{o1} &= R_{o1}C_{gs} = (1000)(0.2\text{pF}) = 0.2\text{ns} \end{aligned} \tag{9-27}$$

对于负载电容和漏极－衬底电容，可以使用图9-21b电路来求解。

$$\begin{aligned} R_{o2} &= R_L \| r_o = 1043\Omega \\ \tau_{o2} &= R_{o2}(C_L + C_{db}) = (1043)(1.02\text{pF}) = 1.06\text{ns} \end{aligned} \tag{9-28}$$

对于栅极－漏极电容，可以使用图9-21c电路来求解。

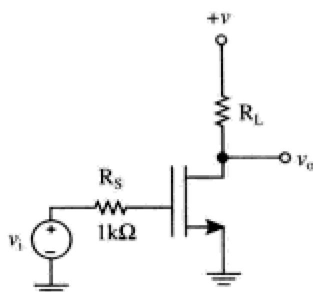
$$\begin{aligned} R_{o3} &= R_S + R_L \| r_o + g_m R_S (R_L \| r_o) = 12473\Omega \\ \tau_{o3} &= R_{o3}C_{gd} = (12473)(0.05\text{pF}) = 0.62\text{ns} \end{aligned} \tag{9-29}$$

开路时间常数之和以及带宽估计结果为

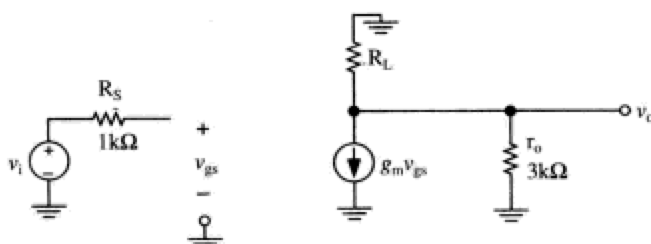
$$\begin{aligned} &\sum \tau_{oi} = \tau_{o1} + \tau_{o2} + \tau_{o3} = 1.88\,\text{ns} \\ &\omega_h = \frac{1}{\sum \tau_{oi}} = \frac{1}{1.98 \times 10^{-9}} = 532 \times 10^6\ \text{rad/s} \\ &f_h = \frac{\omega_h}{2\pi} = 84.7\,\text{MHz} \end{aligned} \tag{9-30}$$

可以看到，我们设计的放大器没有满足350MHz的带宽指标，PSPICE仿真（如图9-22所

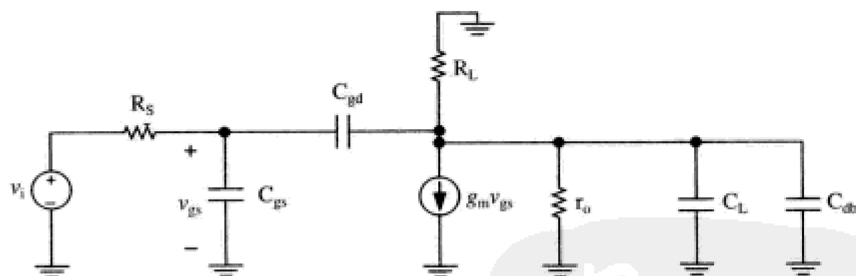
示）也证实了这一点，表明放大器带宽约为92MHz。开路时间常数求解过程证实输出负载电容是主要的带宽限制因素。为了提升放大器的带宽，我们需要使用源极跟随器将负载电容与高增益节点隔离开来。



(a) 放大器，为了简化，忽略偏置设置电路细节

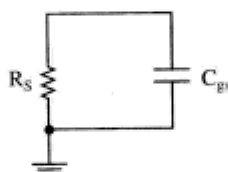


(b) 假设$g_{mb}=0$，低频小信号模型

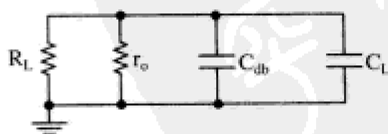


(c) 高频小信号模型

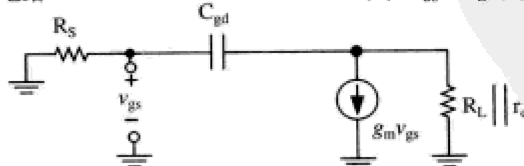
图9-20　尝试#1，MOS放大器



(a) C_{gs}的电路

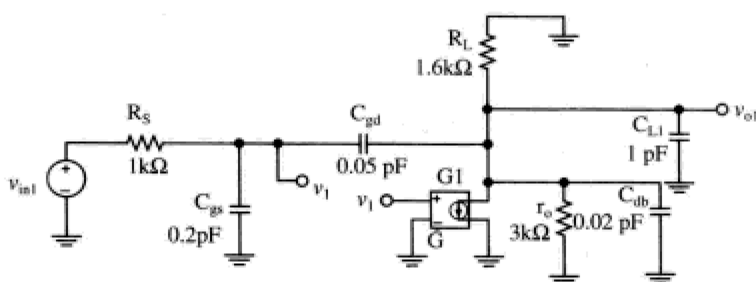


(b) $C_{db}+C_L$的电路

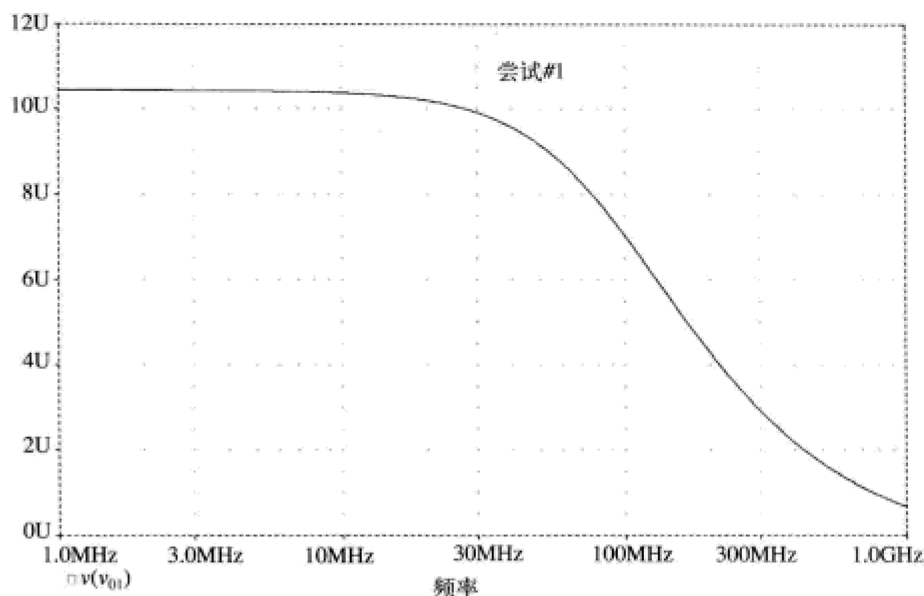


(c) C_{gd}的电路

图9-21　尝试#1，求解开路时间常数的电路



（a）仿真电路



（b）PSPICE仿真结果曲线，标明增益为−10.4，−3dB带宽约为92MHz

图9-22 PSPICE仿真，标明尝试#1的MOS放大器的增益和带宽

尝试#2：增加输出源极跟随器

在尝试#2中，我们增加了器件M_2，它是个源极跟随器缓冲电路（如图9-23所示）。我们将假设电流源I_{BIAS}将M_2的工作点偏置设置为与M_1的漏极电流相同，因此$g_{m2}=g_{m1}$。我们还假设，两个器件的其他所有MOS电容均相等。

接下来，我们使用图9-23b所示的小信号模型来进行开路时间常数分析。

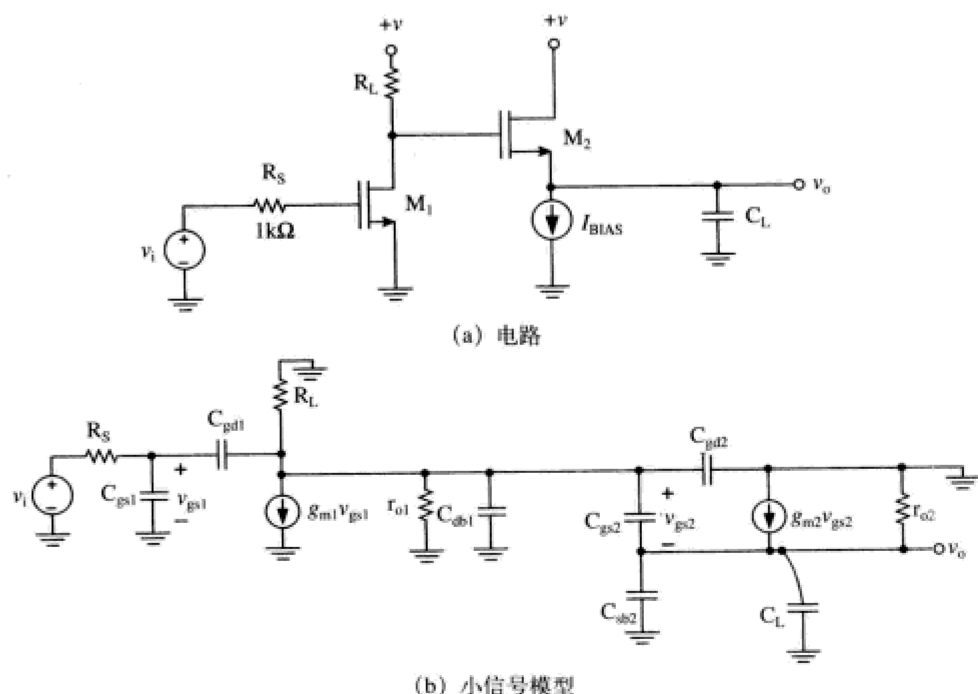
对于M_1，我们可以看到，电容C_{gs1}和C_{gd1}的开路时间常数与前一轮设计相同，保持不变①，即

$$\tau_{o1}=0.2\ \text{ns}$$
$$\tau_{o2}=0.62\ \text{ns} \tag{9-31}$$

在前一轮迭代设计中，高增益节点的负载电容为C_L+C_{db}。在该轮迭代设计中，我们在高增益节点将C_{db1}与C_{gd2}并联在一起，如图9-24a所示。这些电容的开路时间常数为

$$R_{o3}=R_L \parallel r_{o1}=1043\ \Omega$$
$$\tau_{o3}=R_{o3}(C_{db1}+C_{gd2})=(1043)(0.07\ \text{pF})=0.07\ \text{ns} \tag{9-32}$$

① 这一轮迭代设计中，我们对τ_o重新编号。



(a) 电路

(b) 小信号模型

图9-23　为共源极放大器M_1增加源极跟随器M_2

对于M_2的栅极－源极电容，我们使用图9-24b所示的电路，这里我们在电容C_{gs2}的两端增加了测试电压源。通过检查发现①，我们求得测试电流$i_t = g_{m2}v_t$，因此C_{gs2}的开路时间常数为

$$R_{o4} = \frac{1}{g_{m2}} = 100\Omega$$
$$\tau_{o4} = R_{o4}C_{gs2} = (100)(0.2\,\text{pF}) = 0.02\,\text{ns} \tag{9-33}$$

对于电容$C_L + C_{sb2}$，它们在M_2的源极端组合在一起，我们使用图9-24c的测试电路，图中在源极跟随器的输出端增加了测试电压源。通过检查发现②，我们得到测试电流为$i_t = g_{m2}v_t$，因此电容$C_L + C_{sb2}$的开路时间常数为

$$R_{o5} = \frac{1}{g_{m2}} = 100\Omega$$
$$\tau_{o5} = R_{o5}(C_L + C_{sb2}) = (100)(1.02\ \ \text{pF}) = 0.1\ \ \text{ns} \tag{9-34}$$

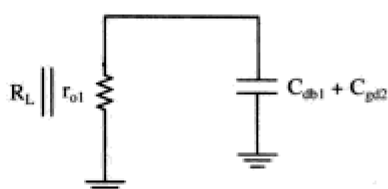
尝试#2的开路时间常数总结在表9-2中。我们看到还是没有达到带宽指标的要求，因为我们的开路时间常数估计仅为157.6MHz。PSPICE仿真（如图9-25所示）证实了这一点。估计带宽近似为185MHz。

表9-2　尝试#2的开路时间常数总结表

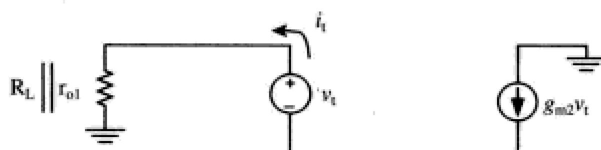
τ_{o1} (C_{gs1})	0.20 ns	τ_{o5} (C_L+C_{sb2})	0.10 ns
τ_{o2} (C_{gd1})	0.62 ns	开路时间常数之和	1.01 ns
τ_{o3} (C_{db1}+C_{gd2})	0.07 ns	ω_h总和	990 Mrad/s
τ_{o4} (C_{gs2})	0.02 ns	f_h总和	157.6 MHz

① 我们忽略了r_{o2}，在这种情况下是没有问题的。

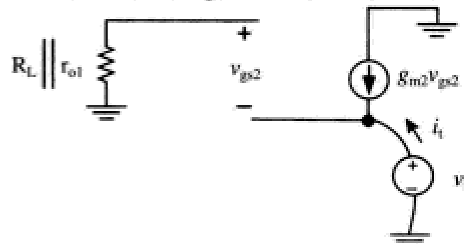
② 这里又一次忽略了r_{o2}。



(a) 求解电容$C_{db1}+C_{gd2}$的开路时间常数的电路

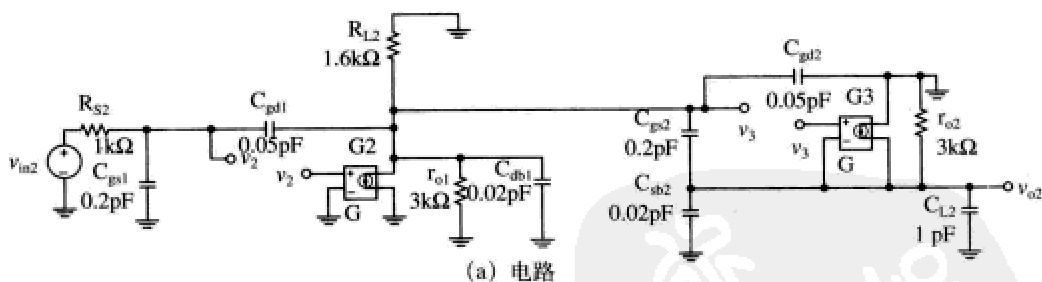


(b) 求解电容C_{gs2}的开路时间常数电路

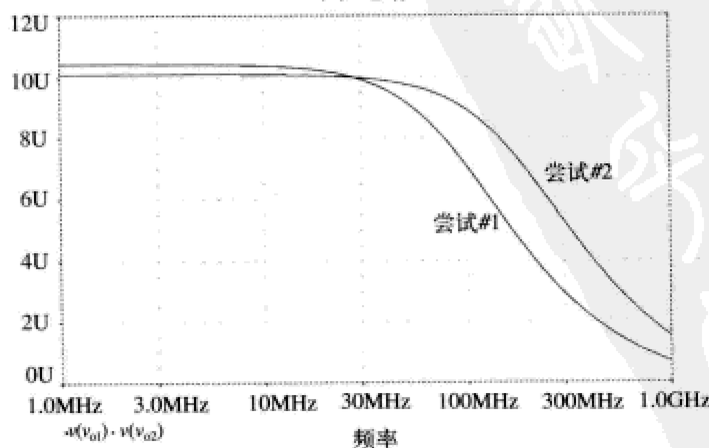


(c) 求解电容C_L+C_{sb2}的开路时间常数的电路

图9-24 尝试#2的开路时间常数电路



(a) 电路



(b) PSPICE仿真，标明尝试#1和#2的比较。尝试#2的带宽较高（约为185MHz），增益轻微降低（−10.1）

图9-25 PSPICE仿真结果，标明尝试#1和#2的MOS放大器的增益与带宽

尝试#3：增加共源共栅晶体管

在上一轮开路时间常数计算中，我们发现主控时间常数是由器件M_1的米勒效应造成的。我们将增加共栅极（共源共栅晶体管）晶体管M_3，以降低米勒效应，得到如图9-26a所示电路。

低频小信号模型如图9-26b所示。从该模型可以看到，这种放大器电路的增益几乎就是

$$\frac{v_o}{v_i} \approx -g_{m1}R_L \tag{9-35}$$

这里假设r_{o3}在高增益节点形成的负载效应最小化，共栅极晶体管M_3的增益接近单位1。注意到在M_3的漏极看到的增长输出电阻，受M_3的源极为相对大电阻负载（也就是r_{o1}）这一事实的影响，而增大，我们可以证明r_{o3}对增益的影响微乎其微。因此，输出电阻r_{o3}的负载效应最小化了。接着在这轮迭代设计中，我们可以将负载电阻降低到了1.1kΩ（从1.6kΩ减低），依旧满足了增益指标的要求。这还将帮助我们满足带宽指标的要求。

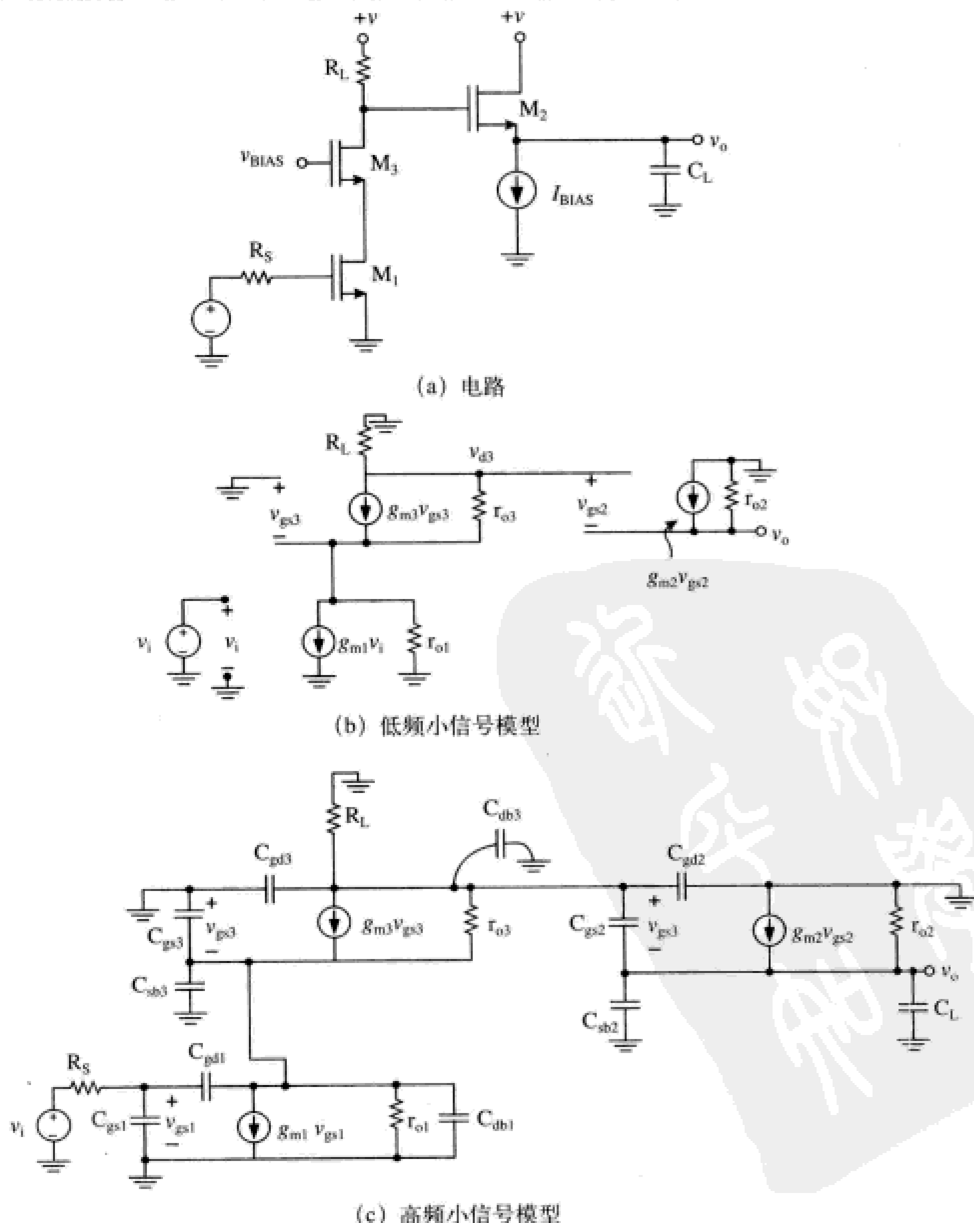


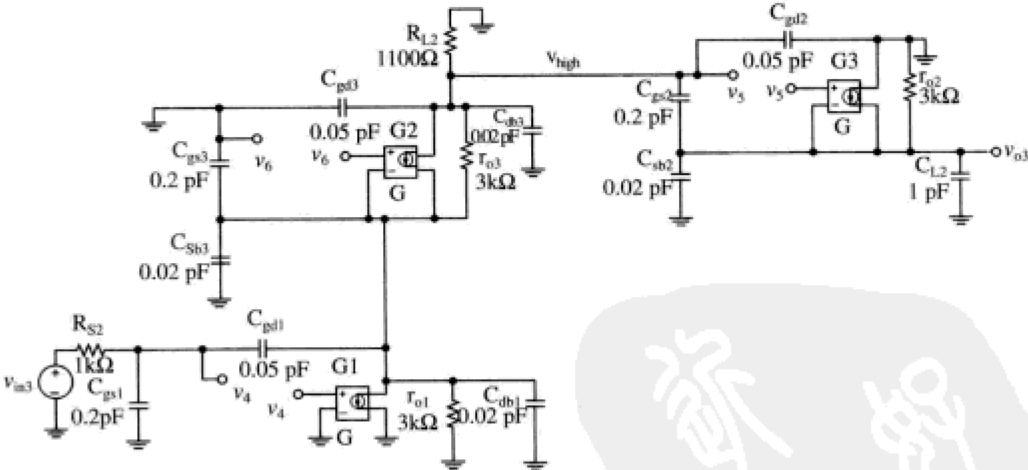
图9-26　尝试#3，增加共源共栅晶体管M_3

参考图9-26c所示的小信号电路，我们现在需要做些记录以跟踪所有的电容以及开路时间常数计算。共有13个电容贡献开路时间常数：每个晶体管有4个电容，外加负载电容。不过，我们发现，因为所有晶体管的衬底端点均与地电位连接，所以有些电容被短路掉了，并且有许多电容相互并联在一起（比如$C_{db1}+C_{gs3}+C_{sb3}$、$C_{sb2}+C_L$、$C_{gd2}+C_{gd3}+C_{db3}$）。各个电容的开路时间常数计算如表9-3所示。

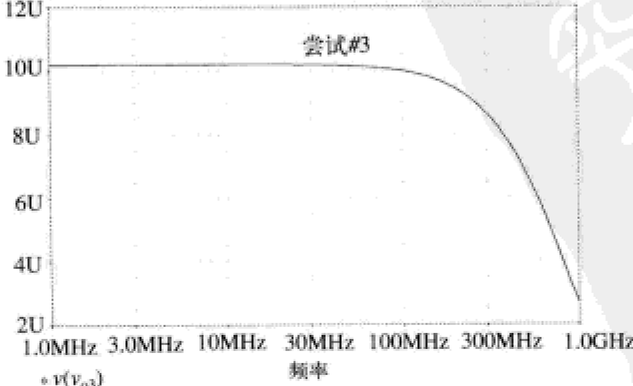
表9-3 尝试#3的OCTC计算总结表

电 容	开 路 电 阻	开路时间常数计算
$C_{gs1}=0.2\text{ pF}$	与前轮迭代相同，保持不变，1kΩ	τ_{o1}在0.2 ns时保持不变
$C_{gd1}=0.05\text{ pF}$	受晶体管M_3源极低输出电阻$r_{out3}=100\Omega$的影响，开路电阻大为减小	$\tau_{o2}=(2100)(0.05\text{ pF})=0.105\text{ ns}$
$C_{db1}+C_{sb3}+C_{gs3}=0.24\text{pF}$	开路电阻$=r_{out3}\approx 1/g_{m3}=100\Omega$	$\tau_{o3}=(100)(0.24\text{ pF})=0.024\text{ ns}$
$C_{gs2}=0.2\text{ pF}$	$1/g_{m2}=100\Omega$时开路电阻保持不变	$\tau_{o4}=(100)(0.2\text{pF})=0.02\text{ ns}$
$C_{gd2}+C_{db3}+C_{gd3}=0.12\text{pF}$	从该公共节点到地电位的电阻$\approx R_L=1100\Omega$	$\tau_{o5}=(1100)(0.12\text{ pF})=0.132\text{ ns}$
$C_{sb2}+C_L=1.02\text{ pF}$	开路电阻$=1/g_{m2}=100\Omega$	$\tau_{o5}=(100)(1.02\text{ pF})=0.10\text{ ns}$

开路时间常数之和现在为0.58ns，形成的带宽估计为1721Mrad/s，即274MHz。因为我们知道开路时间常数方法在估计电路带宽时总是保守的，所以该电路看起来应是最终设计仿真的一个很好选择。详细的PSPICE仿真表明，电路带宽为460MHz（如图9-27所示），因此该设计满足了我们的350MHz带宽指标要求。



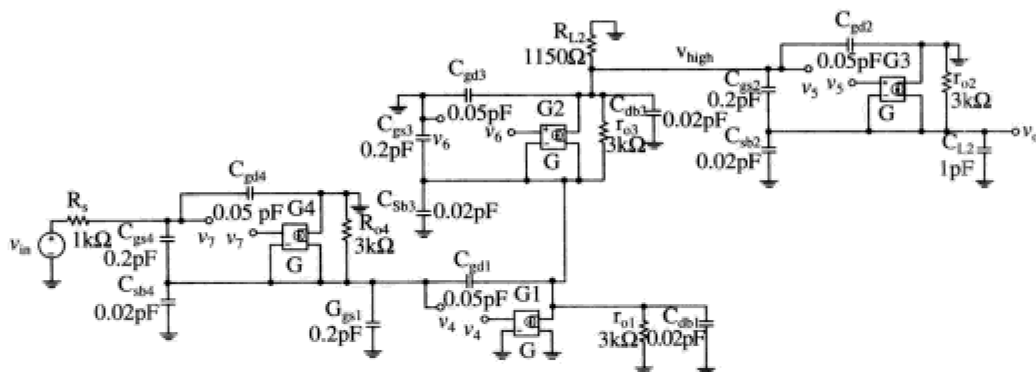
（a）电路，输入共源极放大器（M_1）、共源共栅晶体管（M_3）以及输出源极跟随器（M_2）



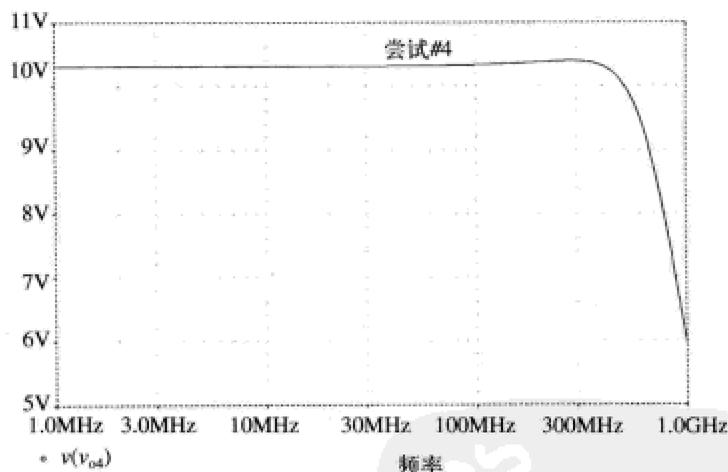
（b）PSPICE仿真曲线，表明低频增益为−10.2，−3dB带宽为460MHz

图9-27 PSPICE仿真结果，标明尝试#3 MOS放大器的增益和带宽

如果需要进一步增强电路带宽，我们可以添加输入源极跟随器将源电阻与晶体管M_1的输入电容隔离开来，如图9-28a所示。该电路措施大大减小了尝试#3的最大开路时间常数，即电容C_{gs1}的开路时间常数。增加源极跟随器将电路带宽提升至800MHz，不过导致电路出现了些许增益尖峰，如图9-28b所示。



(a) 电路，负载电阻稍微增大至1150Ω，以满足增益指标的要求



(b) PSPICE仿真曲线，表明其低频增益为−10.3，−3dB带宽为855MHz

图9-28　PSPICE仿真结果，标明尝试#4 MOS放大器的增益和带宽，尝试#4增加了输入源极跟随器，将M_1的输入电容与1kΩ源电阻隔离开来

9.7　本章习题

习题9.1

MOS电流镜电路如图9-29所示。假设每个晶体管的参数为：$g_m=0.01\text{A/V}$，$C_{gs}=1\text{pF}$，$C_{gd}=0.5\text{pF}$，晶体管的所有其他寄生参数可以忽略不计。

(a) 绘制该电路的小信号增长模型。

(b) 使用开路时间常数方法估计该电路的带宽。

习题9.2

共源极MOS放大器电路如图9-30所示。假设晶体管的参数为$g_m=0.01\text{A/V}$，$C_{gs}=1\text{pF}$，$C_{gd}=0.5\text{pF}$，晶体管增长输出电阻$r_o=5\text{k}\Omega$。

（a）绘制该电路的小信号增长模型。
（b）求解电路低频增益。
（c）使用开路时间常数方法估计该电路的带宽。

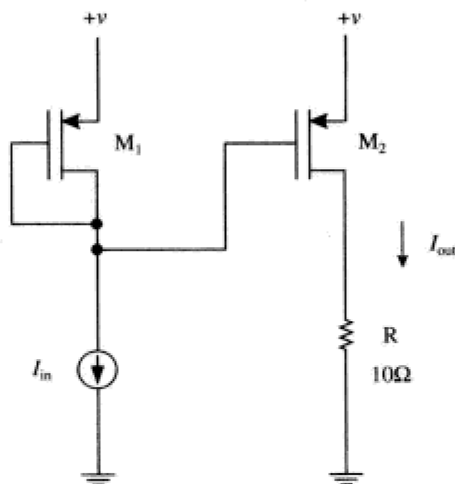


图9-29 习题9.1的MOS电流镜电路

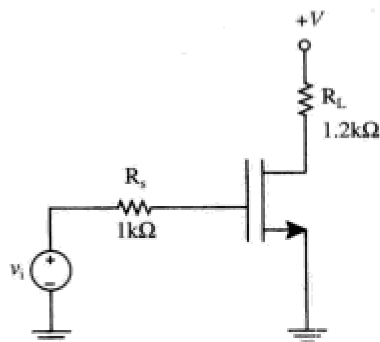


图9-30 习题9.2的共源极MOS放大器电路，忽略偏置设置电路细节

习题9.3

以本章的CMOS放大器设计实例为基础，使用图9-28所示的四晶体管MOS放大器，假设还可以对电路进行修改以进一步提高其带宽。使用开路时间常数方法以及PSPICE仿真技术来验证你的电路设计修改。

9.8 参考文献

Arns, R. G., "The other transistor: early history of the metal-oxide semiconductor field-effect transistor," *Engineering Science and Education Journal*, vol. 7, no. 5, October 1998, pp.233－240.

Comer, David J., and Comer, Donald T., "Teaching MOS Integrated Circuit Amplifier Design to Undergraduates," *IEEE Transactions on Education*, vol. 44, no. 3, August 2001, pp.232－238.

Gray, P. R., and Meyer, R. G., "MOS operational amplifier design-a tutorial overview," *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. 17, no. 6, December 1982, pp. 969－982.

Grebene, Alan B., *Bipolar and MOS Analog Integrated Circuits*, John Wiley, 1984.

Hastings, Alan, *The Art of Analog Layout*, Prentice Hall, 2001.

Hodges, D. A., Gray, P. R., and Brodersen, R. W., "Potential of MOS technologies for analog integrated circuits," *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. 13, no. 3, June 1978, pp.285－294.

Jiang, Ruoxin, Tang, Haiming, and Mayaram, Kartikeya, "A Simple and Accurate Method for Calculating the Low Frequency Common-Mode Gain in a MOS Differential Amplifier with a Current-Mirror Load," *IEEE Transactions on Education*, vol. 43, no. 3, August 2000,pp. 362－364.

Johns, David A., and Martin, Ken, *Analog Integrated Circuit Design*, John Wiley, 1997.

Lee, Thomas H., *The Design of CMOS Radio-Frequency Integrated Circuits*, Cambridge University Press, 1998.

Lilienfeld J., US Patents 1,745, 175; 1,877, 140 and 1,900,018, available from the U.S. Patent and Trademark office, *www.uspto.gov.*

Middlebrook, R. D., and Richer, I., "Limits on the Power-Law Exponent for Field-Effect Transistor Transfer Characteristics," *Solid-State Electronics*, vol. 6, September-October 1963,pp. 542－544.

Pierret, Robert F., *Modular Series on Solid State Devices*, Field Effect Devices, (volume 4), Addison-Wesley, 1983.
Singh, Jasprit, *Semiconductor Devices Basic Principles*, John Wiley, 2001.

Sze, S. M., *Semiconductor Devices Physics and Technology*, 2nd edition, John Wiley, 2002.

Winarski, T. Y., "Dielectrics in MOS devices, DRAM capacitors, and inter-metal isolation," *IEEE Electrical Insulation Magazine*, vol. 17, no. 6, November-December 2001, pp.34 – 47.



第10章　双极性晶体管开关与电荷控制模型

本章概要

- 在本章，我们将详细测试双极性晶体管的大信号开关效应。本章还将介绍一个用于计算开关速度的模型，该模型称为电荷控制模型。

10.1　概述

在前面的章节中，我们使用混合π电路模型从小信号观点出发讨论晶体管的动态行为。换句话说，到目前为止推导分析的小信号模型仅对直流工作点附近的电压和电流的微小变化有效。我们使用了开路时间常数方法来分析线性放大器的带宽限制。

更深入的电路建模技术，称为*电荷控制模型*（charge control model），使得我们可以分析在大信号开关期间或者晶体管饱和期间晶体管电路的行为特性。与开路时间常数方法相似，电荷控制模型给出的估计结果在数值上不必要非常精确；使用该模型的更恰当方式是进行设计洞察与预测，这种洞察设计方式是我们从相对简单的电路模型的应用中推导出来的。

10.2　开关模型的推导过程

在下面的推导中，我们考虑NPN型晶体管的电荷控制模型。该结果与PNP型晶体管的推导完全相同。NPN型晶体管的端点电流定义如图10-1所示。

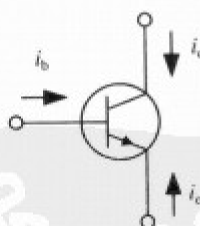


图10-1　NPN型晶体管的端点定义，标明基极电流i_b，集电极电流i_c和发射极电流i_e

从电子器件的物理学原理来说，我们可以从前面的章节中得到这样一个事实：当晶体管被偏置设置在正向放大区时，基极－发射极PN结正向偏置，在基极区存储有额外的电荷。对于NPN型晶体管，额外的少数载流子浓度如图10-2所示。NPN型晶体管的基极由P型材料组成，额外的少数载流子为电子，x方向上的分布轮廓线$n(x)$如图中所示。在发射极区则存在相似的空穴分布轮廓线$p(x)$，但是出于分析开关工作特性的目的，我们只需要考虑基极区域。

因为晶体管的集电极电流受基极区的扩散效应控制，集电极电流i_c与额外少数载流子浓度$n'(x)$的斜率成比例，图10-2中的虚线表明，载流子浓度分布轮廓线处于更高的集电极电流位置。因为竖直轴线代表的物理量是电荷浓度，所以曲线下面的总体面积与晶体管基极区存储的电荷成比例。当晶体管工作在正常模式，直流工作点位于线性区域（即正向放大区），我们将基极区存储的电荷称为正向电荷q_F（forward charge）。

我们可以将集电极电流和基极区存储电荷的这种变化关系总结为

$$i_c = \frac{q_F}{\tau_F} \tag{10-1}$$

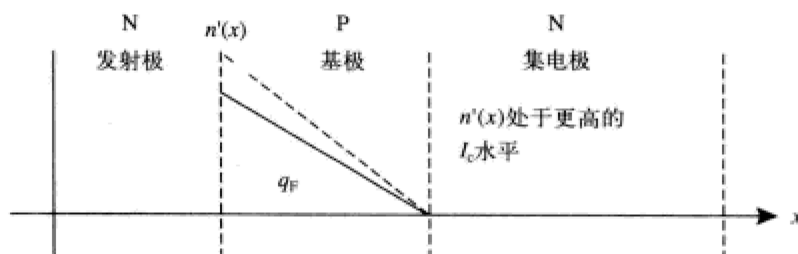


图10-2　NPN型晶体管工作在正向放大区时的额外载流子浓度分布曲线。基极区的额外电荷（$n'(x)$）导致形成向右流动的净的电子扩散电流，进而导致生成向左流动的集电极电流

这里τ_F是与器件有关的常数，其单位为时间。公式10-1即为晶体管工作在正向放大区时，集电极电流的*电荷控制方程*（charge-control equation）。我们假设只要基极－发射极电压发生变化，基极区额外载流子的浓度n'（$x=0$）能够瞬时响应，发生相应的变化[①]。

现在，我们来考虑基极电流。因为基极区存储有电荷，所有我们期望基极电流的电荷控制方程存在一个与基极区的正向电荷增加或者减少速度相关的变化项。此外，我们知道基极电流还存在一个直流项（因为集电极电流和基极电流的直流偏置水平按照大信号参数β_F的数值关系相关）。基于该推理，可以得到基极电流的电荷控制方程为

$$i_b = \frac{q_F}{\tau_{BF}} + \frac{dq_F}{dt} \tag{10-2}$$

公式10-2中，q_F/τ_{BF}项为基极直流电流，如果我们要改变基极区存储的电荷数量，则dq_F/dt项为需要的电荷。特征时间τ_{BF}与τ_F相关，后面将会解释两者之间的确切关系。

我们还得到，发射极电流为集电极电流与基极电流之和的负数，即

$$i_e = -(i_c + i_b) \tag{10-3}$$

综上所述，晶体管工作在正向放大区的电荷控制方程为

$$\begin{aligned} i_b &= \frac{q_F}{\tau_{BF}} + \frac{dq_F}{dt} \\ i_c &= \frac{q_F}{\tau_F} \\ i_e &= -(i_c + i_b) \end{aligned} \tag{10-4}$$

可以看到，这些方程与基极－射极结（基极－发射极PN结）的结电容以及集电极－基级结（基极－集电极PN结）的结电容没有任何关系。稍后我们再来分析这一点。

10.3　反向放大区

晶体管工作在正向放大区时，基极－发射极的PN结正向偏置，集电极－基极的PN结反向偏置。正如前面一样，我们也可以设置晶体管的直流工作点，使其集电极－基极的PN结正向偏置，基极－发射极的PN结反向偏置。这种晶体管工作模式称为*反向放大区*（reverse-active region），其分析方法与正向放大区完全相似，只是将集电极和发射极的作用进行颠倒（即集电极发射电子，发射极收集电子）[②]。载流子分布轮廓曲线如图10-3所示，反向放大区的电荷控制方程为

---

① 只要我们规定不允许晶体管的基极－发射极电压v_{be}变化太快，那么该假设就是近似正确的。

② 在反向放大区，基极区存储的电荷为q_R。

$$
\begin{aligned}
i_{\mathrm{b}} &= \frac{q_{\mathrm{R}}}{\tau_{\mathrm{BR}}} + \frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} \\
i_{\mathrm{e}} &= \frac{q_{\mathrm{R}}}{\tau_{\mathrm{R}}} \\
i_{\mathrm{c}} &= -(i_{\mathrm{e}} + i_{\mathrm{b}})
\end{aligned}
\tag{10-5}
$$

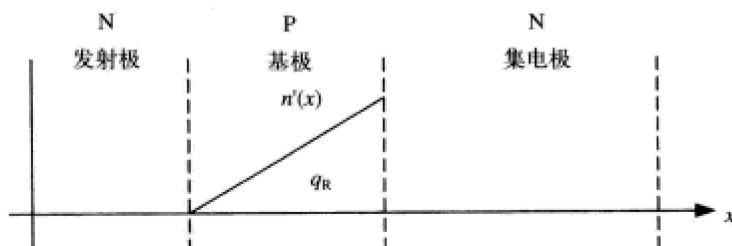


图10-3　NPN型晶体管工作在反向放大区时的额外载流子浓度分布轮廓曲线。可以看到，在反向放大区，集电极－基极PN结正向偏置，基极－发射极PN结反向偏置

晶体管通常优化设计为工作在正向放大区，当工作在反向放大区时，正如预计的那样，晶体管的速度、β_{F}等参数将被降级（与工作在正向放大区时的取值相比，大大减小）。

10.4　饱和

晶体管饱和是基极－发射极PN结以及基极－集电极PN结均为正向偏置工作的情况。我们可以认为该工作模式为正向放大与反向放大工作的混合，如图10-4所示。

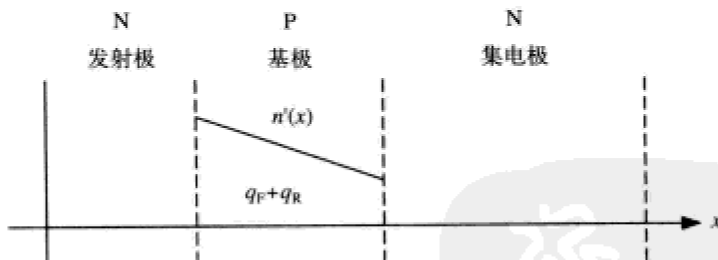


图10-4　NPN型晶体管工作在饱和区时的额外载流子浓度分布轮廓曲线。在饱和区，两个PN结均正向偏置

将前面的正向放大工作与反向放大工作的结果相加，就得到晶体管饱和工作时的电荷控制方程，即

$$
\begin{aligned}
i_{\mathrm{b}} &= \frac{q_{\mathrm{F}}}{\tau_{\mathrm{BF}}} + \frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{F}}}{\mathrm{d}t} + \frac{q_{\mathrm{R}}}{\tau_{\mathrm{BR}}} + \frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} \\
i_{\mathrm{c}} &= \frac{q_{\mathrm{F}}}{\tau_{\mathrm{F}}} - \frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} - q_{\mathrm{R}}\left[\frac{1}{\tau_{\mathrm{R}}} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{BR}}}\right] \\
i_{\mathrm{e}} &= -(i_{\mathrm{c}} + i_{\mathrm{b}})
\end{aligned}
\tag{10-6}
$$

由于我们已经证实，晶体管的正向放大区受一个时间常数τ_{F}控制，反向放大区受另一个时间常数τ_{R}控制，因此可以推导出饱和区将有两个时间常数，但是不一定是τ_{F}和τ_{R}。事实上，我们将会说明，饱和区动态特性的时间常数为两个独立时间常数的某个加权函数。

通过解答均匀时的情况（进行拉普拉斯替换，将d/dt替换为s），我们可以得到晶体管内电荷生

长的自然频率

$$
\begin{aligned}
0 &= q_{\mathrm{F}}\left(s+\frac{1}{\tau_{\mathrm{BF}}}\right)+q_{\mathrm{R}}\left(s+\frac{1}{\tau_{\mathrm{BR}}}\right) \\
0 &= \frac{q_{\mathrm{F}}}{\tau_{\mathrm{R}}} \qquad -q_{\mathrm{R}}\left(s+\frac{1}{\tau_{\mathrm{R}}}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{BR}}}\right)
\end{aligned} \tag{10-7}
$$

我们可以解答这些联立方程，得

$$
s^2+\left(\frac{1}{\tau_{\mathrm{F}}}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{BF}}}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{R}}}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{BR}}}\right)s+\left(\frac{1}{\tau_{\mathrm{F}}\tau_{\mathrm{BR}}}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{R}}\tau_{\mathrm{BF}}}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{BR}}\tau_{\mathrm{BF}}}\right)=0 \tag{10-8}
$$

或者简化为①

$$
s^2+\left(\frac{\beta_{\mathrm{F}}+1}{\tau_{\mathrm{BF}}}+\frac{\beta_{\mathrm{R}}+1}{\tau_{\mathrm{BR}}}\right)s+\left(\frac{1}{\tau_{\mathrm{F}}\tau_{\mathrm{BR}}}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{R}}\tau_{\mathrm{BF}}}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{BR}}\tau_{\mathrm{BF}}}\right)=0 \tag{10-9}
$$

通常，存在两个相隔很远的极点②，使“快”极点与晶体管的ω_{T}参数相匹配，即

$$
s_{\text{fast}} \approx \frac{\beta_{\mathrm{F}}+1}{\tau_{\mathrm{BF}}}+\frac{\beta_{\mathrm{R}}+1}{\tau_{\mathrm{BR}}} \approx \frac{1}{\tau_{\mathrm{F}}}+\frac{1}{\tau_{\mathrm{R}}}=\omega_{\mathrm{T}} \tag{10-10}
$$

低频极点为

$$
s_{\text{slow}} \approx \frac{\beta_{\mathrm{F}}+\beta_{\mathrm{R}}+1}{\tau_{\mathrm{BF}}(\beta_{\mathrm{R}}+1)+\tau_{\mathrm{BR}}(\beta_{\mathrm{F}}+1)} \tag{10-11}
$$

快时间常数，有时称为“晃荡（slosh）”模式，符合电荷在q_{F}和q_{R}之间重新分布的时间尺度。慢时间常数，或者说是“填充（fill）”模式，与q_{F}和q_{R}的上升速度相一致。这与弹簧振子系统振动时的奇偶模式相似。晃荡模式以极快的时间常数消亡，因此饱和区的电荷生长受慢时间常数控制，即

$$
\tau_{\mathrm{s}} \approx \frac{\tau_{\mathrm{BF}}(\beta_{\mathrm{R}}+1)+\tau_{\mathrm{BR}}(\beta_{\mathrm{F}}+1)}{\beta_{\mathrm{F}}+\beta_{\mathrm{R}}+1} \tag{10-12}
$$

因此，我们可以将饱和区的电荷控制方程近似为

$$
i_{\mathrm{b}}-\frac{I_{\mathrm{C,SAT}}}{\beta}=\frac{q_{\mathrm{S}}}{\tau}+\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} \tag{10-13}
$$

这里τ_{s}项为饱和时间常数，$I_{\mathrm{C,SAT}}$为集电极饱和电流。q_{s}项为饱和电荷。

10.5 结电容

除了基极区存储电荷之外，还有部分电荷存储在基极－发射极PN结以及基极－集电极PN结的

① 尽管我们还没有得到该结论，但是这里我们还是使用恒等式$\tau_{\mathrm{BF}}=\beta_{\mathrm{F}}\tau_{\mathrm{F}}$，$\tau_{\mathrm{BR}}=\beta_{\mathrm{R}}\tau_{\mathrm{R}}$，这里$\beta_{\mathrm{F}}$为正向$\beta$参数，$\beta_{\mathrm{R}}$为反向$\beta$参数。稍后将会更深入讨论该恒等式。

② 记住我们的相隔很远的极点的近似定义。假设我们的二极点传递函数形式为

$$
H(s)=\frac{1}{s^2+As+B}
$$

如果极点都在实轴上，并且相隔很远，我们可以将两个极点的位置近似为

$$
\begin{aligned}
s_{\text{fast}} &\approx -A \\
s_{\text{slow}} &\approx -B/A
\end{aligned}
$$

我们为传递函数尝试该方法

$$
H(s)=\frac{1}{s^2+11s+10}=\frac{1}{(s+1)(s+10)}
$$

该传递函数存在一个快极点−10rad/s，以及一个慢极点−1rad/s。如果我们使用极点相隔很远的近似方法，则得到$s_{\text{fast}}=-11$，$s_{\text{slow}}\approx-10/11$。

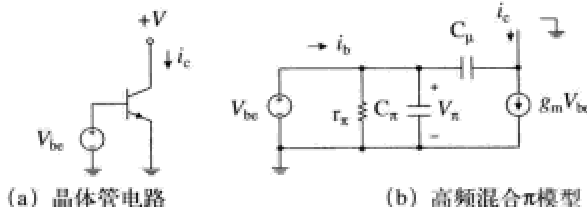
非线性结电容中。我们将这些存储电荷标注为q_{ve}和q_{vc}项，这与基极电容C_{je}以及反馈电容C_{jc}的大信号版本相符合。我们需要在前面的电荷控制方程中添加的额外项为

$$\begin{aligned} i_{b,SCL} &= \frac{d}{dt}(q_{ve}+q_{vc}) \\ i_{c,SCL} &= -\frac{d}{dt}q_{vc} \end{aligned} \tag{10-14}$$

式（10-14）中，符号“SCL”代表这样一个事实：基极电流和集电极电流中的这些电流成分对空间电荷层进行充电或者放电，空间电荷层（space charge layer）又叫做耗尽电容。稍后，我们将会看到如何从晶体管数据手册中查找这些电容。

10.6 电荷控制参数与混合π参数的关系

接下来，我们来揭示晶体管电荷控制参数与混合π参数之间的重要关系。图10-5a电路将帮助我们来推导这一关系。该电路的小信号混合π模型如图10-5b所示。



（a）晶体管电路　（b）高频混合π模型

图10-5　求解电荷控制参数与混合π参数之间关系的电路

如果我们使该晶体管工作在非常高的频率范围内，利用混合π模型可以得到晶体管的基极电流为

$$i_b\big|_{\omega\to\infty} \approx \left(C_\pi + C_\mu\right)\frac{dv_{be}}{dt} \tag{10-15}$$

对于非常高的频率段，电荷控制模型预测i_b为（忽略空间电荷电容）

$$i_b \approx \frac{dq_F}{dt} \approx \frac{d}{dt}(i_c\tau_F) \approx g_m\tau_F\frac{d}{dt}(v_{be}) \tag{10-16}$$

我们得到如下的关系式

$$\tau_F \approx \frac{(C_\pi + C_\mu)}{g} \approx \frac{1}{\omega} \tag{10-17}$$

下面，通过观察电荷控制模型在极低频率范围内的特性，我们得到

$$\begin{aligned} i_b\big|_{DC} &= \frac{q_F}{\tau_{BF}} \\ i_c &= \frac{q_F}{\tau_F} \\ \frac{i_c}{i_b\big|_{DC}} &= \frac{\tau_{BF}}{\tau_F} \rightarrow \tau_{BF} = \beta_F\tau_F \end{aligned} \tag{10-18}$$

经过上述推导，现在我们得到了电荷控制参数τ_F、τ_{BF}与混合π参数β_F和ω_T之间的关系。

10.7 从数据手册中获取结电容值

我们如何才能得到结电容的具体数值呢？好的，如果可以拿到制造商提供的数据，我们将会非常幸运。比如，对于晶体管2N3904，可以得到发射极－基极结以及集电极－基极结的反向偏置

电压超过0.1V（也就是结电压小于−0.1V）时的结电容数据，如图10-6所示。

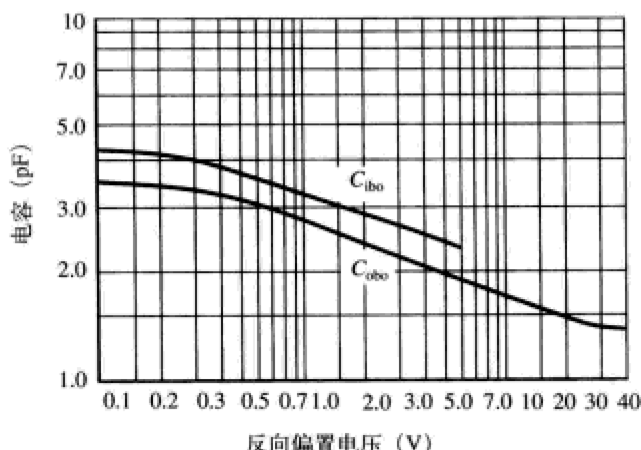


图10-6　晶体管2N3904的制造商数据手册①中结电容的数据表格

如果我们需要基极－发射极结施加正向电压时的电荷数据，那么我们该怎么做呢？通常基极－发射极电压V_{BE}低于0.4V左右时，NPN型晶体管关闭。数据手册不会给出V_{BE}电压正向偏置时的电容数据。幸运的是，某些物理学原理可以帮助我们得到这些电容数据。PN结的结电容由式10-19给出

$$C_j = \frac{C_{jo}}{\left[1 - \frac{V_j}{V_{BI}}\right]^m} \tag{10-19}$$

C_{jo}为结电压$V_j = 0V$时的结电容数据，V_{BI}为固定电压，这是PN结的特征，其大小为

$$V_{BI} = \frac{kT}{q}\ln\left[\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right] \tag{10-20}$$

这里N_A和N_D为PN结P侧和N侧的掺杂水平，n_i为本征少数载流子浓度。正常掺杂水平下，V_{BI}的典型值为0.8V。因子m与PN结的类型有关，突变结的因子m为0.5，线性渐变结的因子m为0.333。

图10-7给出了晶体管2N3904的发射极－基极结电容的曲线拟合，其中$C_{jo} = 4.5pF$，$V_{BI} = 0.8V$，$m = 0.333$。可以看到，当结电压接近固定电压时，结电容急剧增大。使用电荷控制模型粗略估计晶体管的开关时间时，这个拟合曲线足够用了。

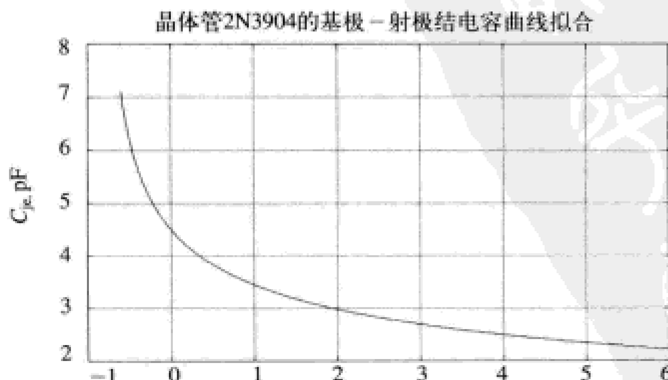


图10-7　晶体管2N3904的发射极－基极结电容的曲线拟合，其中$C_{jo} = 4.5pF$，$V_{BI} = 0.8V$，$m = 0.333$

① 引自On Semiconductor公司的官方网站http://www.onsemi.com，On Semiconductor公司授权使用。

10.8 制造商测试

制造商有时（并不总是如此）会将晶体管的开关时间测试结果放在他们的数据手册中，如图10-8所示的NPN型晶体管2N3904的测试电路与测试结果[1]。我们可以从这些测试结果估计各种电荷控制参数。

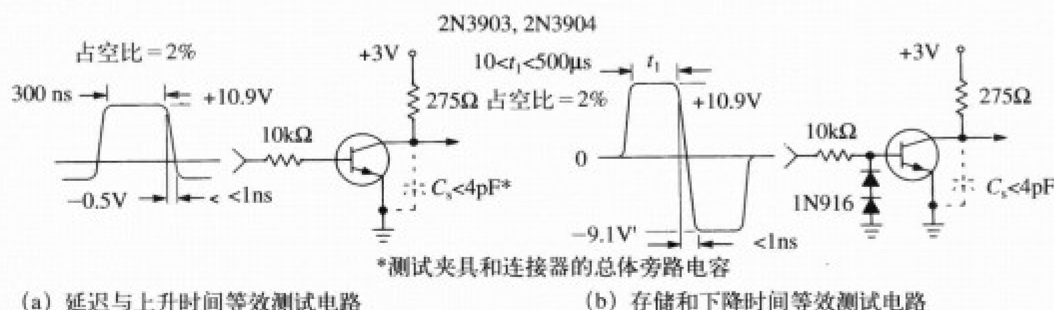


图10-8 晶体管2N3904的制造商测试电路

参看图10-9，列出的延迟时间（$t_d=35$ns）为晶体管导通前的延迟。上升时间（t_r）为集电极电流的10%～90%上升时间。存储时间[2]（t_s）为逃离饱和区之前移除饱和电荷占用的时间。下降时间t_f为集电极电流从满刻度值的90%下降到10%占用的时间。

开关电容

延迟时间	($V_{CC}=3.0$Vdc, $V_{BE}=0.5$Vdc,		t_d	—	35	ns
上升时间	$I_C=10$mAdc, $I_{B1}=1.0$mAdc)		t_r	—	35	ns
存储时间	($V_{CC}=3.0$Vdc, $I_C=10$mAdc,	2N3903	t_s	—	175	ns
	$I_{B1}=I_{B2}=1.0$ mAdc)	2N3904		—	200	
下降时间			t_f	—	50	ns

图10-9 从晶体管2N3904的数据手册中找到的制造商测量的开关时间结果

10.9 电荷控制模型实例

下面，我们通过几个电路实例来理解如何使用电荷控制模型。

例题10.1：基极电流驱动晶体管反相器

在该例题中，晶体管的基极电流受电流源驱动控制，如图10-10所示。我们来分析晶体管的动态特性。假设晶体管的电荷控制参数为$\tau_F=0.3$ns，$\beta_F=416$，$\tau_R=240$ns，$\beta_R=0.7$。我们将忽略空间电荷电容。我们将在这些条件下求解该晶体管的开关轮廓曲线。假设电流脉冲在$t=0$时刻过渡到峰值电流。更后面，在所有的瞬时现象都消失之后，电流脉冲又过渡回零电流。

跨越正向放大区

忽略空间电荷电容，当跨越过正向放大区时，我们来求解基极电荷$q_F(t)$和集电极电流$i_c(t)$。由于我们忽略了空间电荷电容，因此必要的电荷控制方程相对简单。首先，当我们首次施加阶跃函数基极电流时，我们知道晶体管将进入正向放大区。在该例题中不存在导通延迟，这是因为我们

① 引自On Semiconductor公司的官方网站http://www.onsemi.com，On Semiconductor公司授权使用。

② 注意，该存储延迟时间t_s与饱和区时间常数τ_s是不同的。我们可以使用制造商提供的存储延迟时间t_s来估计饱和区时间常数τ_s。

已经假定结电容可以忽略不计。持续一段时间之后，晶体管将达到饱和，因为

$$\beta\ I\ R\ > V \tag{10-21}$$

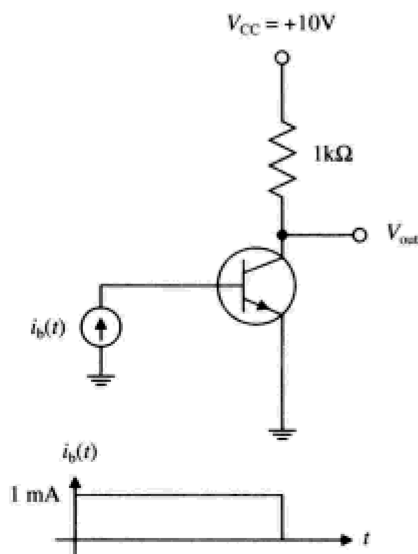


图10-10　基极电流驱动的晶体管电路

当晶体管工作在正向放大区，电荷控制方程为

$$\begin{aligned} i_b &= \frac{q_F}{\tau_{BF}} + \frac{dq_F}{dt} \\ i_c &\approx \frac{q_F}{\tau_F} \end{aligned} \tag{10-22}$$

因为我们使用阶跃电流源来驱动基极，那么基极电流的微分方程为

$$\frac{dq_F}{dt} + \frac{q_F}{\tau_{BF}} = I_B u_{-1}(t) \tag{10-23}$$

这里，$\tau_{BF}=\beta_F\tau_F=125\text{ns}$，$u_{-1}(t)$为单位阶跃函数。该电荷控制方程的解为

$$\begin{aligned} q_F(t) &= I_B\tau_{BF}\left(1-e^{\frac{-t}{\tau_{BF}}}\right) \\ i_c(t) &\approx \frac{q_F(t)}{\tau_F} \approx \beta_F I_B\left(1-e^{\frac{-t}{\tau_{BF}}}\right) = (416\text{mA})\left(1-e^{\frac{-t}{125\text{ns}}}\right) \end{aligned} \tag{10-24}$$

如图10-11所示，集电极电流上升的特征时间常数$\tau_{BF}=125\text{ns}$，集电极电流的最终值近似为10mA（在该电流点晶体管饱和）。集电极电流在$t_{fl}\approx 3\text{ns}$时达到最终值，该时刻的正向电荷$q_F=i_c\tau_F=3\text{pC}$。当然，跨越正向放大区的真实时间将会稍高一些，这是由于向基极－发射极和基极－集电极的结电容充电需要基极电流支持造成的。

进入饱和区

因为$\beta_F I_B > I_{C(sat)}$，晶体管并不会始终保持在正向放大区。我们来解答晶体管在哪个工作点发生饱和。然后我们将求解饱和电荷q_s的最终值①，估计时间常数τ_s。饱和区基极电流和集电极电流的

① 我们假设基极电流驱动源保持足够长的时间以使晶体管完全饱和，完全充电到最终饱和电荷数值。

电荷控制方程为①

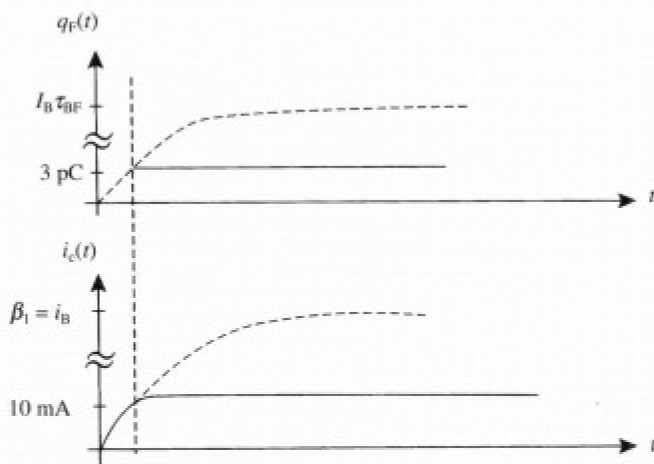


图10-11 当跨越正向放大区时，正向电荷$q_F(t)$和集电极电流$i_c(t)$的生长曲线。集电极电流的最终值为10mA，在该工作点晶体管进入饱和区，正向电荷q_F和集电极电流保持为常数

$$i_b - \frac{I_{C,SAT}}{\beta_F} = \frac{q_S}{\tau_S} + \frac{dq_S}{dt'}$$
$$i_c = I_{C,SAT} \tag{10-25}$$

饱和区时间常数为

$$\tau_S = \frac{\tau_{BF}(\beta_R+1)+\tau_{BR}(\beta_F+1)}{\beta\ +\beta\ +1} = \frac{(125\,\text{ns})(0.7+1)+(168\,\text{ns})(416+1)}{416+0.7+1} = 168\,\text{ns} \tag{10-26}$$

饱和电荷的最终值q_{sfinal}为

$$q_{sfinal} = \left(I_B - \frac{I_{C,SAT}}{\beta_F}\right)\tau_S = \left((1\text{mA}) - \frac{(10\,\text{mA})}{416}\right)(168\,\text{ns}) = 163\,\text{pC} \tag{10-27}$$

如图10-12所示，这个饱和电荷（163pC）是晶体管离开饱和区之前需要从基极移除的电荷数量，这时我们将试着关闭晶体管。

退出饱和区

现在，等待一长段时间之后，基极驱动电流源关闭，也就是说$i_B(t)=0$。我们来计算晶体管保持饱和$i_C=I_{C(sat)}$的时间有多长。因为晶体管饱和，但是基极驱动电流的值为零，电荷控制方程现在变为②

$$-\frac{I_{C,SAT}}{\beta_F} = \frac{q_S}{\tau_S} + \frac{dq_S}{dt''} \tag{10-28}$$

可以看到，基极电流复合导致饱和电荷减少。需要使用$q_s(t'')$的初始值163pC来求解该方程。我们需要解答该方程，以得到$q_s(t'')$花费了多长时间降低至零③。该方程的一个解为

① 可以看到，我们已经改变了时间尺度，现在我们假设在$t'=0$时刻进入饱和区。在整个求解过程中，我们将随时改变时间尺度。

② 我们又一次改变了时间尺度。

③ 如果使电荷控制方程一直工作下去，方程说明q_s的最终值将为−4nC。不过，我们知道当饱和电荷下降至零时晶体管就退出了饱和区。我们将求解q_s下降到零的时间。

$$q_s(t'') = 163\,\text{pC} - (167\,\text{pC})\left(1 - e^{\frac{-t''}{\tau_S}}\right) \tag{10-29}$$

该方程表明，$q_s(t'')$在$t'' = 627$ns时降低至零，这就是晶体管退出饱和区的时刻。因此，得到饱和延迟时间为$t_s = 627$ns（如图10-13所示）。

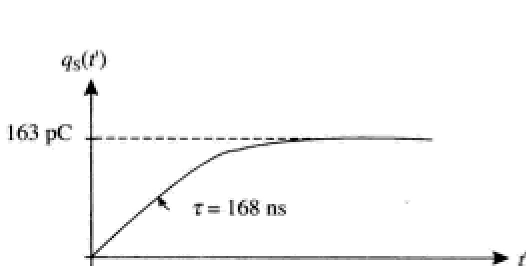


图10-12　进入饱和区时，饱和电荷$q_s(t')$的增长曲线。在该时间间隔内，集电极电流保持在10mA不变

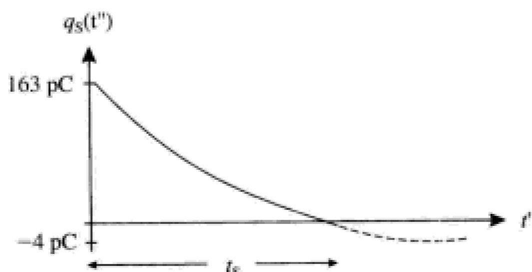


图10-13　退出饱和区时，饱和电荷$q_s(t'')$的放电时间曲线。在该段时间间隔内，集电极电流保持在10mA不变

关闭时，又一次跨越正向放大区

当q_s为零时，晶体管又进入了正向放大区。接下来，我们将求解$q_F(t''')$和集电极电流。我们期望集电极电流的关闭时间远比导通时间慢，这是因为我们没有主动从基极拉出任何基极电流成分。我们不得不依赖基极的载流子复合作用来降低$q_F(t''')$，以及集电极电流。这种情况下的电荷控制方程为

$$\frac{dq_F}{dt'''} + \frac{q_F}{\tau_{BF}} = 0 \tag{10-30}$$

可以看到，方程10-30的右侧为零，这是因为不存在基极电流。在正向放大区的起始点，集电极电流为10mA，正向电荷$q_F = I_c\tau_F = 10\text{mA} \times 0.3\text{ns} = 3\text{pC}$。该电荷控制方程的解为

$$\begin{aligned} q_F(t''') &= q_{F0}\,e^{\frac{-t'''}{\tau_{BF}}} = (3\,\text{pC})\,e^{\frac{-t'''}{125\text{ns}}} \\ i_c(t''') &= \frac{q_F(t''')}{\tau_F} = (10\,\text{mA})\,e^{\frac{-t'''}{125\text{ns}}} \end{aligned} \tag{10-31}$$

因此，如图10-14所示，晶体管离开饱和区，集电极电流在特征时间常数125ns内衰减。图

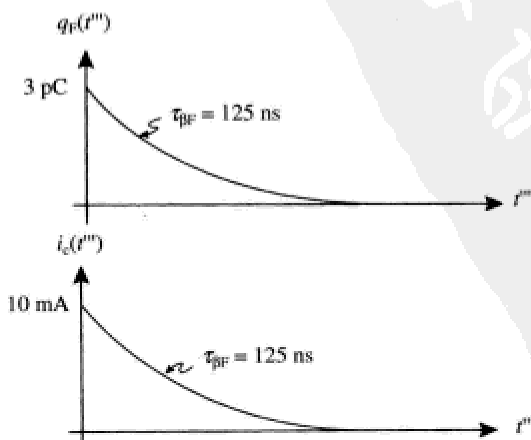


图10-14　当关闭晶体管跨入正向放大区时，正向电荷$q_F(t''')$和相应的集电极电流$i_c(t''')$的放电时间曲线。集电极电流在特征时间常数τ_{BF}内衰减到零

10-15所示的SPICE仿真曲线表明饱和关闭衰减时间近似为500ns，集电极电流缓慢衰减。该PSPICE仿真曲线与我们的计算结果非常一致。

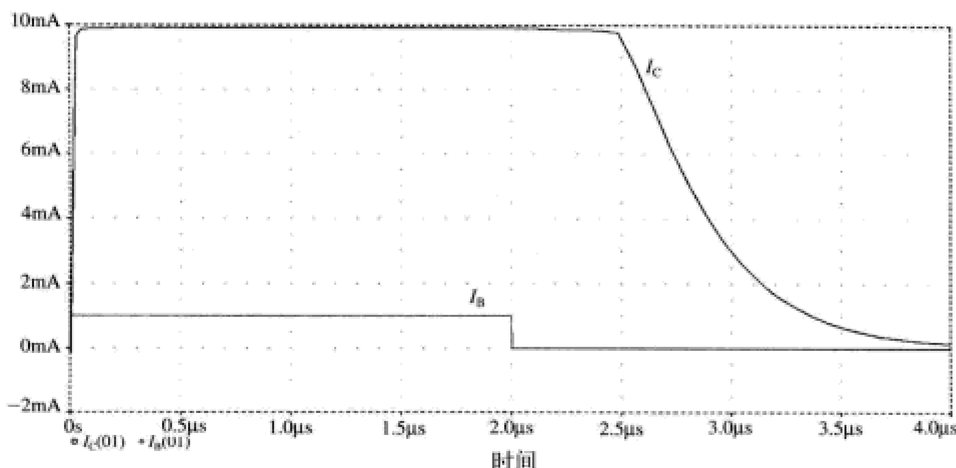


图10-15 基极电流驱动晶体管的PSPICE仿真曲线。在该仿真中，电流脉冲在$t=0$时刻导通，$t=2\mu s$时关闭

例题10.2：电压驱动的晶体管反相器

考虑图10-16a所示的晶体管反相器。假设我们使用的晶体管具有下列参数。

- $f_T=300MHz$
- $\beta_F=200$
- $\tau_R=10ns$
- $\beta_R=10$
- 对于结电容参数，使用图4-25中找到的晶体管2N3904的结电容值。

我们将使用电荷控制模型来求解该电路的近似开关轮廓曲线。

存在6个工作区。

(1) 穿越截止区（t_{d1}）。在该时间段，非线性耗尽区电容C_{je}和C_{jc}被充电至某个电荷值，在该数值点晶体管开始进入正向放大区。当晶体管开始传输集电极电流时，我们将该电压近似为$V_{BE}\approx 0.4V$。

(2) 穿越正向放大区（t_r）。在该时间段，V_{BE}从0.4V上升至0.7V左右，集电极电流上升至它的最终值。

(3) 进入硬饱和区。当$V_{CB}\approx 0$时，晶体管进入饱和区。在硬饱和区，随着基极－集电极结的正向偏置变得越来越大，额外基极电荷在基极区累积起来。

在等待一长段时间之后，以使晶体管完全饱和，我们得到关闭波形：

(4) 当饱和电荷被放电，关闭（饱和）衰减（t_{sd}）。在该时间段，集电极电流保持为近似常数。

(5) 穿越正向放大区（t_f），此处集电极电流下降回零点。

(6) 穿越截止区。随着V_{BE}达到它的最终值，空间电荷层电容被放电。在这段时间内，集电极电流近似为零。

各个工作区的计算如下。

截止区：如图10-16所示，在$t=0$时刻，我们假设输入从−2V瞬时过渡到＋10V。导通延迟时间t_{d1}为，对集电极－基极以及基极－发射极的非线性电容进行充电以使$V_{BE}=0.4V$，占用的时间。我们认为$V_{BE}=0.4V$时，晶体管开始进入正向放大区。在这段充电时间间隔内，基极电流确实稍微

变化了一点，这是因为V_{BE}发生了变化，但是为了简化，我们将使用平均基极电流来确定开关时间。端点条件如下。

开关间隔的起始点，$t=0$时刻

$V_{BE}=-2V$

$V_{CB}=+14V$

在$V_{BE}=-2V$时$C_{je}=2.9pF$

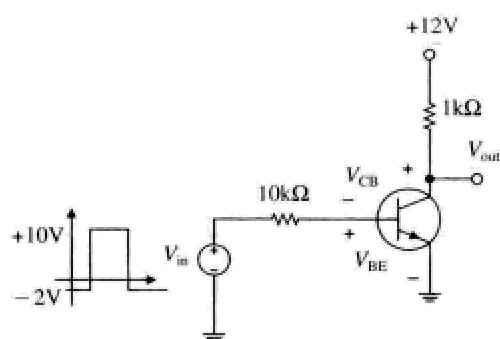
$q_{ve}=C_{je}V_{BE}=(2.9pF)(-2V)=-5.8pC$

在$V_{CB}=+14V$时$C_{jc}=1.5pF$

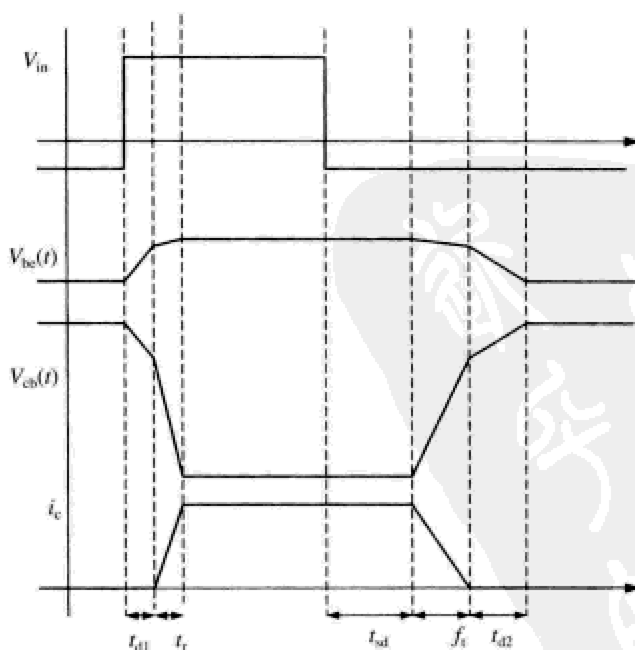
$q_{vc}=C_{jc}V_{CE}=(1.5pF)\times(14V)=21pC$

$i_b(t=0)=[10V-(-2V)]/10k\Omega=1.2mA$

$i_c(t=0)=0$



(a) 电路



(b) 开关波形

图10-16　电荷控制实例

正好在正向放大区的起始点，$t=t_{d1}$

$V_{BE}=0.4V$

$V_{CB}=+11.6V$

在$V_{BE}=0.4V$时$C_{je}\approx 8pF$（这是个估计值，因为数据手册上的曲线并没有扩展到正电压区。）

$q_{ve}=C_{je}V_{BE}=(8pF)\times(0.4\ V)=+3.2pC$

在$V_{CB}=+11.6V$时$C_{jc}=1.6pF$

$q_{vc}=C_{jc}V_{CE}=(1.6pF)(11.6V)=18.6pC$

$i_b(t=t_{d1})=(10V-0.4V)/10k\Omega=0.96mA$

$i_c(t=t_{d1})=0$

在截止区的这个充电时间间隔内，平均基极电流$i_{b,avg}=1.8mA$。基极－发射极非线性电容上电荷的变化为$\Delta q_{ve}=(5.8pC+3.2pC)$，即$\Delta q_{ve}=9pC$。对集电极－基极结进行相似的计算得到$\Delta q_{vc}=2.4pC$。充电时间近似为

$$t_{d1}\approx\frac{\Delta q_{ve}+\Delta q_{vc}}{i_{b,avg}}=\frac{10.4\,pC}{1.08\,mA}\approx 10\,ns \tag{10-32}$$

在这段时间间隔内，集电极电流为零。

穿越正向放大区：在$t=t_{d1}$时刻，我们假设晶体管开始导通，集电极电流开始上升，直至饱和。上升时间t_r与我们对非线性结电容进行充电的速率有关，同时提供用于支持基极电流的额外基极电荷。在正向放大区，电荷控制方程为

$$\begin{aligned} i_c &\approx \frac{q_F}{\tau_F} \\ i_b &= \frac{q_F}{\tau_{BF}}+\frac{d}{dt}(q_F+q_{ve}+q_{vc}) \end{aligned} \tag{10-33}$$

在饱和区的起始点，我们将假设$V_{CB}=0$，$V_{BE}=0.7V$，要求$i_{c,sat}=11.3mA$。记住正向通过时间与晶体管的f_T与τ_F（$=1/(2\pi f_T)=0.53ns$）的乘积相关。因此，需求的正向电荷为$q_F=i_{c,sat}\tau_F=(11.3mA)\times(0.53ns)=6pC$。这是使晶体管完全导通所需的基极电荷，直至它开始饱和。还需要额外的电荷对C_{je}进行充电，从0.4V到0.7V，对C_{jc}进行充电，从11.6V降至0V。计算如下：

$t=t_{d1}$时刻

$V_{BE}=0.4V$

$V_{CB}=11.6V$

在$V_{BE}=0.4V$时$C_{je}\approx 8pF$

在$V_{CB}=+11.6V$时$C_{jc}=1.6pF$

$i_b(t=t_{d1})=0.96mA$

$t=t_{d1}+t_r$时刻

$V_{BE}=0.7V$

$V_{CB}=0V$

在$V_{BE}=0.7V$时$C_{je}\approx 8pF$

在$V_{CB}\approx 0V$时$C_{jc}=3.5pF$

$i_b(t=t_{d1})=0.96mA$

在这段充电时间间隔内，平均基极电流$i_{b,avg}=0.945mA$，电容上的电荷变化为$\Delta q_{ve}=2.4pC$，$\Delta q_{vc}=18.6pC$。因此开关时间为（近似值）

$$t_r\approx\frac{q_F+\Delta q_{ve}+\Delta q_{vc}}{i_{b,avg}}=\frac{27\,pC}{0.945\,mA}=28.6\,ns \tag{10-34}$$

进入饱和区：在$t=t_{d1}+t_{r1}$时刻，晶体管进入饱和区，晶体管V_{BE}箝位在0.7V左右。饱和时的电

荷控制方程为

$$
\begin{aligned}
i_c &= I_{c,sat} \\
i_b - \frac{I_{c,sat}}{\beta_F} &= \frac{dq_S}{dt} + \frac{q_S}{\tau_S}
\end{aligned}
\tag{10-35}
$$

第二个电荷控制方程基极电流中的第二项（$I_{c,sat}/\beta_F$）为支持基极区载流子复合需要的基极电流。在饱和区，集电极电流为常数，基极饱和电荷按某个给定的时间常数累积

$$
\tau_S = \frac{\tau_{BF}(\beta_R + 1) + \tau_{BR}\beta_F}{\beta_F + \beta_R + 1} \tag{10-36}
$$

一旦晶体管进入完全饱和区，总体饱和电荷为

$$
q_S = \left(i_b - \frac{I_{c,sat}}{\beta_F}\right)\tau_S \tag{10-37}
$$

对于该例子，$\tau_s = 100\text{ns}$，$q_s = 87.6\text{pC}$。q_s为晶体管退出饱和区之前必需移除的饱和电荷数量。

饱和存储电荷（关闭）衰减：在该段时间间隔内，集电极电流保持为常数$I_{c,sat}$，同时饱和电荷被移除。饱和电荷q_s通过两种机制被移除：反向基极电流和载流子复合。此时的电荷控制方程与前一情况相同

$$
\begin{aligned}
i_c &= I_{c,sat} \\
i_b - \frac{I_{c,sat}}{\beta_F} &= \frac{dq_S}{dt} + \frac{q_S}{\tau_S}
\end{aligned}
\tag{10-38}
$$

在饱和关闭衰减期间，输入电压为-2V，V_{BE}被箝位在0.7V左右。因此，基极电流$i_b = -0.27\text{mA}$。复合电流为$I_{c,sat}/\beta_F = 11.3\text{mA}/200 = 0.056\text{mA}$。基极电流的电荷控制方程为

$$
-0.326\,\text{mA} = \frac{dq_S}{dt} + \frac{q_S}{\tau_S} \tag{10-39}
$$

解答该电荷控制方程得到，当q_s下降至零点时，占用的时间为$t_{sd} = 131\text{ns}$，如图10-17所示。

正向放大区（电流下降）：退出饱和区之后，我们又进入了正向放大区。为了将晶体管关闭，穿越正向放大区，我们需要移除基极电荷q_F，同时对非线性耗尽电容进行放电。在电流下降段的起始点：

$V_{BE} = 0.7\text{V}$

$V_{CB} = 0\text{V}$

在$V_{BE} = 0.7\text{V}$时$C_{je} \approx 8\text{pF}$

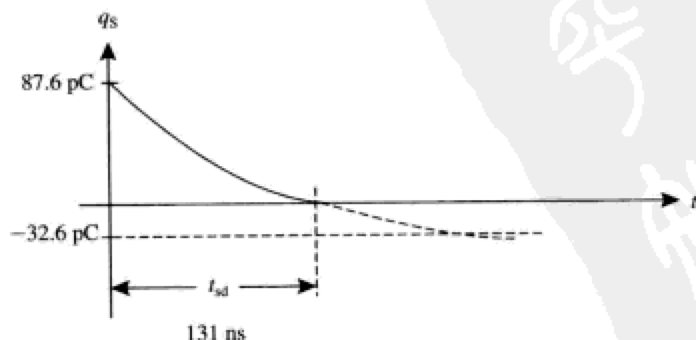


图10-17 退出饱和区期间，饱和电荷q_s的衰减曲线。在这段时间间隔内，集电极电流为常数，饱和电荷从87.6pC衰减到零

在$V_{CB}\approx 0V$时$C_{jc}=3.5pF$

$i_b=0.27mA$

在电流下降段的终止点：

$V_{BE}=0.4V$

$V_{CB}=11.6V$

在$V_{BE}=0.4V$时$C_{je}\approx 8pF$

在$V_{CB}\approx 11.6V$时$C_{jc}=1.6pF$

$i_b=0.24mA$

我们需要移除的基极电荷q_F与晶体管导通的情况（$q_F=6pC$）相同。耗尽区电荷的变化也与晶体管导通的情况相同，得

$$t_f \approx \frac{q_F+\Delta q_{ve}+\Delta q_{vc}}{i_{b,avg}}=\frac{27\,pC}{0.255\,mA}=106\,ns \tag{10-40}$$

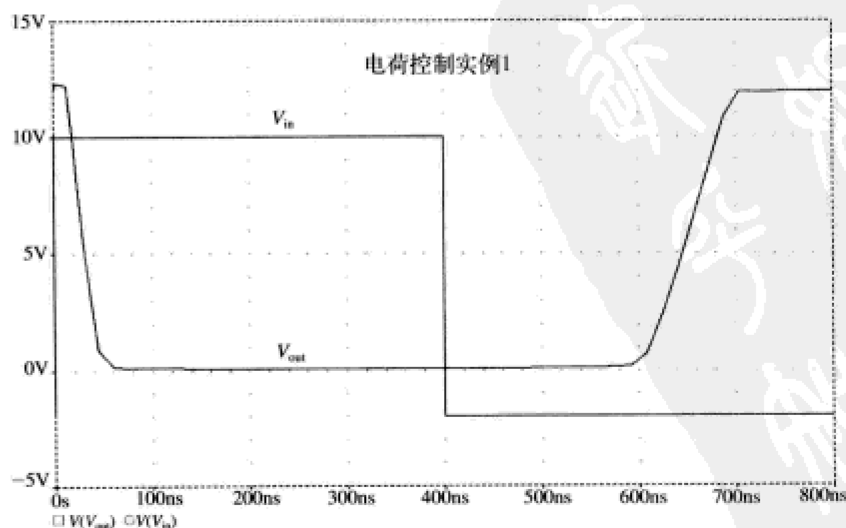
可以看到，即使提供的总体电荷与导通情况相同，关闭时间远比导通时间长，这是因为平均基极电流非常低。

截止：在该段时间间隔内，我们将非线性电容放电回到它们的最终值。需求的总体基极电荷与导通情况相同，需要的电荷量为11.44pC。这种情况下，整个时间段的平均基极电流近似为0.12mA，得到总体关闭衰减时间为

$$t_{d2} \approx \frac{\Delta q_{ve}+\Delta q_{vc}}{i_{b,avg}}=\frac{11.44\,pC}{0.12\,mA}=95.3\,ns \tag{10-41}$$

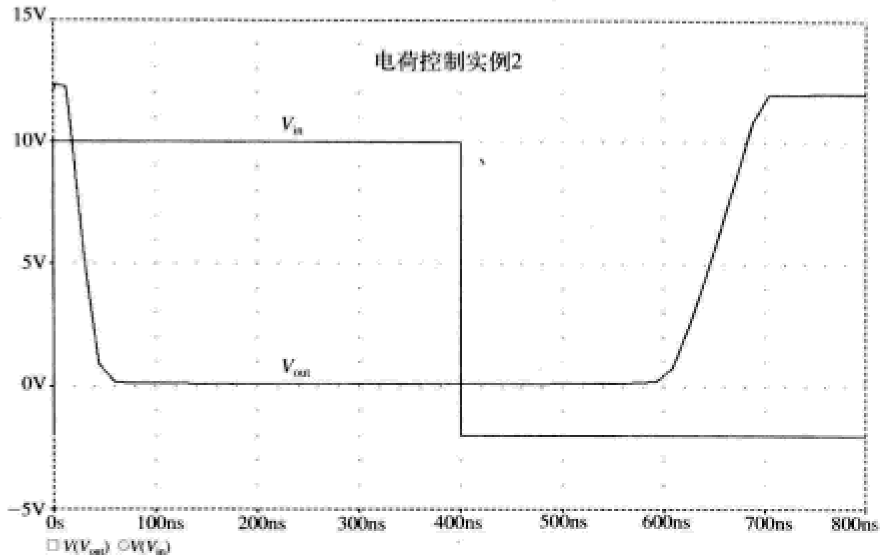
反相器的SPICE仿真结果如图10-18所示。表10-1是SPICE仿真计算与电荷控制方程计算的比较。该结果表明，电荷控制模型是非常有用的晶体管开关时间的近似计算技术。更为重要的是，该模型表明了如何来加速晶体管的开关过程。在该例子中，通过降低基极电阻，可以大大减小输出上升时间和下降时间。

现在，为了加速开关过程，我们将基极电阻从10kΩ降低至1kΩ（如图10-19所示），正如期望的那样，输出上升时间和下降时间变得更快了。不过，饱和延迟时间与前一例题几乎相同，这是为什么呢？



(a) 输入和输出电压，可以看到饱和衰减时间非常接近于200ns

图10-18 电荷控制例题的SPICE仿真结果



（b）基极电流

图10-18 （续）

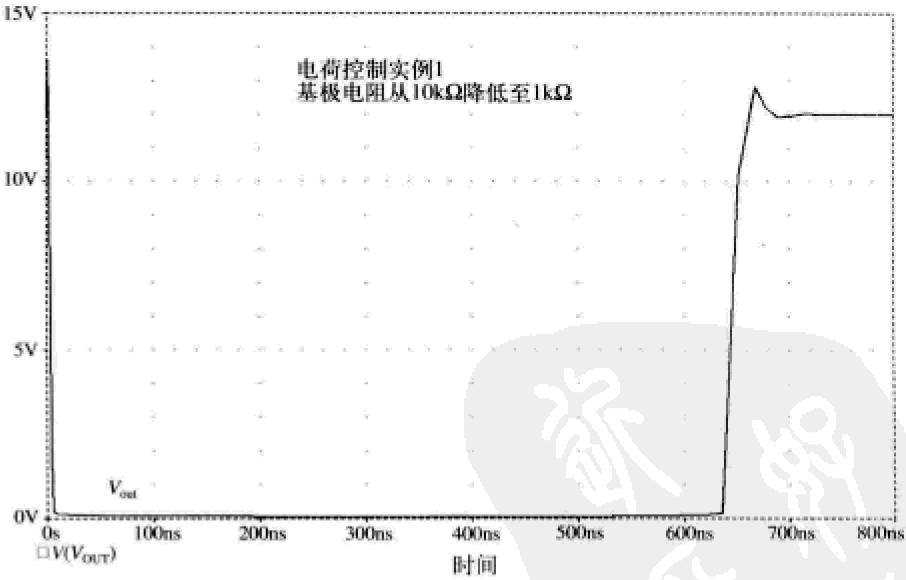


图10-19　基极电阻从10kΩ下降到1kΩ时的输出波形。上升时间和下降时间更快了。注意到，饱和延迟时间仍为200ns

表10-1　电荷控制模型结果与SPICE仿真结果比较表

项　　目	电荷控制	SPICE	误差(%)
1．截止区	1.06E-08	1.25E-08	15.3%
2．正向放大区	2.85E-08	3.15E-08	9.4%
3．饱和区			
4．存储	1.31E-07	1.90E-07	31.3%
5．正向放大区	1.06E-07	1.00E-07	−5.7%
6．截止区	9.53E-08		

通过考虑饱和区的晶体管电荷控制方程，我们可以理解饱和延迟时间为什么近似保持为常数。注意到，饱和电荷q_s的最终值与我们驱动晶体管基极电流的严重程度有关。这导致饱和延迟时间近似为常数。

例题10.3：不饱和电流开关

使用信号晶体管2N2222实现的不饱和电流开关电路如图10-20所示。如果我们忽略结电容，基极电流和集电极电流的电荷控制方程为

$$i_b = \frac{q_F}{\tau_{BF}} + \frac{dq_F}{dt}$$
$$i_c = \frac{q_F}{\tau_F} \tag{10-42}$$

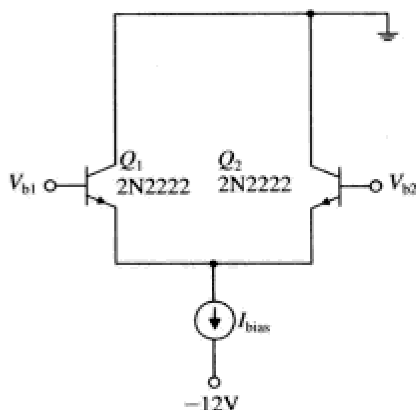


图10-20 差分电流开关电路

为了快速开启或者关闭晶体管，我们需要提供基极电流为每个晶体管充电或者放电q_F。因此，在大部件中，开关速度受我们能够提供的基极电流大小决定。在这个电压驱动例子中基极电流受基极驱动器的电压摆幅以及晶体管的基极扩展电阻r_x设置。对于晶体管2N2222[①]而言，基极扩展电阻的阻值非常低$r_x \approx 40\Omega$。

我们将假设基极驱动器$v_{b1}(t)$和$v_{b2}(t)$的电压摆幅为2V，因此最大基极电流为50mA左右。我们可以解答开关时间为

$$\tau_{SW} \approx \frac{q_{F,final}}{\langle i_b \rangle} \approx \frac{I_{C,final}\tau_F}{\langle i_b \rangle} \approx \frac{I_{C,final}}{\omega_T \langle i_b \rangle} \tag{10-43}$$

这里，符号$\langle i_b \rangle$代表开关期间基极电流的平均值。真实开关时间将为更长，这是由相同数量的基极电流必须对基极－集电极和基极－发射极的非线性结电容进行充电这一事实造成的。从此得到的重要结论是：如果基极电流保持为常数，开关时间与集电极电流具有相似的尺度。图10-21是$I_{bias}=100$mA、$I_{bias}=200$mA、$I_{bias}=300$mA时的瞬时SPICE仿真。我们可以看到每种情况的开关时间为几个ns[②]，并且开关时间确实随基极电流水平按近似比例增长，这与期望相同。如图10-22所示是基极电流的瞬时SPICE仿真曲线。在集电极电流过渡期间，基极电流非常高。

① 因为基极扩展电阻随集电极电流的偏置水平变化，所以这是个粗略近似。

② 注意，1ns是非常短的时间周期。光线在1ns内穿越1ft (1ft＝0.3048m)的距离。

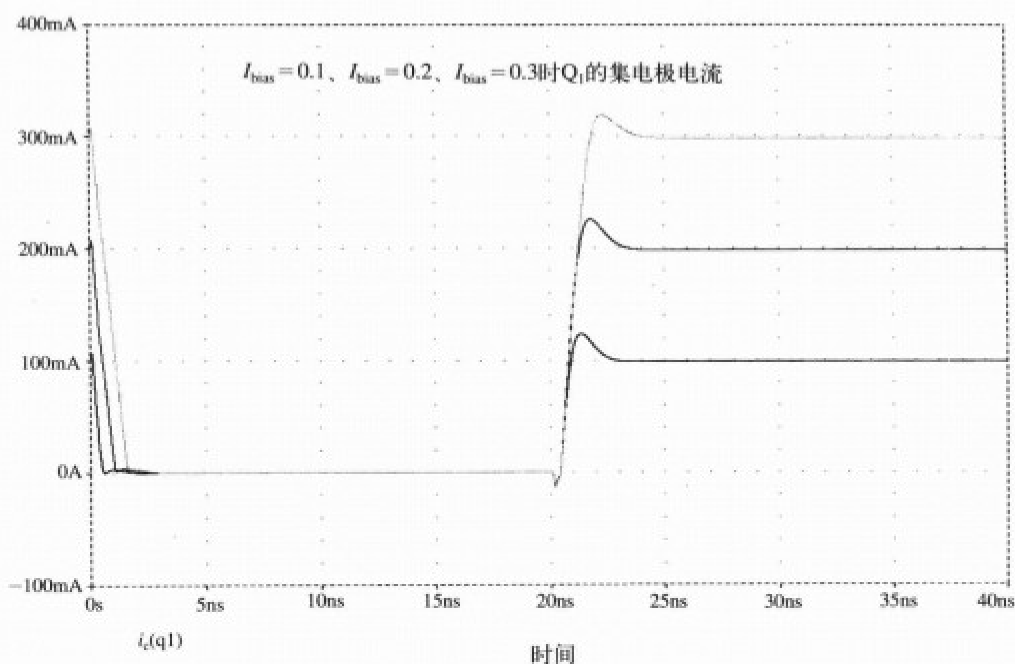


图10-21　电流开关仿真曲线，标明Q_1的集电极电流

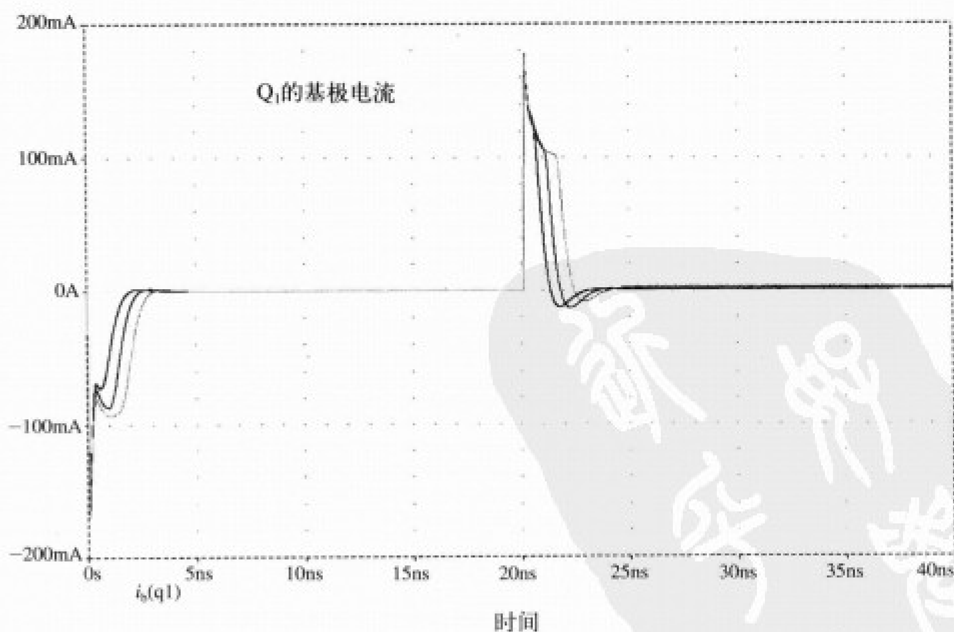
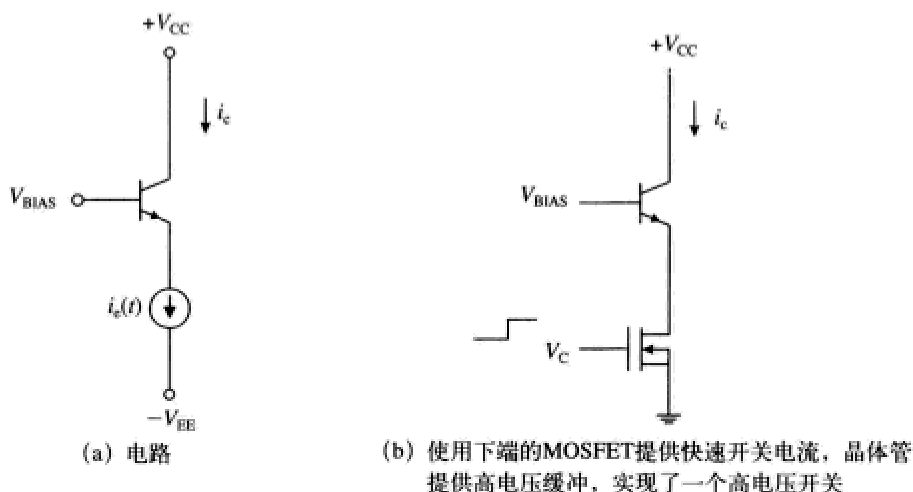


图10-22　电流开关仿真曲线，标明Q_1的基极电流

10.10　发射极开关

发射极开关电路如图10-23所示。这类电路拓扑结构已经在需要与负载进行高电压隔离的功率开关中使用过。如图10-23b所示，MOSFET器件提供高速电流开关，双极性晶体管是个共基极缓冲器，提供电压隔离功能。可以看到，在发射极开关的情况下，晶体管饱和不存在问题。因此，

我们期望该类开关具有很快的速度。假设MOSFET器件向晶体管的发射极提供了一个阶跃电流，我们来估计这类电路结构的开关速度。



(a) 电路　(b) 使用下端的MOSFET提供快速开关电流，晶体管提供高电压缓冲，实现了一个高电压开关

图10-23 发射极开关电路

参看图10-23a，忽略结电容，电荷控制方程为

$$
\begin{aligned}
i_b &= \frac{q_F}{\tau_{BF}} + \frac{dq_F}{dt} \\
i_c &= \frac{q_F}{\tau_F} \\
i_e &= -(i_b + i_c) = -\frac{q_F}{\tau_{BF}} - \frac{dq_F}{dt} - \frac{q_F}{\tau_F}
\end{aligned}
\tag{10-44}
$$

重新安排上面的发射极点和控制方程，得

$$
-\frac{q_F}{\tau_{BF}} - \frac{dq_F}{dt} - \frac{q_F}{\tau_F} = -I_E u_{-1}(t) \tag{10-45}
$$

这里$u_{-1}(t)$为单位阶跃函数，注意到$\tau_{BF} >> \tau_F$，进而$q_F/\tau_{BF} << q_F/\tau_F$，我们可以对发射极电荷控制方程进行更进一步的近似。

$$
\frac{dq_F}{dt} + \frac{q_F}{\tau_F} \approx I_E u_{-1}(t) \tag{10-46}
$$

这个电荷控制方程的解为，晶体管正向电荷q_F以τ_F为特征时间常数的简单指数上升函数。

$$
\begin{aligned}
q_F(t) &\approx I_E \tau_F \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_F}}\right) \\
i_c &= \frac{q_F(t)}{\tau_F} \approx I_E \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_F}}\right)
\end{aligned}
\tag{10-47}
$$

该方程的解表明，集电极电流随特征时间τ_F上升，τ_F与晶体管的$1/\omega_T$接近，如图10-24的SPICE仿真曲线所示。

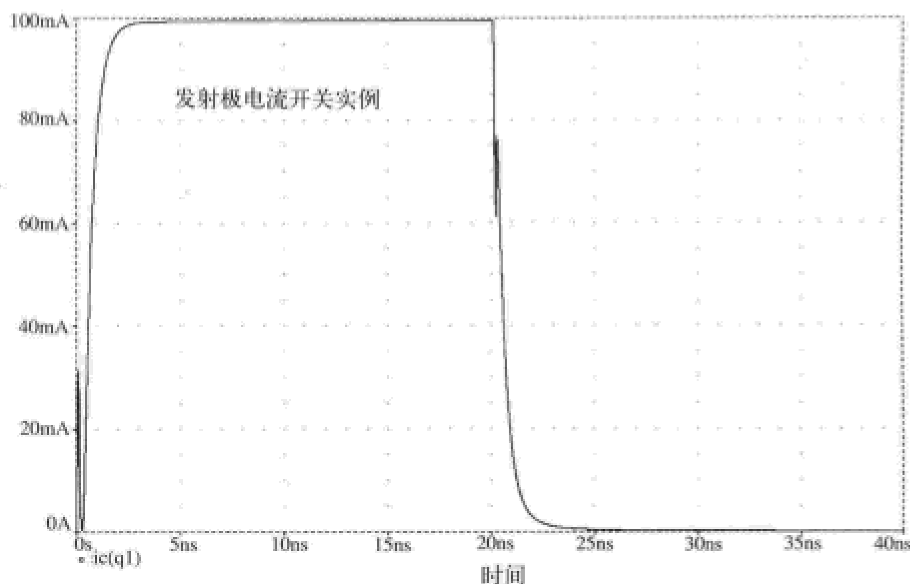


图10-24　使用晶体管2N3904实现的发射极开关的PSPICE仿真结果曲线

10.11　2N2222数据手册摘录[①]

晶体管放大器

P2N2222A

NPN型硅材料器件



CASE 29–11, STYLE 17
TO–92 (TO–226AA)

最大额定工作参数

额定参数	符号	数值	单位
集电极－发射极电压	V_{CEO}	40	Vdc
集电极－基极电压	V_{CBO}	75	Vdc
发射极－基极电压	V_{EBO}	6.0	Vdc
集电极电流－连续	I_C	600	mAdc
在T_A＝25°C时器件的总体耗散功率。 大于25°C降额使用	P_D	625 5.0	mW mW/°C
在T_C=25°C时器件的总体耗散功率。 大于25°C降额使用	P_D	1.5 12	W mW/°C
PN结的工作和储存温度范围	T_J, T_{stg}	−55~+150	°C

热特性

特　　性	符号	最大值	单位
PN结相对周围环境的热阻	$R_{\theta JA}$	200	°C/W
PN结使用时的热阻	$R_{\theta JC}$	83.3	°C/W



① On Semiconductor公司授权使用。

电特性（除非特别说明，否则下列数值都是在$T_A=25^{\circ}C$时测得的）

特性	符号	最小值	最大值	单位
关闭特性				
集电极－发射极击穿电压 ($I_C=10mAdc$，$I_B=0$)	$V_{(BR)CEO}$	40	–	Vdc
集电极－基极击穿电压 ($I_C=10\mu Adc$，$I_E=0$)	$V_{(BR)CBO}$	75	–	Vdc
发射极－基极击穿电压 ($I_E=10\mu Adc$，$I_C=0$)	$V_{(BR)EBO}$	6.0	–	Vdc
集电极截止电流 ($V_{CE}=60Vdc$，$V_{EB(off)}=3.0Vdc$)	I_{CEX}	–	10	nAdc
集电极截止电流 ($V_{CB}=60Vdc$，$I_E=0$) ($V_{CB}=60Vdc$，$I_E=0$，$T_A=150^{\circ}C$)	I_{CBO}	 – –	 0.01 10	µAdc
发射极截止电流 ($V_{EB}=3.0Vdc$，$I_C=0$)	I_{EBO}	–	10	nAdc
集电极截止电流 ($V_{CE}=10V$)	I_{CEO}	–	10	nAdc
基极截止电流 ($V_{CE}=60Vdc$，$V_{EB(off)}=3.0Vdc$)	I_{BEX}	–	20	nAdc
导通特性				
直流电流增益 ($I_C=0.1mAdc$，$V_{CE}=10Vdc$) ($I_C=1.0mAdc$，$V_{CE}=10Vdc$) ($I_C=10mAdc$，$V_{CE}=10Vdc$) ($I_C=10mAdc$，$V_{CE}=10Vdc$，$T_A=-55^{\circ}C$) ($I_C=150mAdc$，$V_{CE}=10Vdc$) [1] ($I_C=150mAdc$，$V_{CE}=1.0Vdc$) [1] ($I_C=500mAdc$，$V_{CE}=10Vdc$) [1]	h_{FE}	 35 50 75 35 100 50 40	 – – – – 300 – –	–
集电极－发射极饱和电压[1] ($I_C=150mAdc$，$I_B=15mAdc$) ($I_C=500mAdc$，$I_B=50mAdc$)	$V_{CE(sat)}$	 – –	 0.3 1.0	Vdc –
基极－发射极饱和电压[1] ($I_C=150mAdc$，$I_B=15mAdc$) ($I_C=500mAdc$，$I_B=50mAdc$)	$V_{BE(sat)}$	 0.6 –	 1.2 2.0	Vdc
小信号特性				
电流增益－带宽乘积[2] ($I_C=20mAdc$，$V_{CE}=20Vdc$，$f=100MHz$)	f_T	300	–	MHz
输出电容 ($V_{CB}=10Vdc$，$I_E=0$，$f=1.0MHz$)	C_{obo}	–	8.0	pF
输入电容 ($V_{EB}=0.5Vdc$, $I_C=0$, $f=1.0MHz$)	C_{ibo}	–	25	pF
输入电阻 ($I_C=1.0mAdc$, $V_{CE}=10Vdc$, $f=1.0kHz$)	h_{ie}	 2.0	 8.0	kΩ

电特性（除非特别说明，否则下列数值都是在$T_A=25^\circ C$时测得的）

特性	符号	最小值	最大值	单位
(I_C=10mAdc, V_{CE}=10Vdc, f=1.0kHz)		0.25	1.25	
电压反馈比 (I_C=1.0mAdc, V_{CE}=10Vdc, f=1.0kHz) (I_C=10mAdc, V_{CE}=10Vdc, f=1.0kHz)	h_{re}	 – –	 8.0 4.0	$\times 10^{-4}$
小信号电流增益 (I_C=1.0mAdc, V_{CE}=10Vdc, f=1.0kHz) (I_C=10mAdc, V_{CE}=10Vdc, f=1.0kHz)	h_{fe}	 50 75	 300 375	–
输出导纳 (I_C=1.0mAdc, V_{CE}=10Vdc, f=1.0kHz) (I_C=10mAdc, V_{CE}=10Vdc, f=1.0kHz)	h_{oe}	 5.0 25	 35 200	μmhos
集电极－基极时间常数 (I_E=20mAdc, V_{CB}=20Vdc, f=31.8MHz)	$r_{b'}C_c$	–	150	ps
噪声指数 (I_C=100μAdc, V_{CE}=10Vdc, R_S=1.0kΩ, f=1.0kHz)	N_F	–	4.0	dB

开关特性

延迟时间 上升时间	(V_{CC}=30Vdc, $V_{BE(off)}$=−2.0Vdc, I_C=150mAdc, I_{B1}=15mAdc) (见图1)	t_d t_r	– –	10 25	ns ns
存储时间 下降时间	(V_{CC}=30Vdc, I_C=150mAdc, I_{B1}=I_{B2}=15mAdc) (见图2)	t_s t_f	– –	225 60	ns ns

(1) 脉冲测试：脉冲宽度≤300μs，占空比≤2.0%。
(2) f_T定义为$|h_{fe}|$外推至单位值时的频率。

开关时间等效测量电路

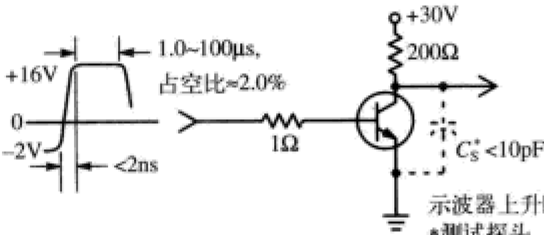


图1　导通时间电路

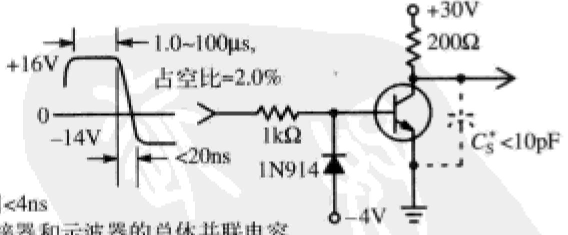


图2　关闭时间电路

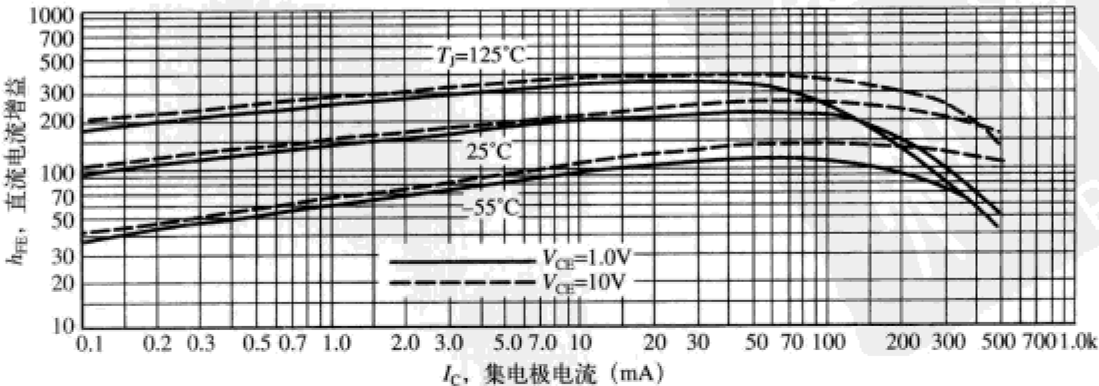


图3　直流电流增益曲线

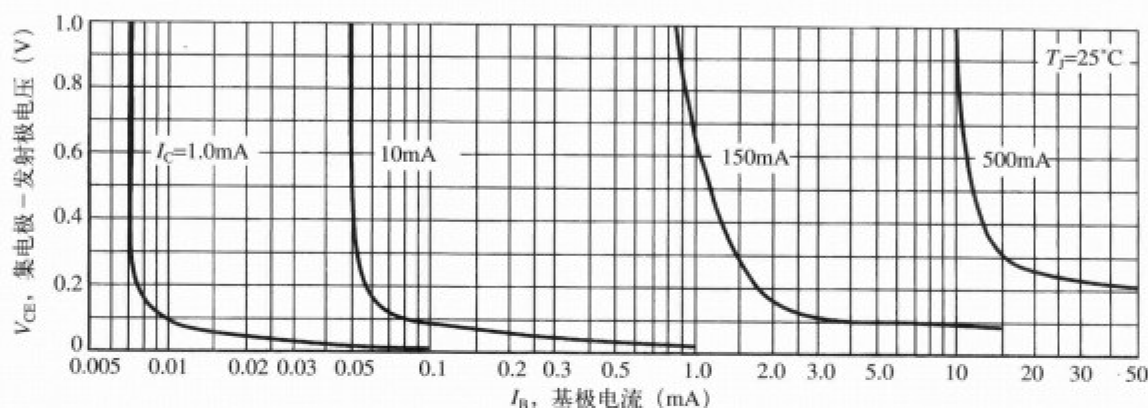


图4 集电极饱和区曲线

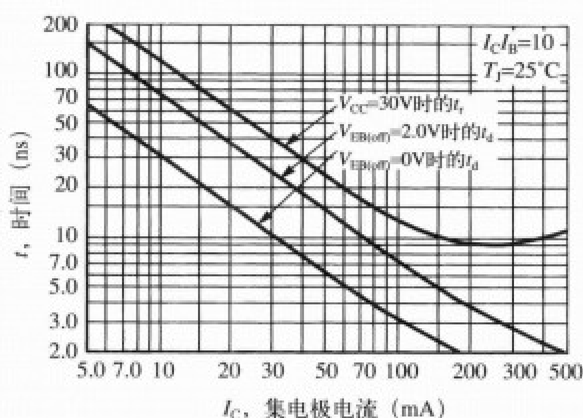


图5 导通时间曲线

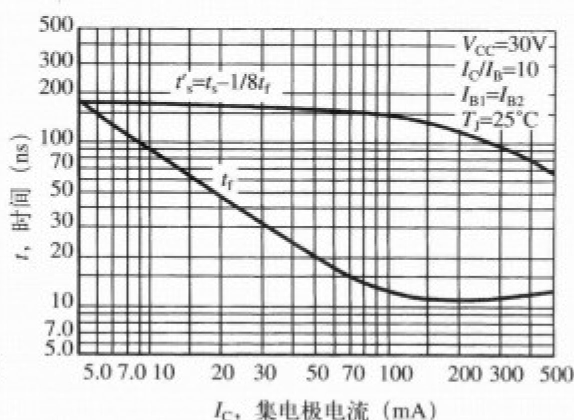


图6 关闭时间曲线

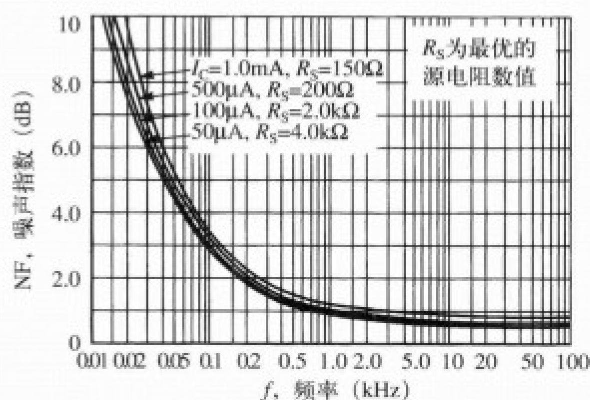


图7 频率作用曲线

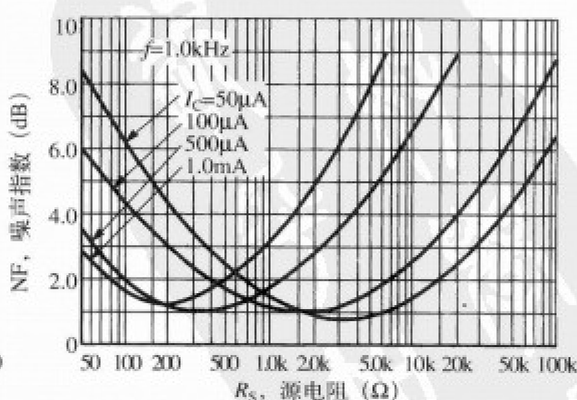


图8 源电阻的作用曲线

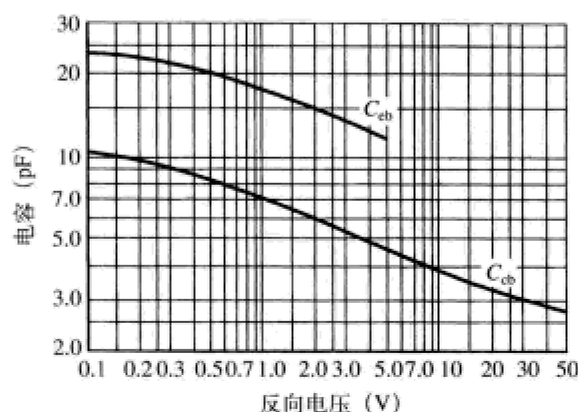


图9 电容曲线

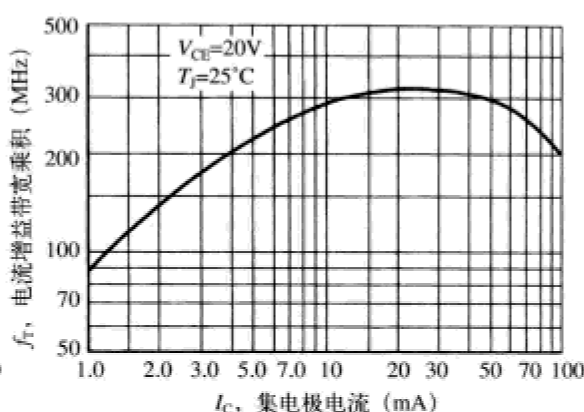


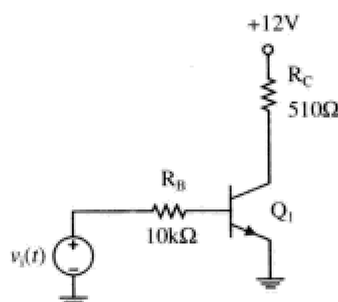
图10 电流增益带宽乘积曲线

10.12 本章习题

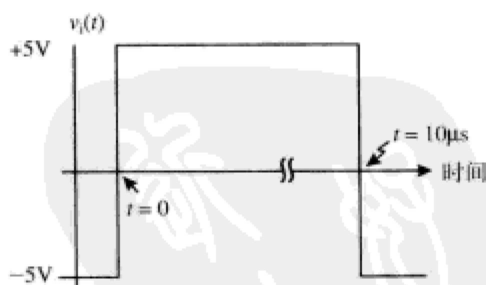
习题10.1

脉冲信号源驱动的晶体管电路如图10-25a所示。晶体管受脉冲信号$v_i(t)$驱动（如图10-25b所示），$v_i(t)$在$t=0$时刻从-5V过渡到$+5$V。$t=10\mu s$时，输入脉冲信号$v_i(t)$又从$+5$V过渡到-5V。假设晶体管在$V_{BE}=0.7$V达到饱和。晶体管参数如下：$\tau_F=0.5$ns，$\beta_F=50$，$\tau_R=50$ns，$\beta_R=5$。结电容则按照下式求解

$$C_j=\frac{C_{jo}}{\sqrt{1-\frac{V_j}{\varphi_{bi}}}}$$



（a）电路



（b）基极驱动脉冲电压源的时间变化曲线

图10-25 习题10.1的晶体管电路

每个PN结的φ_{bi}参数均为0.9V。基极－发射极结的$C_{jo}=35$pF。基极－集电极结的$C_{jo}=10$pF。C_{je}和C_{jc}的函数曲线如图10-26所示。

（a）在$t=0+$时刻，输入脉冲$v_i(t)$过渡到高电平。晶体管进入正向放大区之前，在截止区大致持续了多长时间呢？在解答该问题时，先明确所有能够帮助确定开关时间的端点条件。

（b）离开截止区（$V_{BE}=0.7$V附近），晶体管进入正向放大区。确定穿越正向放大区的时间$t_{far,ON}$。绘制$v_{be}(t)$、集电极电流$i_c(t)$在$0<t<500$ns时间间隔内的变化曲线，指出截止时间和集电极电流上升时间。

（c）在$t=10\mu s$时，输入脉冲从$+5$V过渡回-5V。求解$t>10\mu s$的集电极电流，并绘制其变化

曲线。

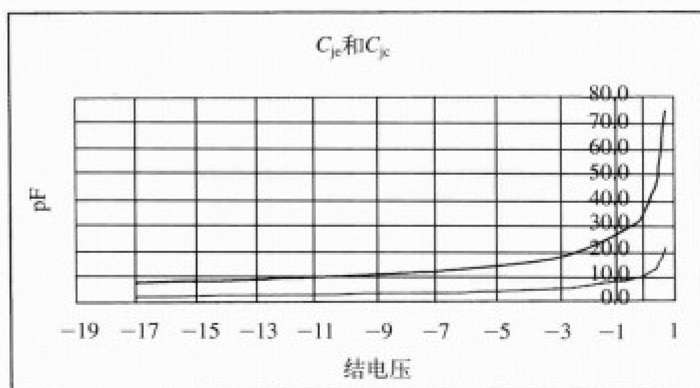


图10-26 习题10.1的结电容曲线

习题10.2

如图10-27所示放大器受10.6V阶跃电压驱动，$t=0$时刻电压源从0V跃变10.6V。

（a）使用电荷控制模型，绘制图10-27所示晶体管放大器的$i_C(t)$、$v_{out}(t)$变化曲线。要考虑空间电荷电容的影响。求解过程中，可以做出合理假设，包含使用的基极电流平均值、电容平均值等。对于晶体管2N3904，假设其$\beta_F=100$。

（b）使用电荷控制模型完成手工计算之后，使用SPICE对电路进行仿真。将仿真结果与手工计算结果进行比较，并且解释两者之间的差异。注意：对于输入电压，使用SPICE脉冲发生器的上升时间比预料的动态特性要快得多（快10倍以上）。设定瞬态仿真运行足够长的时间，以保证能够观察到集电极电流和输出电压的最终值。

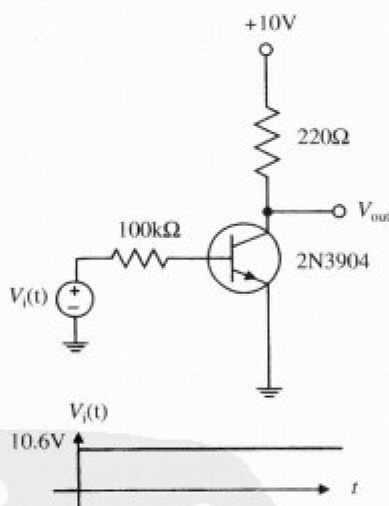


图10-27 习题10.2的晶体管开关电路

习题10.3

本题晶体管2N3904受电压源驱动，如图10-28所示。分析晶体管的动态特性。假设晶体管的参数为$\beta_F=100$。忽略空间电荷电容。

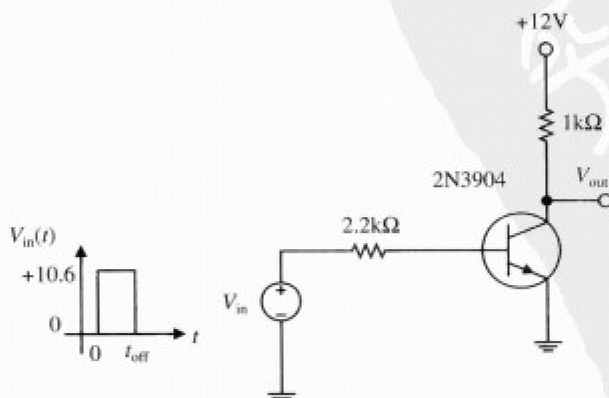


图10-28 习题10.3的晶体管开关电路

（a）假设晶体管始终工作在正向放大区。确定其时间常数，以及其他变量的最终值等，绘制$q_F(t)$的变化曲线。

（b）晶体管导通时，穿越正向放大区要占用多长时间（t_a）

（c）因为$\beta_F i_B > I_{c(sat)}$，晶体管不会一直保持正向放大。在前面求解得函数曲线上指出饱和发生点。求解q_{BO}，q_{BO}是指晶体管达到饱和区边沿时的q_F值。求解$I_{c,(sat)}$，估计时间常数τ_s。

（d）现在，等待了一长段时间之后，晶体管进入完全饱和状态。晶体管完全饱和之后，饱和电荷数据为多少。

（e）晶体管达到完全饱和之后，输入脉冲下降。很明显，晶体管不再持续饱和，而是q_s为零时，进入正向放大区。确定存储延迟时间，输入电压脉冲下降至0V之后晶体管保持饱和的持续时间。绘制饱和电荷q_s的变化曲线。

（f）比较导通时间和关闭时间，解释两者之间的差异。

（g）使用PSPICE进行电路仿真，将仿真结果与电荷控制模型的计算结果进行比较。试着解释两者之间所有的主要差异。

（h）如果输入脉冲的持续时间减小，可以看到存储延迟时间也随之减小。解释这是为什么。

（i）现在，晶体管受如图10-29所示的电压脉冲驱动。

使用PSPICE进行电路仿真，与（g）的仿真结果进行比较，解释（i）新开关波形的仿真结果与（g）的主要差异。

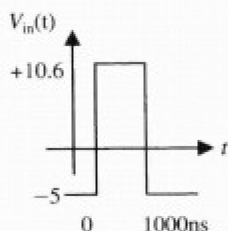


图10-29 习题10.3的新驱动波形

习题10.4

晶体管在图10-30所示的开关电路中。在$t=0$时刻，基极驱动电流源瞬时从0mA过渡到10mA。电流源保持10mA输出持续1000ns，之后电流源关闭。晶体管的参数如下：$\omega_T=10^9$rad/s，$\beta_F=100$，$\beta_R=5$，$\tau_R=50$ns，$V_{CE,SAT}=0$。假设晶体管在$V_{BE}=0.5$V时进入正向放大区。结电容曲线如图10-31所示。

（a）在$t=0+$时刻，电流源的输出过渡到高状态。求解晶体管的导通延迟时间t_d。

（b）穿越截止区之后，晶体管进入正向放大区。计算集电极电流大致的上升时间t_{ri}。

（c）穿越正向放大区之后，晶体管进入饱和区。计算饱和电荷q_s的最终值。

（d）电流源关闭之后，晶体管仍旧在饱和区持续了一段时间。计算存储延迟时间t_s。

（e）晶体管离开保护区之后，集电极电流下降至0mA时，它又一次进入正向放大区。计算集电极电流大致的下降时间t_{fi}。（在本步解答中，估计的下降时间为集电极电流从最初值的100%下降至最初值的10%占用的时间。）

（f）绘制集电极电流和晶体管电压V_{CE}的关系曲线，标出所有变量轴。

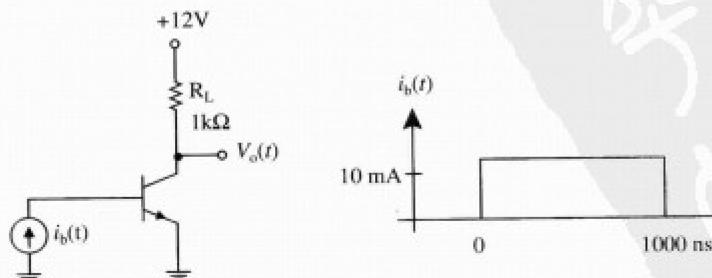


图10-30 习题10.4的晶体管开关电路

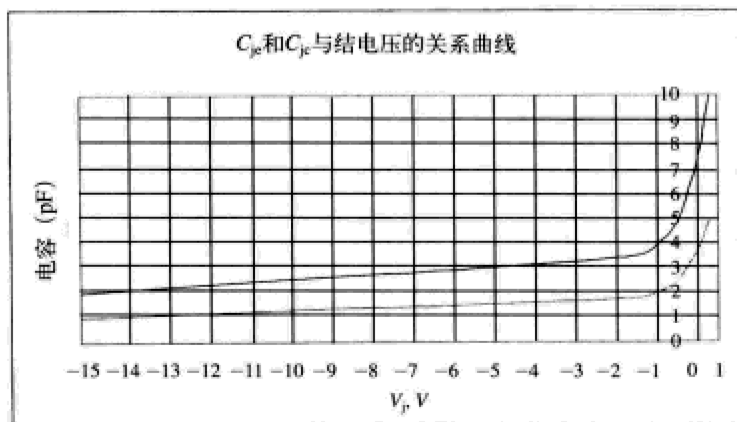


图10-31 结电容随结电压变化的函数曲线。上部为C_{je}曲线，下部为C_{jc}曲线

习题10.5

对于图10-32的晶体管电路，使用下列参数：$C_{je}=10\text{pF}$，$C_{jc}=2\text{pF}$，$f_T=300\text{MHz}$，$\beta_F=100$，$\beta_R=5$，$\tau_R=50\text{ns}$。

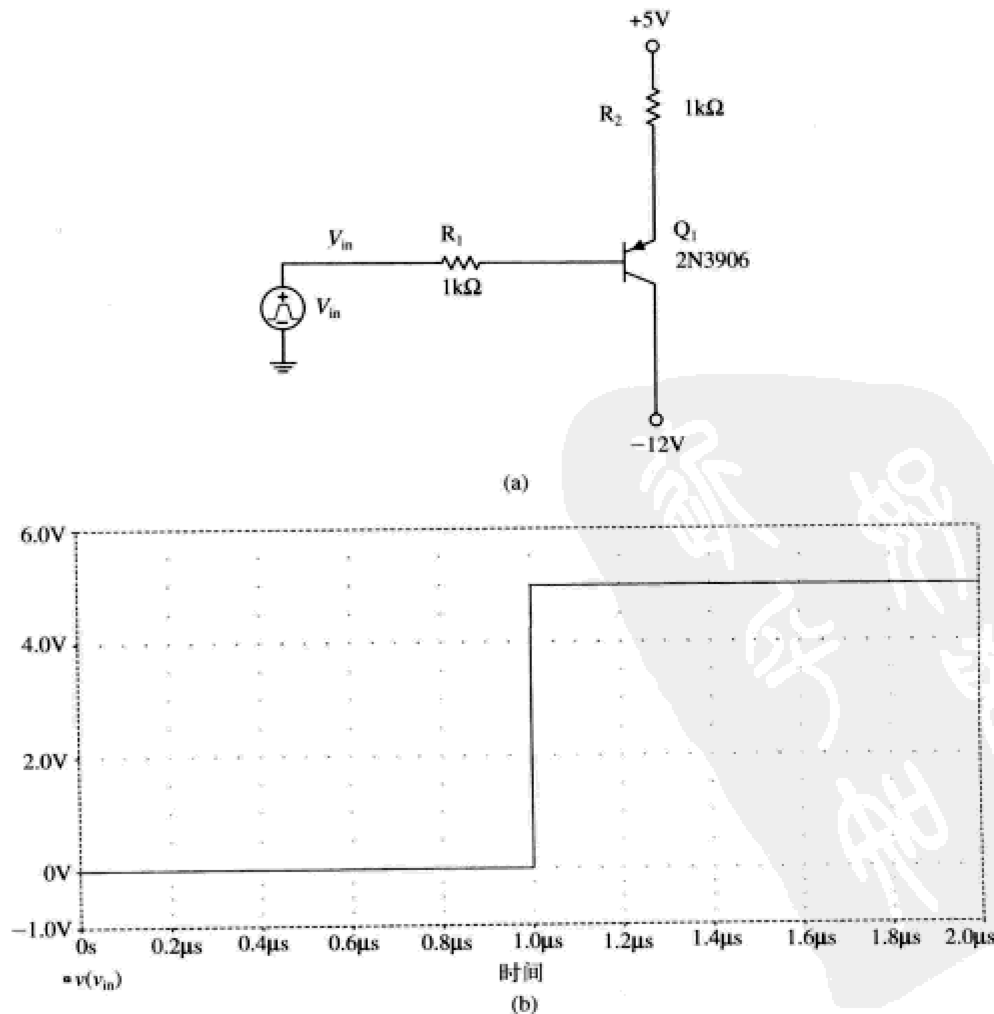


图10-32 习题10.5的电路

（a）图10-30电路在$t=1000$ns时受0～5V的阶跃电压驱动。$t=0$时刻集电极电流的初始值为多少？

（b）晶体管是否会一直饱和？解释为什么会这样或者为什么会不是这样？

（c）在$t=1000$ns时，输入电压从0V阶跃到5V。计算集电极电流开始变化前的延迟时间，还要计算晶体管过渡穿越过正向放大区时集电极电流的大致过渡时间。说明你的假设，并给出如此假设的理由。

（d）绘制输入电压波形和晶体管集电极电流波形。

10.13 参考文献

Barna, A., "Analytic approximations for propagation delays in current-mode switching circuits including collector-base capacitances," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 16, no. 5, October 1981, pp. 597－599.

Bashkow, Theodore R., "Effect of Nonlinear Collector Capacitance on Collector Current Rise Time," *IRE Transactions on Electron Devices*, October 1956, pp. 167－172.

Casaravilla, G., and Silveira, F. "Emitter drive: a technique to drive a bipolar power transistor switching at 100 kHz," *Proceedings of the 1990 IEEE Colloquium in South America*, August 31-September 15, 1990, pp. 188－192.

Chuang, C. T, and Chin, K., "High-speed low-power direct-coupled complementary push-pull ECL circuit" *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 29, no. 7, July 1994, pp. 836－839.

Easley, James W., "The Effect of Collector Capacity on the Transient Response of Junction Transistors," *IRE Transactions on Electron Devices*, January 1957, pp. 6－14.

Ebers, J. J., and Moll, J. L., "Large-Signal Behavior of Junction Transistors," *Proceedings of the IR.E.*, 1954, p. 1761.

______, "Large-Signal Behavior of Junction Transistors," *Proceedings of the IRE*, December 1954,pp.1761－1772.

Ghannam, M. Y., Mertens, R. P., and van Overstraeten, R. J., "An analytical model for the determination of the transient response of CML and ECL gates," *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 37, no. 1, January 1990, pp. 191－201.

Gray, Paul E., and Searle, Campbell L., *Electronic Principles Physics, Models and Circuits*, John Wiley, 1969.

Jensen, Randall W., "Charge Control Transistor Model for the IBM Electronic Circuit Analysis Program," *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. CT-13, no. 4, December 1966, pp.428－437.

Karadzinov, L. V., Arsov, G. L., Dzekov, T. A., and Jeffries, D. J., "Charge-control piece-wise-linear bipolar junction transistor model," *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, ISIE '96, June 17-20, 1996, pp. 561－566.

Konstadinidis, G. K., and Berger, H. H., "Optimization of buffer stages in bipolar VLSI systems," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 27, no. 7, July 1992, pp. 1002－1013.

Kuno, H. John, "Rise and Fall Time Calculations of Junction Transistors," *IEEE Transactions on Electron Devices*, April 1964, pp. 151－155.

Moll, John L., "Large-Signal Transient Response of Junction Transistors," *Proceedings of the I.R.E.*, December 1954, pp. 1773－1784.

Muller, Richard S., and Kamins, Theodore I., *Device Electronics for Integrated Circuits*, 2d edition, John Wiley, 1986.

Musumeci, S., Pagano, R., Raciti, A., Porto, C., Ronsisvalle, C., and Scollo, R., "Characterization, parameter identification and modeling of a new monolithic emitter- switching bipolar transistor," *Proceedings of the 39th Industry Applications Conference*, October 3-7, 2004, pp. 1924－1931.

Neudeck, Gerold W., "The PN Junction Diode," *Modular Series on Solid State Devices*, volume II, Addison-Wesley, 1983.

Robinson, F. V. P., and Williams, B. W., "Optimising snubbers for high-current emitter-switched transistors," *Proceedings of the Third International Conference on Power Electronics and Variable-Speed Drives*, July 13-15, 1988, pp. 177－180.

Sharaf, K. M., and Elmasry, M. I., "An accurate analytical propagation delay model for high-speed CML bipolar circuits," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 29, no. 1, January 1994, pp. 31－45.

Stork, J. M. C., "Bipolar transistor scaling for minimum switching delay and energy dissipation," *Technical Digest of International Electron Devices Meeting*, December 11-14, 1988,pp.550 – 553.

Thompson, M. T., and Schlecht, M. E, "High power laser diode driver based on power converter technology," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 12, no. 1, January 1997,pp.46 – 52.

Winkel, Jan TE, "Extended Charge-Control Model for Bipolar Transistors," *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. ED-20, no. 4, April 1973, pp. 389 – 394.



第11章 反馈系统

本章概要

- 经典控制系统的内容涵盖单输入单输出（single-input, single-output，SISO）线性时不变（linear time invariant，LTI）连续时间系统。这包括经典伺服机构和大多数运算放大器电路。本章提供反馈控制系统设计的介绍性材料。

11.1 反馈系统基本知识与早期历史点滴

反馈系统就是一个将自身输出与期望输入进行比较，并且采取正确动作迫使输出跟踪输入变化的系统。讨论认为，自动反馈控制的起源①可以追溯到18世纪瓦特的工作。瓦特针对蒸汽发动机开展了大量的研究工作，他对离心调节器（governor）进行改造②，使其能够自动控制蒸汽发动机的速度。调节器由两个旋转金属球组成，旋转金属球受离心力作用想挣脱束缚，向外飞出。于是"向外飞出"的大小量度被用来调节节流阀，进而控制蒸汽发动机的速度。这是个比例控制（proportional control）的例子。

瓦特时代的蒸汽发动机在调节器的控制下工作良好，但是随着蒸汽发动机变得越来越大，设计得越来越完美，发现其引擎速度存在稳定性问题。其中一个问题就是周期性振动（hunting），也就是引擎速度忽大忽小，很明显是要获取一个稳定工作点。这个问题一直没有得到很好的理解，直到19世纪后期，麦克斯韦③（对，就是以全部方程出名的那个麦克斯韦）使用差分方程推导出了关于瓦特调节器稳定性的数学公式，这个问题才得到解决。

11.2 负反馈放大器的发明

我们现在跳至20世纪。电话发明早期，建设跨洋电话线路碰到了实际困难。世界上第一个跨洋电话系统建于1914年，它采用8号铜芯线缆，每英里重达1000lb (1lb＝0.4536kg)。线缆自身电阻造成的损失约为60dB④。数个真空管放大器被用来增强语音信号的幅度。这些放大器的带宽有限，具有严重的非线性失真。多个放大器级联在一起（如图11-1所示）形成了不可忍受的信号失真。



图11-1 放大器级联在一起

Harold Black于1921年毕业于伍斯特理工学院（WPI学院），随后加入贝尔实验室。当时，AT&T实验室面临的主要任务就是提高电话系统的性能，解决级联放大器的失真问题。1927年，

① 某些人可能会争议，将反馈控制的起源追溯到古代的滴漏和浮动校准器。参见Otto Mayr的著作*The Origins of Feedback Control*，MIT Press出版社1970年出版。

② 离心调节器由Thomas Mead c.于1787年发明创造，他因这个发明得到了1628号英国专利。

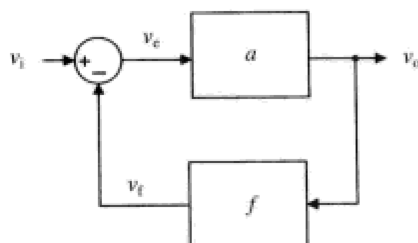
③ James C. Maxwell，"On Governors"，*Proceedings of the Royal Society*，1867，pp.270-283。

④ William McC. Siebert的著作*Circuits, Signals and Systems*，MIT Press出版社1986年出版。

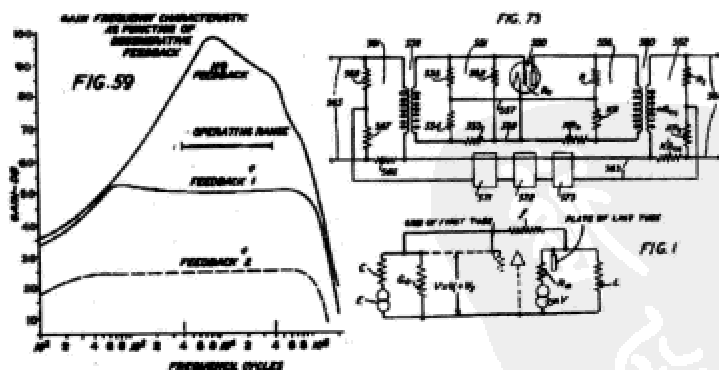
Black①在考虑放大器内的失真问题时，提出了负反馈放大器思想如图11-2所示。

“时间定格在1927年8月2日的早晨，这一天是星期二。当时我正行进在上班的路上，走至Lackawanna Ferry的Hudson河畔，负反馈放大器的概念瞬间闪现在我的脑海。50多年过去了，我总是思考这个想法是如何出现的，又为什么会出现。直到今天，我的想法还是与1927年8月2日一模一样。我所知道的就是，在这个问题上努力工作了数年之久，我突然认识到，如果我将放大器的输出反相馈入到其输入端，使放大器远离振荡（当时我们称这种现象为‘唱歌’），将会得到衷心期望的结果：在输出端消除失真的方法。我打开早晨的报纸，在《纽约时报》的一个版面上绘制了负反馈放大器的简单图表，以及带有反馈作用的信号放大方程。我在方案上签署了自己的名字，20分钟之后，当我到达位于West Street 463号的实验室，该方案已经被证实是可行的，也被大家所理解，也被后来的Earl C. Bleassing签署批准。

我预见到该电路将带来完全线性的放大器（负反馈深度达40～50dB），但是存在一个重要问题：当多数人怀疑该电路的宽频带稳定性时，我怎么能够确信它一定会避免宽频带自激振荡？我的自信源于我在多种新颖振荡电路上的两年辛勤工作，包括滤波器在内的终端电路设计上的三年辛苦工作，以及载波电话系统短途付费电路的数学研究工作。”



（a）原理框图



（b）1937年授权的Black的2102671号美国专利摘录

图11-2 Black想象的经典单输入、单输出控制环路

典型闭环负反馈系统的通常实现方法如图11-3所示。举例来说，该图表中的“系统（plant）”可能代表语音放大器中的功率电路之类的电路。一个精心设计的控制系统，在面对系统模型中的外部干扰和不确定性时，可以将其输出保持在期望水平。反馈系统的目标是强

① Harold Black的论文“Inventing the Negative Feedback Amplifier”，*IEEE Spectrum*，1977年10月，pp. 55-60。并请参见Harold Black的2102671号美国专利“Wave Translation System”，1932年4月22日提出申请，1937年12月21日授予专利权，以及Black的早期论文“Stabilized Feed-Back Amplifiers”，*Bell System Technical Journal*，1934年。

迫其输出跟踪输入的变化，也可能带有增益和频响整形特性。

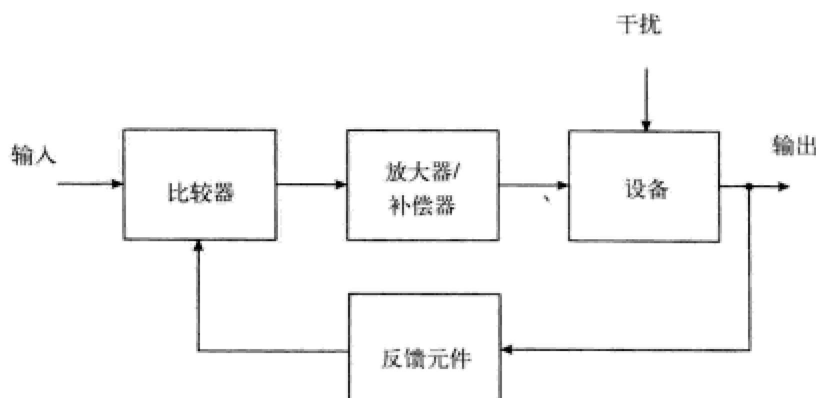


图11-3 典型反馈系统，标明了各个模块的功能

在该电路结构中，输出信号反馈到输入端，与期望输入进行比较。输出信号和输入信号之间的差异成分被放大，施加到系统的输入端。

为了设计一个成功的反馈系统，必须解决下列几个问题。

- 首先，多数系统在没有事先定义好传递函数的情况下，如何生成能量系统模型？
- 一旦得到系统模型，如何将环路关闭，以得到期望增益和带宽的稳定系统？

11.3 控制系统基础

Black想象的经典反馈环路如图11-4所示。可以看到，该系统存在外部干扰，干扰电压为v_d。

在该系统中，a表示前向通路增益，f表示反馈增益。前向增益a与反馈因子f可能具有频率相关性（这样的话，系统应表示为$a(s)$），但是出于标记简单性的考虑，我们省略掉了拉普拉斯变量s。

起始阶段，我们将外部干扰v_d设置为零。误差项v_e为输入信号与输出反馈分量之间的差异。我们可以使用该结果来求解其传递函数。

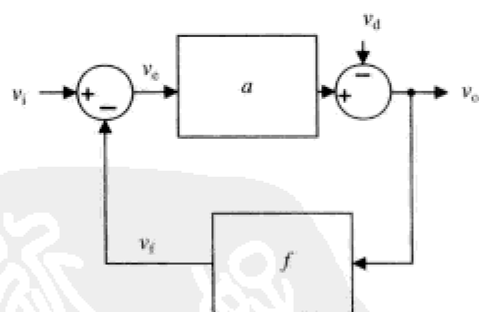


图11-4 经典单输入、单输出控制环路，输入电压v_i、输出电压v_o、外部干扰v_d

$$\begin{aligned} v_o &= av_e \\ v_e &= v_i - v_f \\ v_f &= fv_o \end{aligned} \tag{11-1}$$

闭环增益为（$A \equiv$闭环增益）

$$A = \frac{v_o}{v_i} = \frac{a}{1+af} \tag{11-2}$$

或

$$A = \frac{a}{1-af} \tag{11-3}$$

注意，限定af>>1，会发生什么情况。

$$A \approx \frac{1}{f} \tag{11-4}$$

这就是设计一个成功反馈系统的关键：如果能够保证在关注频段内af>>1，那么设计的闭环增益就与系统的增益细节$a(s)$无关。该结论非常有用，这是因为在有些情况下，反馈函数f可以使用简单的电阻分压器来实现……这种实现方案既便宜又精确。

11.4 环路传输与干扰抑制

增益方程的分母项为$1+af$，这里的$-af$项被称为环路传输函数（loop transmission，$L.T.$）。该项是整个反馈环路的增益。通过一个思想实验，可以来求解$L.T.$的大小（$-af$）：在某个电路节点将反馈环路切断，注入一个输入信号，找出切断节点的输出信号。围绕环路的增益就是环路传输函数。

现在，我们来求解从干扰输入到输出的增益。

$$\frac{v_o}{v_d} = \frac{1}{1+af} = \frac{1}{1-L.T.} \tag{11-5}$$

可以看到，如果关注频段的环路传输很大，那么干扰造成的输出将会很小。（$1+af$）项被称为系统的*倒灵敏度*（desensitivity）。我们来理解为什么前向通路增益a的变化只会导致闭环增益A发生微小变化。

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{1+af} \\ \frac{dA}{da} &= \frac{(1+af)-af}{(1+af)^2} = \left(\frac{1}{1+af}\right)\left(\frac{1}{1+af}\right) = \frac{A}{a}\left(\frac{1}{1+af}\right) \\ \therefore \frac{dA}{A} &= \frac{da}{a}\left(\frac{1}{1+af}\right) \end{aligned} \tag{11-6}$$

该结果意味着，如果af>>1，那么闭环增益的微小变化（dA/A）将远远小于前向通路增益的微小变化（da/a）。

我们可以对大环路传输极限和小环路传输极限做一些近似处理。对于大环路传输，即af>>1，前面已经给出了结果，闭环增益$A \approx 1/f$。对于小环路传输，即af<<1，闭环增益近似为$a(s)$。如果我们在同一个坐标轴系中绘制$a(s)$和$1/f$曲线，可以得到闭环增益的近似曲线，即底部的两条曲线，如图11-5所示。

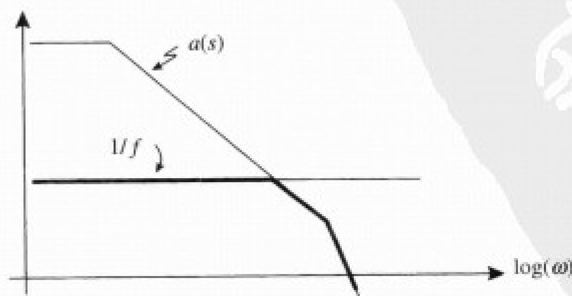


图11-5 图表法估计闭环传递函数的曲线图。曲线$a(s)$描述前向通路增益的频率相关性。曲线$1/f$为反馈增益的倒数，这里标出的电阻性反馈。粗实线代表我们的闭环传递函数估计。对于$a(s)f$>>1，闭环增益近似为$1/f$。对于$a(s)f$<<1，闭环增益近似为$a(s)$

11.5　稳定性

到目前为止，我们尚未讨论闭环系统稳定性的相关问题。文献中有许多稳定性定义，但是我们将考虑“BIBO”稳定性。换句话说，我们将只考虑用有边界输入激励系统的稳定性问题。如果有边界的输入产生有边界的输出，我们则称系统为BIBO（bounded input, bounded output）稳定，如果系统的所有极点都位于左半平面，则这是满足BIBO稳定的一个条件（如图11-6所示）。

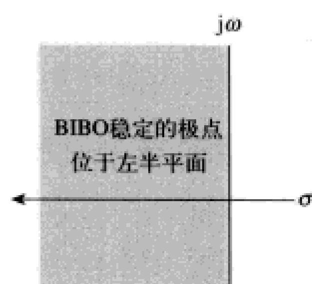


图11-6　有边界输入－有边界输出（BIBO）稳定系统的闭环极点位置在左半平面

考虑一阶系统和单位反馈增益的反馈系统（如图11-7所示）。输入/输出传递函数为

$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{A/s}{A/s+1}=\frac{A}{s+A}=\frac{1}{\frac{s}{A}+1} \tag{11-7}$$

可以看到，随着前向通路增益A增大，闭环带宽也同时增大，闭环极点在实轴上$s=-A$的位置。只要A为正数，则不管A为任何值，系统都是BIBO稳定的。

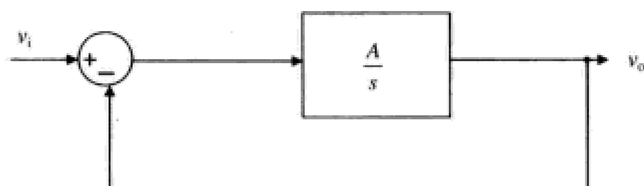


图11-7　一阶系统，在负反馈环路有一个积分器

使用传递函数，也很容易推导二阶系统（如图11-8a所示）。

$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{\frac{K}{(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)}}{1+\frac{K}{(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)}}=\frac{K}{K+(\tau_a s+1)(\tau_b s+1)}=\left(\frac{K}{K+1}\right)\frac{1}{\left(\frac{\tau_a\tau_b}{1+K}\right)s^2+\left(\frac{\tau_a+\tau_b}{1+K}\right)s+1} \tag{11-8}$$

极点位置绘制在图11-8b中，给出了闭环极点随K增长的轨迹。注意，在直流开环增益（小闭环直流误差）和环路稳定性之间的基本折中考虑。对于K接近无限大时，闭环极点极度欠阻尼。

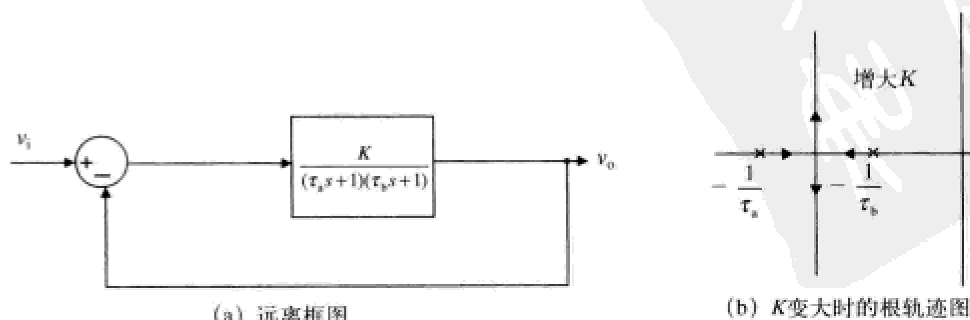


图11-8　带有负反馈回路的二阶系统

11.6 劳斯稳定性准则

劳斯判据（Routh test）是一种数学测试，常用来确定特征方程有多少个根位于s右半平面。使用劳斯判据时，我们并不计算根的位置——只是确定是否存在右半平面的根，而不计算它们的位置。

使用劳斯判据的过程如下：

- 写出系统的特征多项式（characteristic polynomial）

$$1-L.T.=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n \tag{11-9}$$

注意，既然我们已经写出了特征多项式（$1-L.T.$），现在，我们关心（$1-L.T.$）是否存在右半平面的零点。（$1-L.T.$）的右半平面零点对应于系统存在右半平面的闭环极点。并且，我们还假设$a_n\neq0$，以方便继续进行分析。

- 接下来，我们观察特征多项式是否有系数为零，或者系数的符号不一致[①]。稳定性的必要条件（而非充分条件）在于，特征方程不存在非零系数，并且所有系数的符号相同。
- 如果所有系数具有相同的符号，接下来，我们按照如下的行列式模式组成一个矩阵，图中所示矩阵形式的n为偶数[②]。矩阵表按照水平、竖直方式进行填充，直至行中出现零元素。第三行以及随后行中的元素从前两行计算得到。

$$\begin{matrix} a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1} \\ b_2 &= \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1} \\ b_3 &= \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_6-a_0a_7}{a_1} \\ c_1 &= \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1} \\ c_2 &= \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{a_5b_1-a_1b_3}{b_1} \end{aligned} \tag{11-10}$$

- 右半平面的极点数目等于劳斯矩阵第一列中的元素的符号改变的数目。

① 均为正或者均为负，称为符号一致。——译者注

② N为奇数时，a_n成为第二行的最后一个元素。

下面我们来对式（11-11）所示的传递函数进行劳斯测试。

$$H(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s-2)}=\frac{1}{s^4+4s^3-s^2-16s-12} \tag{11-11}$$

对于该传递函数，我们已经知道它存在一个右半平面极点，$s=+2\text{rad/s}$，不过我们要使用劳斯判据来验证这一点。该传递函数的劳斯矩阵为

$$\begin{matrix} 1 & -1 & -12 & 0 \\ 4 & -16 & 0 & 0 \\ \left(\dfrac{-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & -16\end{vmatrix}}{-1}=-12\right) & \left(\dfrac{-\begin{vmatrix}1 & -12\\ 4 & 0\end{vmatrix}}{-1}=48\right) & \left(\dfrac{-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 0\end{vmatrix}}{-1}=0\right) & 0 \\ \left(\dfrac{-\begin{vmatrix}4 & -16\\ -12 & 48\end{vmatrix}}{-12}=0\right) & \left(\dfrac{-\begin{vmatrix}4 & 0\\ -12 & 0\end{vmatrix}}{-12}=0\right) & 0 & 0 \end{matrix} \tag{11-12}$$

我们看到第一列的元素符号改变了一次，矩阵的元素从+4变为−12。因此，存在一个右半平面极点，与预计一致。

接下来，我们使用劳斯判据来分析一个三极点系统，该系统在单位增益反馈环路内存在三个极点（如图11-9所示）。我们将使用劳斯判据来确定K的取值，K的这些取值能够保证反馈环路稳定工作。该系统的闭环传递函数为

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)}=\frac{\dfrac{K}{(s+1)^3}}{\dfrac{K}{1+(s+1)^3}}=\left(\frac{K}{1+K}\right)\left(\frac{1}{\dfrac{s^3}{K+1}+\dfrac{3s^2}{K+1}+\dfrac{3s}{1+K}+1}\right) \tag{11-13}$$

其分母多项式为

$$D(s)=a_0s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=\left(\frac{1}{K+1}\right)s^3+\left(\frac{3}{K+1}\right)s^2+\left(\frac{3}{K+1}\right)s+1 \tag{11-14}$$

其劳斯矩阵为

$$\begin{matrix} \left(\dfrac{1}{1+K}\right) & \left(\dfrac{3}{1+K}\right) \\ \left(\dfrac{3}{1+K}\right) & 1 \\ \dfrac{\left(\dfrac{3}{1+K}\right)^2-\left(\dfrac{1}{1+K}\right)}{1+K}=\dfrac{8-K}{(1+K)^2} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \tag{11-15}$$

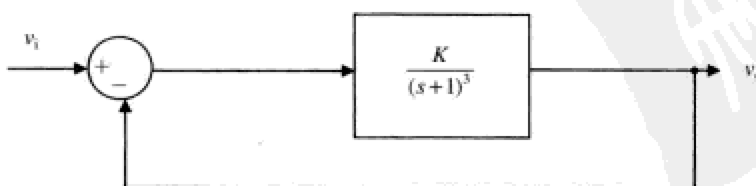


图11-9　单位反馈环内存在三个极点的反馈系统

可以看到，如果$K>8$，则矩阵第一列元素存在两次符号变化。因此，$K=8$时，我们预计有两个极点在$j\omega$轴上，$K>8$时，有两个极点位于右半平面，系统不稳定。如果$K<8$，所有极点均在左半平面，系统稳定。

11.7 相位裕度与增益裕度测试

前面的分析告诉我们闭环系统的带宽和直流增益大小，不过并没有考虑系统是否振荡或者是否存在严重过冲的问题。使用简单波德曲线图技术和*相位裕度方法*（phase margin method）可以确定反馈系统的相对稳定性。相位裕度方法是一个极其有用的反馈系统稳定性测量技术。求解负反馈系统相位裕度的步骤如下（如图11-10所示）：

- 绘制环路传输曲线，即$-a(s)f(s)$的幅度曲线与相位曲线。
- 求解$a(s)f(s)$的幅度下降到+1时的频率。此即*截止频率*（crossover frequency）ω_c。
- 截止频率点ω_c处的相位与-180°的差即为*相位裕度*（phase margin）ϕ_m。
- *增益裕度*（gain margin，*G.M.*）定义为导致系统不稳定的开环增益变化。系统的增益裕度越大，在闭环进入不稳定状态之前，能够忍受的系统参数变化也越大。
- *相位裕度*定义为导致闭环系统不稳定的开环相位移动的负向变化。
- 通常，一个优化设计的反馈环路的相位裕度至少为45°，增益裕度（*G.M.*）在3倍以上。

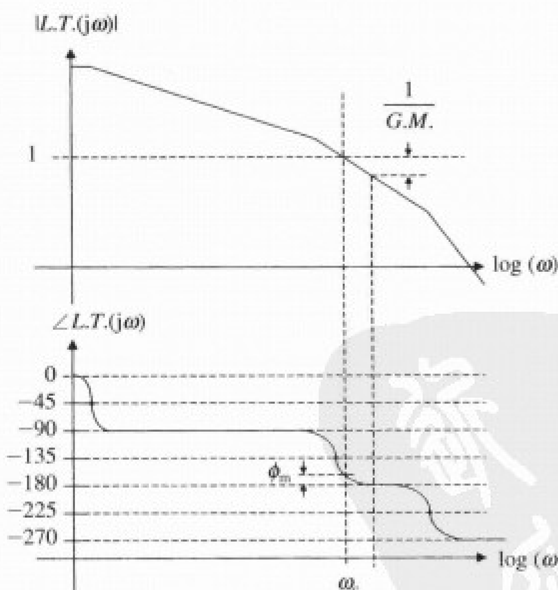


图11-10 增益裕度和相位裕度曲线

11.8 阻尼系数和相位裕度的关系

阻尼系数和相位裕度直接相关。对二阶系统而言，低的相位裕度通常暗示系统存在一个低阻尼系数。对于阻尼系数<0.6的标准二阶系统，两者的相关关系近似为

$$\zeta \approx \frac{\phi_m}{100} \tag{11-16}$$

也就是说，0.6的阻尼系数对应于60°的相位裕度。阻尼系数ζ在0~2之间变化时，两者之间的

真实相关关系如图11-11所示。

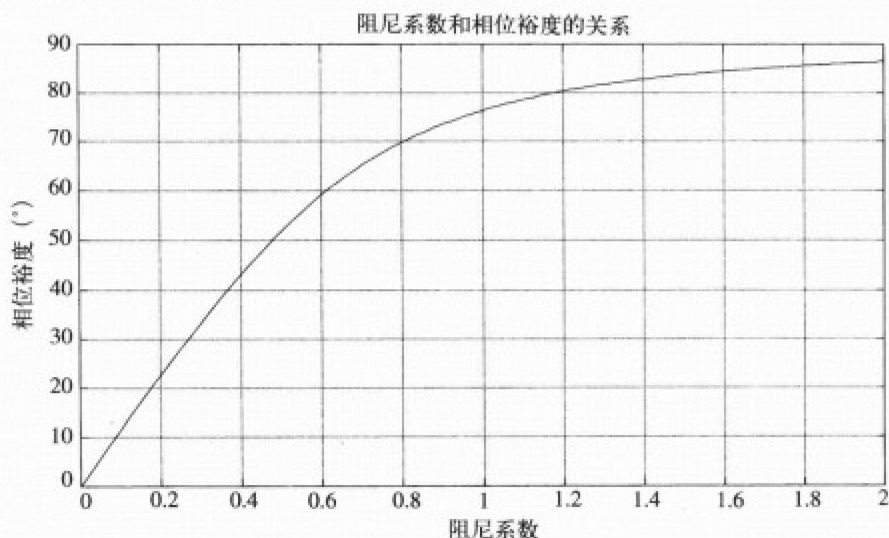
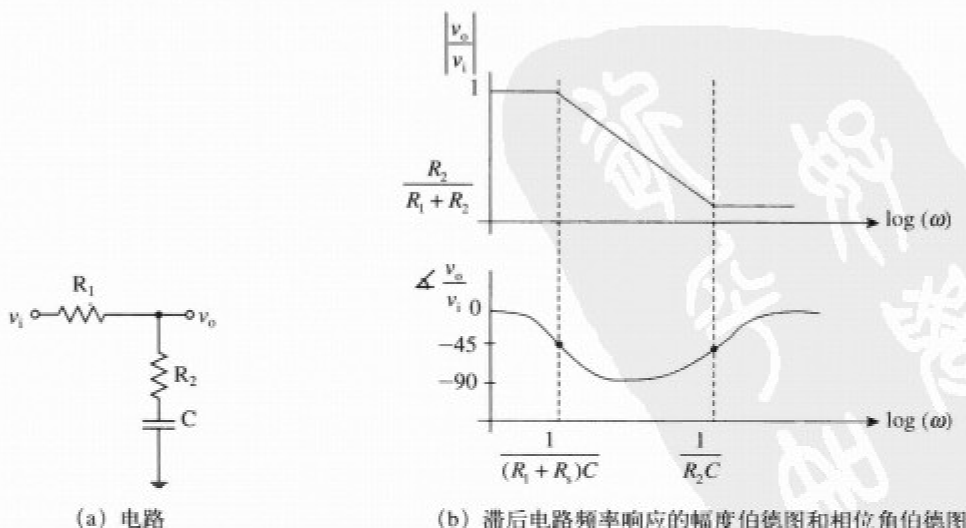


图11-11　相位裕度和阻尼系数的相关关系曲线

11.9　环路补偿技术——超前电路与滞后电路

有多种电路可以用来进行反馈网络补偿。这些电路可以串联地加入系统来改变闭环传递函数的特性，也可以放置在反馈系统的其他位置。下面来快速浏览“超前（lead）”电路和“滞后（lag）”电路。

滞后电路（如图11-12a所示）常用来降低环路传输的增益，以使截止发生在有利的频率点。滞后电路的传递函数为



（a）电路　　（b）滞后电路频率响应的幅度伯德图和相位角伯德图

图11-12　滞后电路

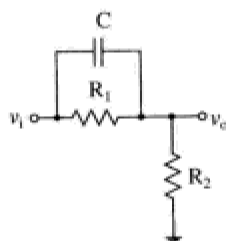
$$H(s)=\frac{v_o(s)}{v_i(s)}=\frac{R_2Cs+1}{(R_1+R_2)Cs+1}=\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}$$
$$\alpha=\frac{R_1+R_2}{R_2} \tag{11-17}$$
$$\tau=R_2C$$

滞后电路的伯德图（如图11-12b所示）表明，电路使极点和零点频率段的幅度响应降低。当使用滞后电路时，通常要使滞后电路的零点紧贴环路截止频率的下面。这样可以确保滞后电路不会在截止频率点造成过度的负相位移动。

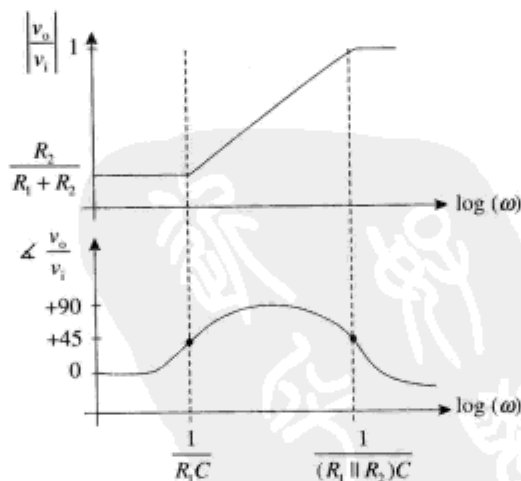
超前电路（如图11-13a所示）则用来在截止频率附近提供正向相位移动。超前电路的传递函数为

$$H(s)=\frac{v_o(s)}{v_i(s)}=\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\left(\frac{R_1Cs+1}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}Cs+1}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha\tau s+1}{\tau s+1}$$
$$\alpha=\frac{R_1+R_2}{R_2} \tag{11-18}$$
$$\tau=(R_1\|R_2)C$$

超前电路的伯德图（如图11-13b所示）表明，在零点频率处提供了+45°的正向相位移动（即超前相位），同时，在零点处的增益只增加了3dB。当使用超前电路时，通常要将超前电路的零点放置在环路截止频率的附近，以充分利用其提供的正向相位移动。超前电路的极点则位于截止频率的上面。



（a）电路



（b）超前电路频率响应的幅度伯德图和相位角伯德图

图11-13 超前电路

11.10 反馈环路简介

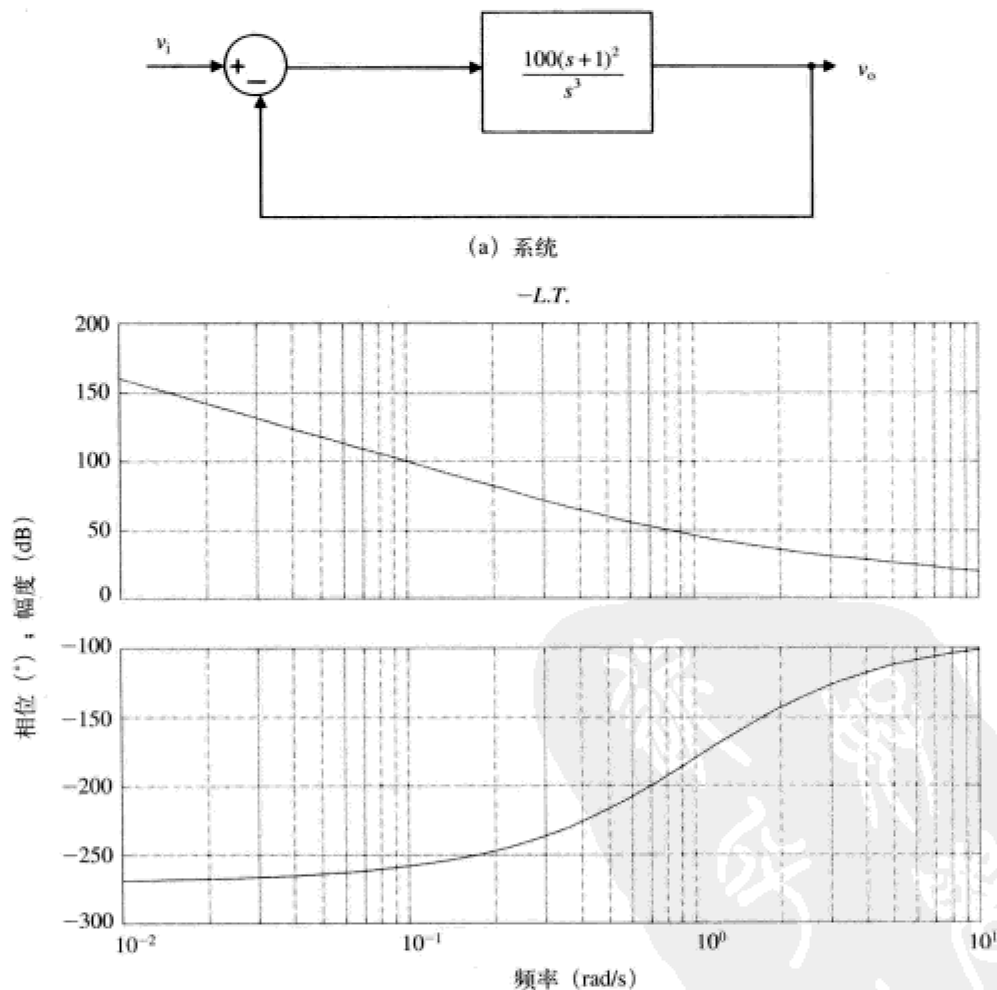
好奇的同学可能会怀疑，如果一个系统的环路传输幅度大于单位1，并且该频段的环路传输相位角为−180°，那么该系统能否稳定呢。使用增益裕度和相位裕度过程中，我们观察幅

度降至单位1的频率点，而不考虑其他频率点的特性。举例来说，下面我们将会演示一个系统，它的环路传输幅度大于单位1，其环路传输相位角为−180°，这是个稳定系统。显然这不是个直观结果，但是我们将想方设法来推导该结果。考虑如图11-14a所示系统，它是个单位反馈系统，前向通路上有2个零点和3个极点。

该系统的负的环路传输函数（$-L.T.$）为

$$-L.T.=\frac{100(s+1)^2}{s^3} \tag{11-19}$$

负的环路传输函数（$-L.T.$）的伯德图如图11-14b所示。可以看到，在负的环路传输函数（$-L.T.$）的相位角为−180°的频率点处，其环路传输幅度大于单位1。在这种情况下，相位角小于−180°频率段一直延伸至1rad/s以上。



（a）系统

（b）$-L.T.$的伯德图表明，幅度大于1处的相位角小于−180°

图11-14　环路传输相位角为−180°的频率点处，其环路传输幅度大于1的单位反馈系统

接下来，我们使用劳斯判据来确定该系统的稳定性。该系统的闭环传递函数为

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)}=\frac{\dfrac{100(s+1)^2}{s^3}}{1+\dfrac{100(s+1)^2}{s^3}}=\frac{100(s^2+2s+1)}{s^3+100s^2+200s+100} \tag{11-20}$$

我们可以使用劳斯判据，或者我们可以计算该传递函数的分母来确定其稳定性。传递函数的分母多项式为

$$D(s) = s^3 + 100s^2 + 200s + 100 \tag{11-21}$$

其劳斯矩阵如下

$$\begin{array}{cc} 1 & 200 \\ 100 & 100 \\ \dfrac{(100)(200)-(1)(100)}{100} = 199 & 0 \\ \dfrac{(199)(100)-(100)(0)}{199} = 100 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \tag{11-22}$$

劳斯判据表明，劳斯矩阵的第一列元素不存在符号变化，因此该系统是BIBO稳定的。数值分析表明，该系统的闭环极点和零点为：

零点	2个零点均位于−1 rad/s处
极点	3个极点分别位于−97.97 rad/s、−1.12 rad/s和−0.92rad/s处

因此，所有极点都位于s的左半平面上，系统是BIBO稳定的。闭环阶跃响应（如图11-15所示）也证实该系统是稳定的。当系统下降到单位增益时，可以看到阶跃响应存在很长的衰减尾巴。这个长尾巴是极点和零点相距很近[①]的系统的特征。

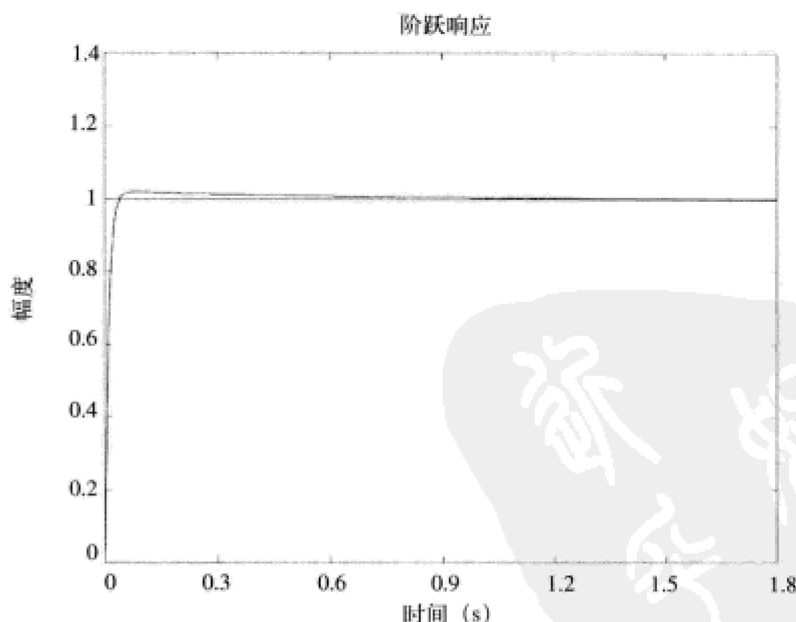


图11-15 单位反馈系统的阶跃响应，环路传输相位角为−180°处的环路传输幅度大于单位1

例题11.1：+1倍增益放大器

考虑这样一个运算放大器，它的直流增益为10^5，低频极点为10rad/s，高频极点为10^6rad/s。该传递函数$a(s)$是许多商用运算放大器的典型代表，可以表述为

$$a(s) = \frac{10^5}{(0.1s+1)(10^{-6}s+1)} \tag{11-23}$$

① 也称为极点/零点“对偶对（doublet）”。

当该运算放大器配置为+1倍增益放大器时，带宽为多大？上升时间又为多少？

如图11-16所示是前向通路增益$a(s)$的伯德图。可以看到，其直流增益为10^5(100dB)，相位从0°开始，在频率大于10^6rad/s的频率段（大于第二极点）渐进地下降至−180°。

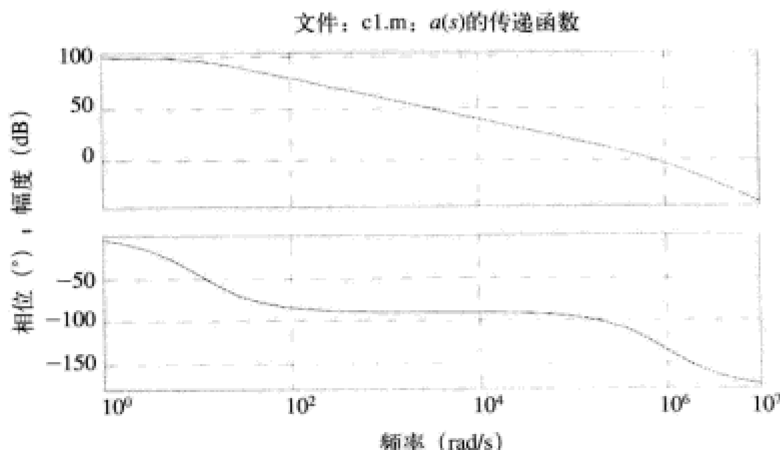


图11-16　例题11.1和例题11.2的开环传递函数的频率响应

+1倍增益运算放大器电路如图11-17a所示，运算放大器具有单位增益反馈。该电路的原理图如图11-17b所示。

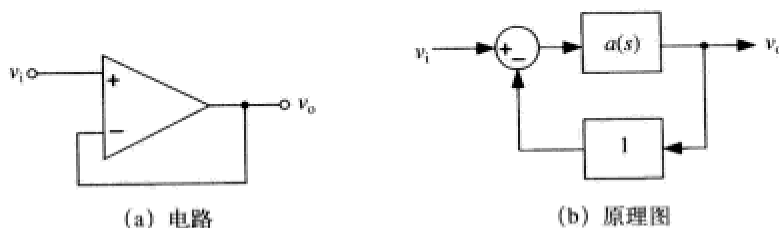


图11-17　+1倍增益运算放大器电路

该电路的负的环路传输函数（−L. T.）为

$$-L.T.=a(s)f=\frac{10^5}{(0.1s+1)(10^{-6}s+1)} \tag{11-24}$$

它与运算放大器a (s)的开环传递函数相同。使用MATLAB计算其带宽和相位裕度，其结果如图11-18所示。结果表明，该电路具有52°的相位裕度，截止频率为786150 rad/s（125kHz）。从该分析出发，我们预计电路的阶跃响应有一定量的过冲（因为相位裕度形成的阻尼系数约为0.5），频率响应有一定量的过冲，10%～90%上升时间[①]约为0.35/125 000＝2.8μs（如图11-19所示）。

例题11.2：+10倍增益放大器

当同样的运算放大器设计为+10倍增益放大器时，其带宽和上升时间又为多少呢？+10倍增益运算放大器的电路如图11-20a所示，其原理图如图11-20b所示。注意，9R/R分压器给定反馈因子f＝0.1。

① 通常，10%~90%上升时间的估计公式为$0.35/f_c$，这里f_c是以Hz为单位的截止频率。

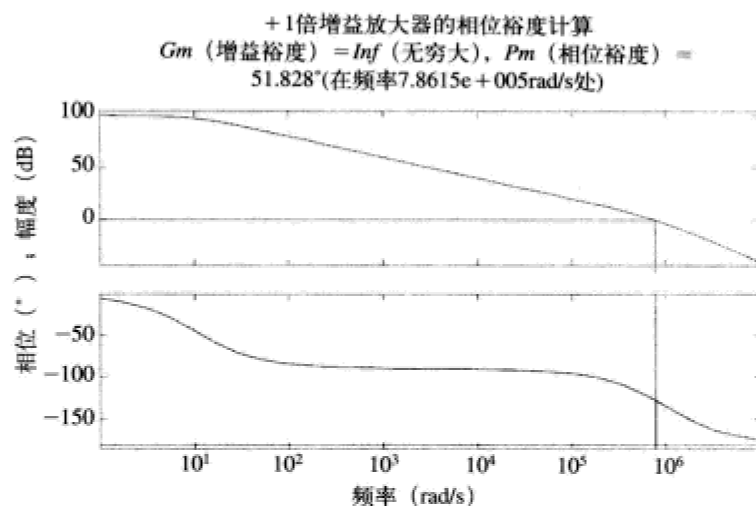


图11-18　+1倍增益运算放大器的相位裕度和带宽计算

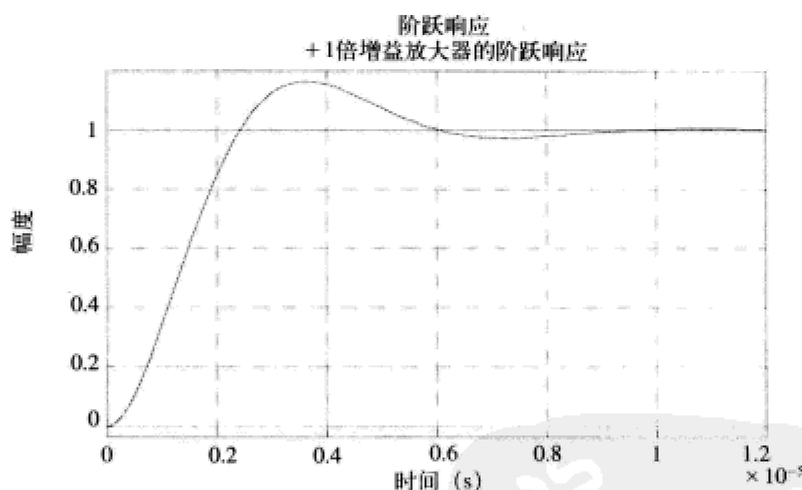


图11-19　+1倍增益放大器的阶跃响应

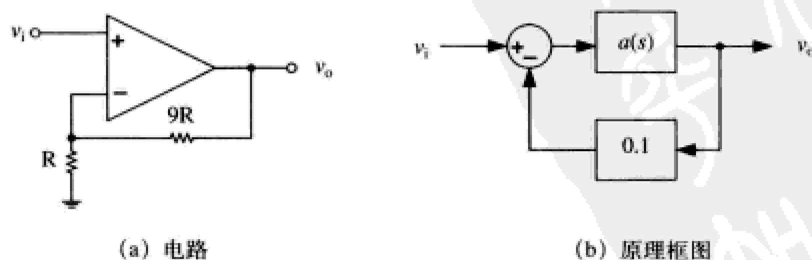


图11-20　+10倍增益运算放大器电路

对于该电路，其负的环路传输函数（$-L.T.$）为

$$-L.T. = a(s)f = \frac{10^4}{(0.1s+1)(10^{-6}s+1)} \tag{11-25}$$

当我们绘制出环路传输频率响应的幅度和相位曲线时（如图11-21所示），结果表明，相

位裕度为84°，截止频率为99 509rad/s（15.8kHz）。从该分析出发，我们可以预计，阶跃响应不会出现过冲（因为相位裕度接近90°），10%～90%上升时间约为0.35/15 800＝22μs，如图11-22所示。因此，该系统的阻尼特性非常好，阶跃响应不存在过冲现象（如图11-23所示）。

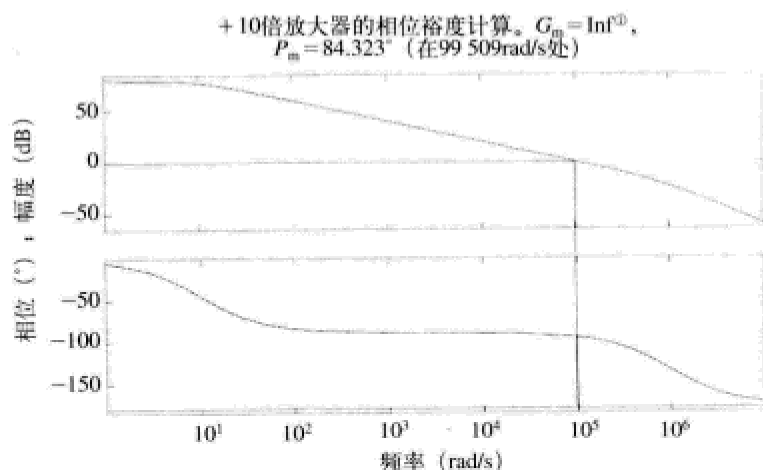


图11-21　+10倍运算放大器电路的相位裕度和带宽计算

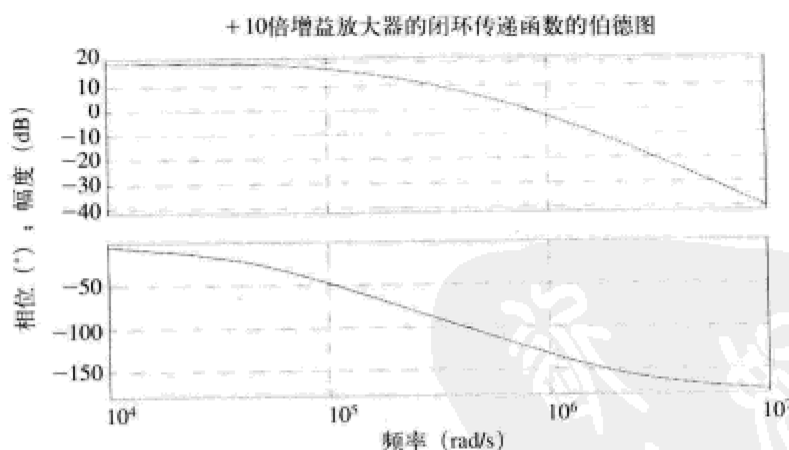


图11-22　+10倍增益放大器的闭环传递函数的伯德图

例题11.3：电抗性负载的积分控制

考虑运算放大器驱动电抗性负载的电路，如图11-24所示。假设运算放大器的特性是理想的，具有无限带宽，可以馈出和吸入无限大的电流。给定这些条件，其传递函数为

$$H(s)=\frac{v_o(s)}{v_i(s)}=\frac{1}{LCs^2+\frac{L}{R}s+1}=\frac{1}{10^{-10}s^2+10^{-6}s+1} \tag{11-26}$$

① Inf表示无限大。——译者注

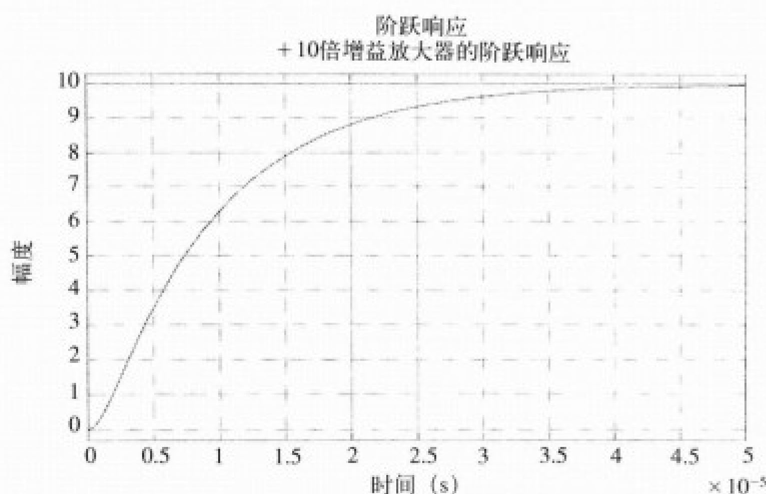


图11-23 +10倍增益放大器的阶跃响应

这个二阶电抗性负载电路的$H(s)$具有如下参数：

- 极点：$-5\times10^3\pm9.99\times10^4$j
- 阻尼系数：0.05
- $Z_0=1\Omega$
- Q：10

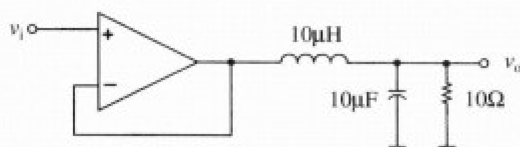


图11-24 理想运算放大器驱动电抗性负载电路

绘制该传递函数$H(s)$的伯德图，我们可以看到其频率响应是欠阻尼的，如图11-25所示。

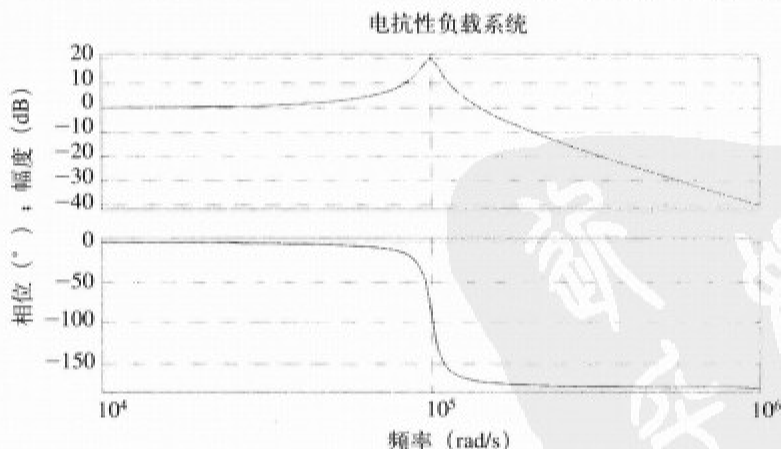


图11-25 电抗性负载系统伯德图

在该例中，我们将设计一个闭环控制器来对输出电压进行校准（如图11-26所示）。我们假设前向通路补偿器$G_c(s)$包含一个积分器，以使输出电压v_o的直流误差为零[①]。

作为首次尝试，我们来试验式（11-27）所式的补偿器传递函数

$$G_c(s)=\frac{4\times10^3}{s} \tag{11-27}$$

① 在$G_c(s)$包含一个积分器可以确保环路的直流误差为零。如果存在直流误差，积分器一直积分下去直至无穷大。因此，直流误差必须为零。

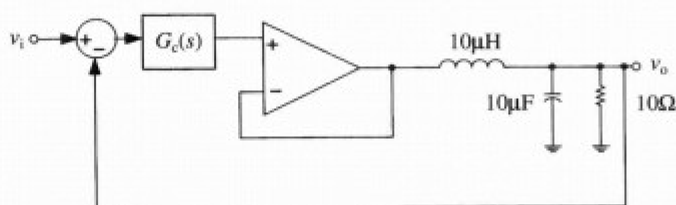


图11-26 例题11.3的闭环控制器

负的环路传输函数（$-L.T.$）为

$$-L.T.=\left(\frac{1}{10^{-10}s^2+10^{-6}s+1}\right)\left(\frac{4\times 10^3}{s}\right) \tag{11-28}$$

绘制环路传输的幅度和相位伯德图得到一些有趣的结果，如图11-27所示。

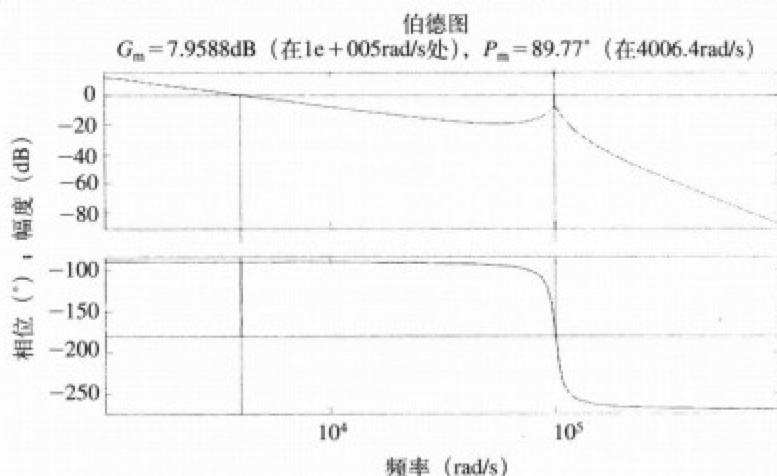


图11-27 尝试#1环路传输的幅度和相位伯德图，表明截止频率为4006rad/s，相位裕度为89.8°

尝试#1环路传输的结果如下。

- 截止频率：4006rad/s（637Hz）
- 相位裕度：90°
- 给定这些参数，我们预计它是个良好受控的阶跃响应，上升时间约为0.5ms。

推导出来的闭环系统阶跃响应如图11-28所示。

除了上升沿的振荡行为之外，控制器看起来是很好的。这里到底出现了什么问题呢？环路传输的相位和幅度伯德图告诉了我们答案。尽管该系统的相位裕度很充裕，但是增益裕度不是很理想，这是因为传递函数存在欠阻尼极点对。为了帮助解决这个振荡问题，我们需要尝试着在截止频率上面增加一个极点，以对欠阻尼极点对进行阻尼控制。我们尝试着增加极点5×10^4rad/s以对10^5rad/s处的复极点对进行阻尼控制，这导致

$$G_c(s)=\left(\frac{4\times 10^3}{s}\right)\left(\frac{1}{2\times 10^{-5}s+1}\right) \tag{11-29}$$

截止频率和相位裕度的MATLAB测试结果如图11-29所示。可以看到，增加低通滤波器之后，我们大幅度提升了该电路的增益裕度。结果如下。

- 截止频率：3993rad/s（635Hz）
- 相位裕度：85°

• 行为良好的阶跃响应，如图11-30所示。

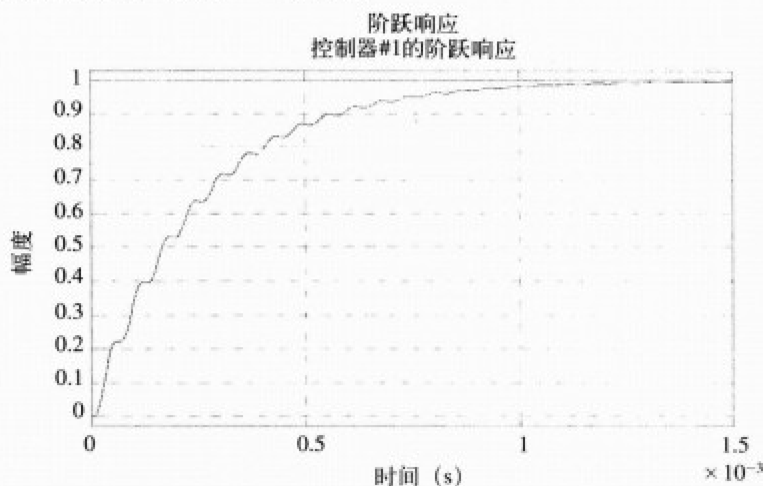


图11-28 尝试#1的阶跃响应

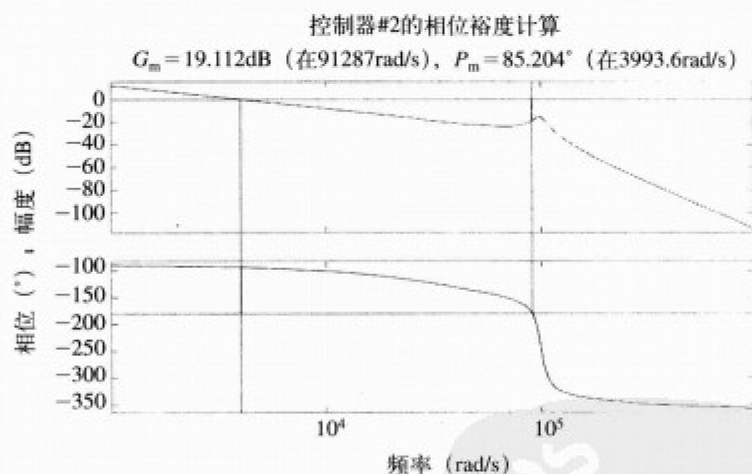


图11-29 尝试#2环路传输的幅度与相位伯德图，表明截止频率为3993rad/s，相位裕度为85°

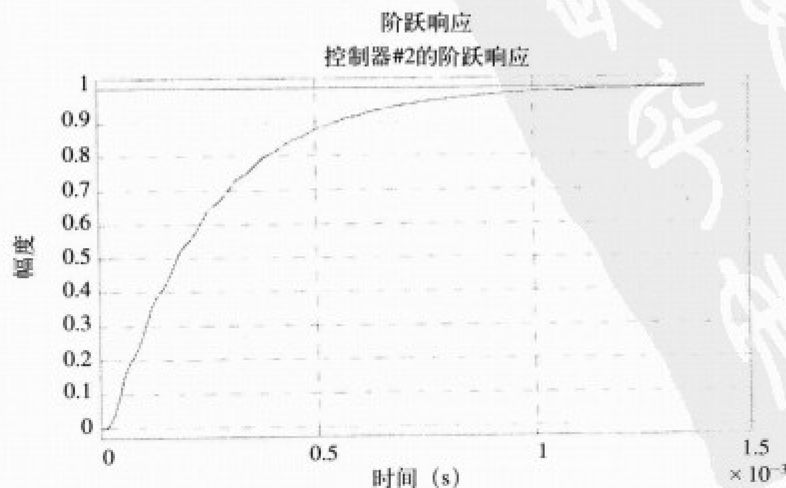


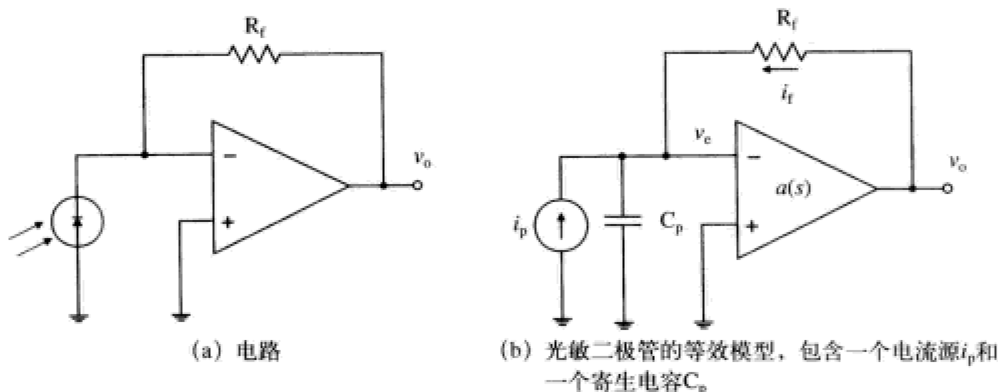
图11-30 尝试#2的阶跃响应

例题11.4：光敏二极管放大器

光敏二极管放大器（photodiode amplifier）如图11-31a所示。光敏二极管输出与照射光线强度成比例的电流，运算放大器的跨阻（transimpedance）将光敏二极管的输出电流转换为输出电压。输入－输出的理想传递函数为

$$\frac{v_o}{i_p} = -R_f \tag{11-30}$$

对该电路进行建模，光敏二极管可以建模为一个电流源与一个寄生电容C_p的并联，如图11-31b所示。



（a）电路　（b）光敏二极管的等效模型，包含一个电流源i_p和一个寄生电容C_p

图11-31　光敏二极管放大器

该系统的原理框图如图11-32所示。

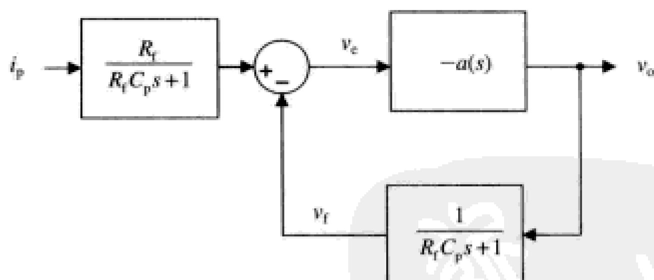


图11-32　光敏二极管的原理框图。组件$a(s)$为运算放大器的增益

该系统的闭环传递函数为

$$\frac{v_o}{i_p} = -\frac{R_f}{R_f C_p s+1}\left(\frac{a(s)}{1+\dfrac{a(s)}{R_f C_p s+1}}\right) \tag{11-31}$$

可以看到，如果环路传输远远大于1，近似传递函数为$-R_f$。通过简单观察可以发现，该系统的环路传输函数为

$$-L.T. = \frac{a(s)}{R_f C_p s+1} \tag{11-32}$$

运算放大器通常有一个主导极点，和一个位于截止频率附近的第二极点，得

$$-L.T. = \frac{a_0}{s(\tau s+1)(R_f C_p s+1)} \tag{11-33}$$

这意味着，环路传输至少存在3个极点。如果我们试着关闭带宽大于$1/R_f C_p$的反馈环路，

将存在影响稳定性的潜在问题。

使用CLC426运算放大器，搭建一个真实系统的模型（如图11-33所示），包含主控极点，第二极点，以及输出电阻。

该电路的寄生元素如下：

- L_{cable}：连接光敏二极管与印制电路板的电缆的电感。每厘米电缆的近似电感为10nH。所有仿真都使用50nH的电感取值。
- L_{pr}：反馈电阻的串联电感。约为10nH。
- L_{pc}：反馈电容的串联电感。约为5nH。
- C_p：光敏二极管电容。约为60pF。
- C_{in}：运算放大器的输入电容。约为5pF。

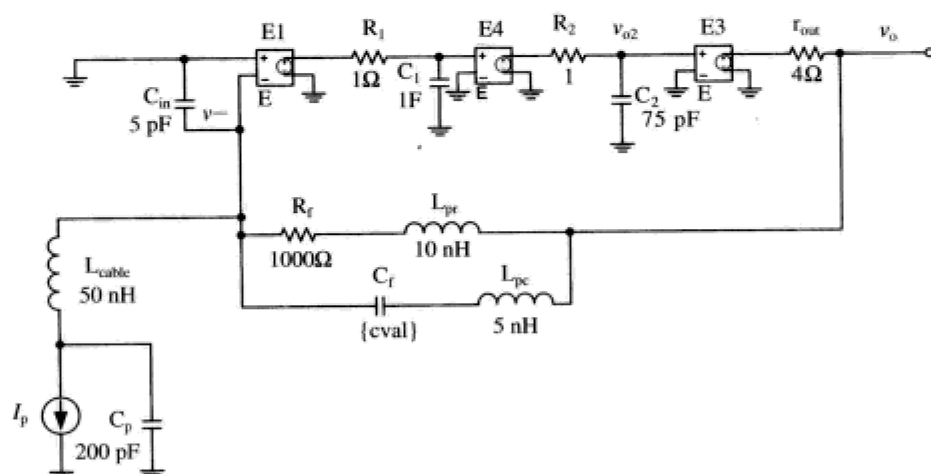


图11-33 光敏二极管放大器模型

反馈环路中R_fC_p组合产生的极点导致存在潜在的不稳定问题。图11-34是原始电路的v_o/i_p

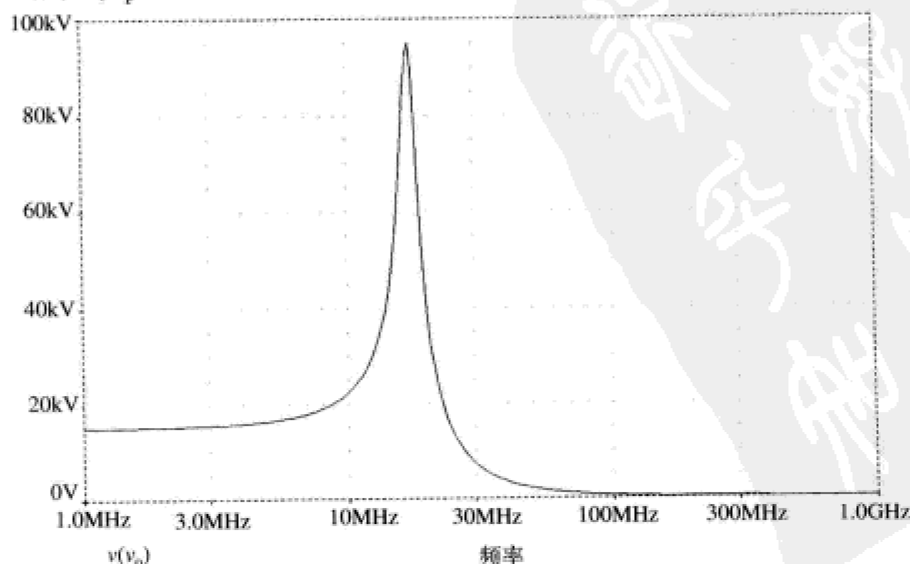
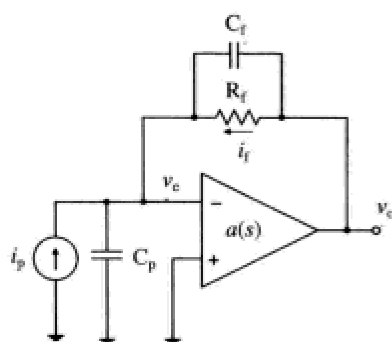


图11-34 光敏二极管放大器的频率响应仿真结果。表明在15MHz附近存在潜在的不稳定问题

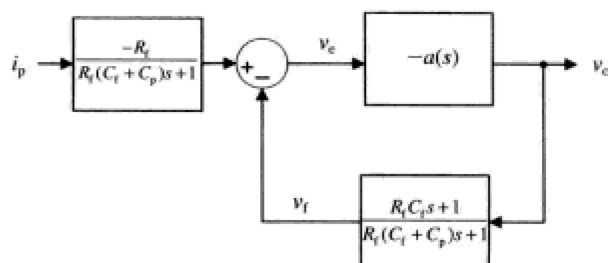
的频率响应曲线，$R_f=15\text{k}\Omega$，表明该响应存在严重的欠阻尼现象。其他未建模极点将会产生振荡。

增加一个电容，跨接在反馈电阻的两端，搭建一个超前传递函数，如图11-35所示。增加的超前电路零点可以在截止频率附近产生正向相位移动，这也就提升了系统的稳定性。反馈因子为

$$f(s)=\frac{\dfrac{1}{C_p s}}{\dfrac{1}{C_p s}+\dfrac{R_f}{R_f C_f s+1}}=\frac{1}{1+\dfrac{R_f C_p s}{R_f C_f s+1}}=\frac{R_f C_f s+1}{R_f(C_f+C_p)s+1} \tag{11-34}$$



(a) 电路



(b) 原理框图

图11-35　超前补偿光敏二极管放大器

再次仿真时，R_f改为1kΩ，C_f在2～10pF之间可调。结果（如图11-36所示）表明，适当调节C_f，放大器的带宽可以达到50MHz左右。当然，这与仿真的准确程度有关。需要搭建原型电路系统进行实地测量以验证或者推翻这些电路模型。

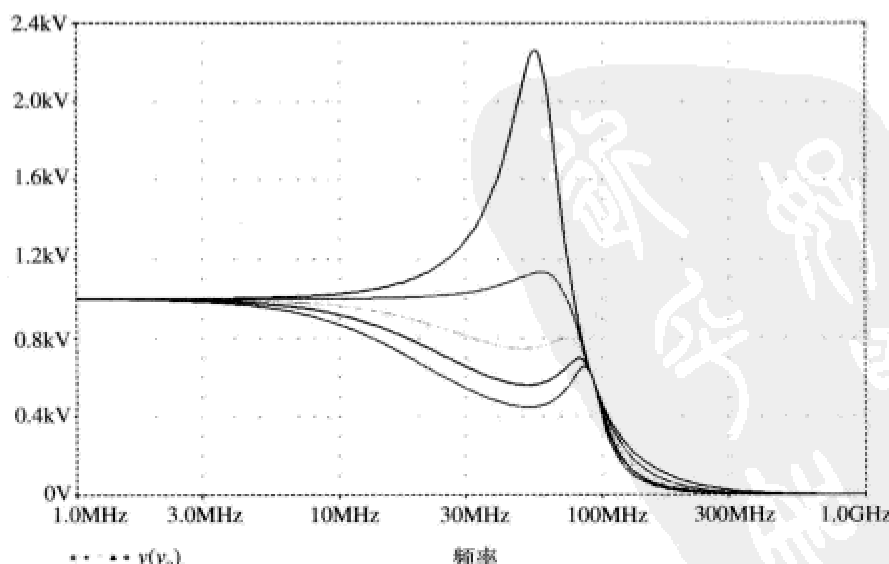


图11-36　光敏二极管放大器的频率响应结果，$C_f=2\text{pF}$、$C_f=4\text{pF}$、$C_f=6\text{pF}$、$C_f=8\text{pF}$、$C_f=10\text{pF}$，$R_f=1\text{k}\Omega$，$C_p=60\text{pF}$

例题11.5：MOSFET电流源

图11-37是MOSFET电流源电路，运算放大器被用来进行负反馈配置，以保持对MOSFET

器件的漏极电流的控制作用。如果放大器是理想的，并且MOSFET器件工作在线性区域，输入－输出传递函数为

$$\frac{I_L}{v_{in}} \approx \frac{1}{R_{sense}} \tag{11-35}$$

该结果取决于反馈控制系统是否是稳定的（也就是说，不发生振荡）。该电路的小信号模型如图11-38所示，其参数如下：

τ_h：运算放大器高频极点的时间常数

r_{out}：运算放大器的输出电阻

C_{gs}：MOSFET器件的栅极－源极电容

C_{gd}：MOSFET器件的栅极－漏极电容

g_m：MOSFET器件的跨导

R_L：负载电容

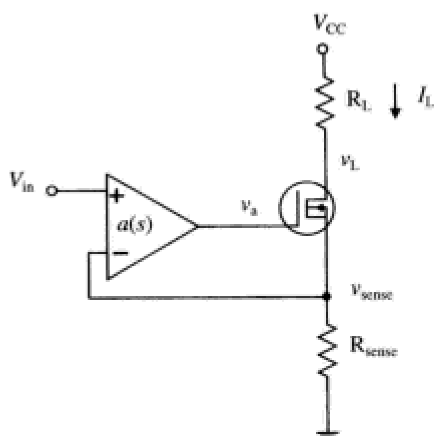


图11-37 MOSFET电流源电路。电压v_{sense}感应MOSFET器件的漏极电流

使用开路时间常数方法来估计MOSFET源极跟随器的传递函数。该方法假设传递函数存在一个主控极点，从运算放大器的输出v_a到感应电压v_{sense}的传递函数推导为

$$\begin{aligned}
\frac{v_{sense}}{v_a} &\approx \frac{A_o}{\tau s+1} \\
A_o &\approx \frac{g_m R_{sense}}{1+g_m R_{sense}} \\
\tau &= \left[\frac{r_{out}+R_{sense}}{1+g_m R_{sense}}\right]C_{gs} + \left[r_{out}+R_L+G_M r_{out} R_L\right]C_{gd} \\
G_M &= \frac{g_m}{1+g_m R_{sense}}
\end{aligned} \tag{11-36}$$

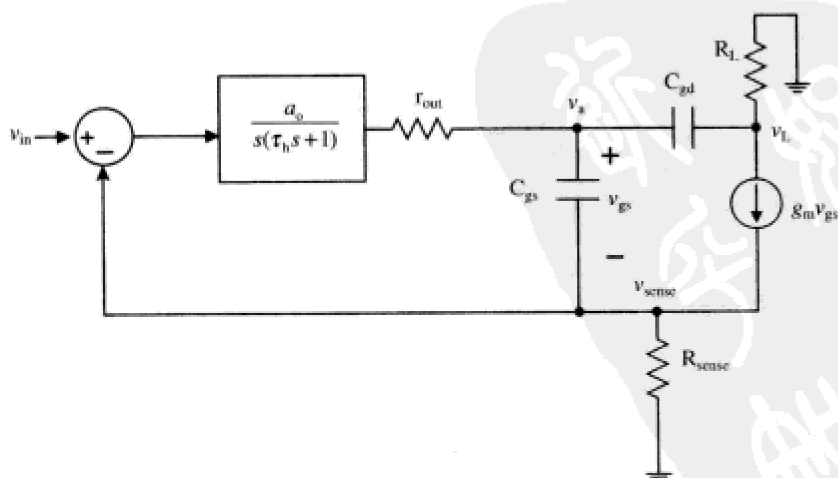


图11-38 MOSFET电流源的小信号模型

系统建模时假设使用TLO84运算放大器（该放大器的增益－带宽乘积为4MHz），IRF7403 MOSFET器件（该器件的g_m＝10A/V，C_{gs}＝1040pF，C_{gd}＝160pF），以及1Ω的负载电阻（即R_L＝1Ω）。如图11-39显示该电路的带宽为6.7MHz，增益裕度为28°。由于相位裕度

比较低的缘故，预计阶跃响应会出现明显的过冲。图11-40的阶跃响应曲线也证实了这一点。

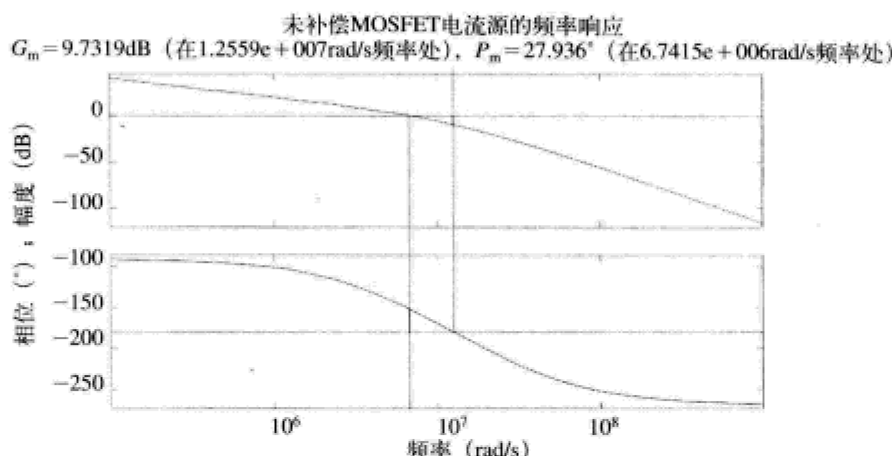


图11-39 MOSFET电流源——环路传输伯德图，表明截止频率为6.7MHz，相位裕度为28°

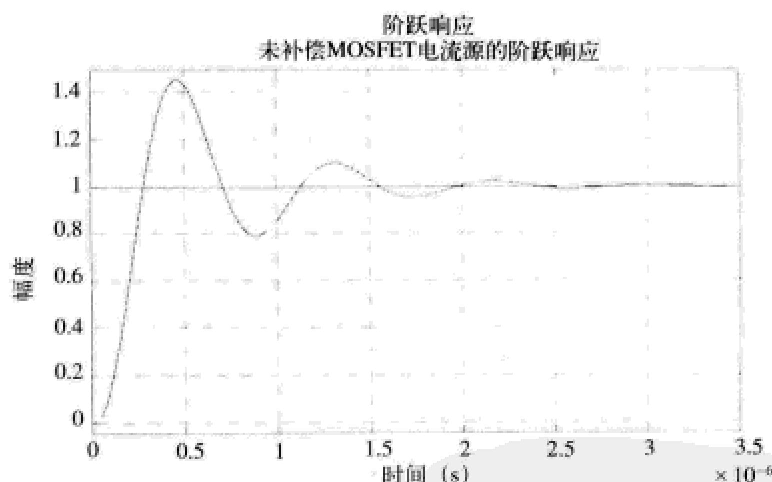


图11-40 MOSFET电流源——阶跃响应

增加滞后补偿电路（如图11-41a所示），可以提供更多的相位裕度以使系统稳定。如图11-41b所示是该系统的原理框图。滞后补偿电路为环路传输增加了一个零点，在$-R_iC$频率处，以及一个滞后极点，在$-(R_f+R_i)C$频率处。

改进系统阶跃响应的参数如图11-42所示。

R_i=47kΩ

R_f=470kΩ

C=1000pF

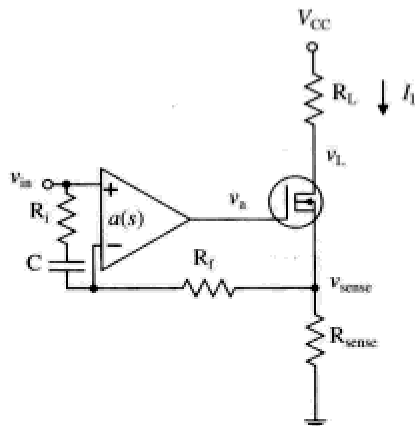
可以看到，系统的阶跃响应行为特性变得更好了，不再出现过冲现象，不过，与未补偿的情况相比，改进系统的10%～90%上升时间显著增加。

例题11.6：Maglev电路

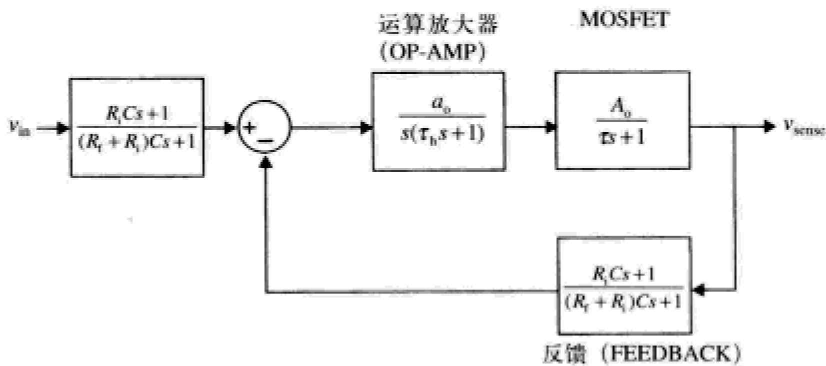
Maglev[①]系统，在磁悬浮系统（magnetic suspension）中使用超导磁体（superconducting magnet），具有很低的阻尼作用。此外，已经证实，这些电动悬浮系统（electrodynamic

① “Maglev”是个专业术语，通常用来表述使用磁悬浮作用的地面传输系统。截止到2004年，只有中国建成一个商业运营的Maglev系统，其他几个国家则在计划建议中。

suspension system，EDS）在特定的工作条件下（极点位于右半平面）具有轻微的负阻尼作用。因此，需要使用一个控制系统以阻止系统发生欠阻尼，或者阻止其发生不稳定的垂直振荡。



（a）电路，增加了滞后补偿元件R_i、C和R_f



（b）原理框图

图11-41 带有滞后补偿功能的MOSFET电流源

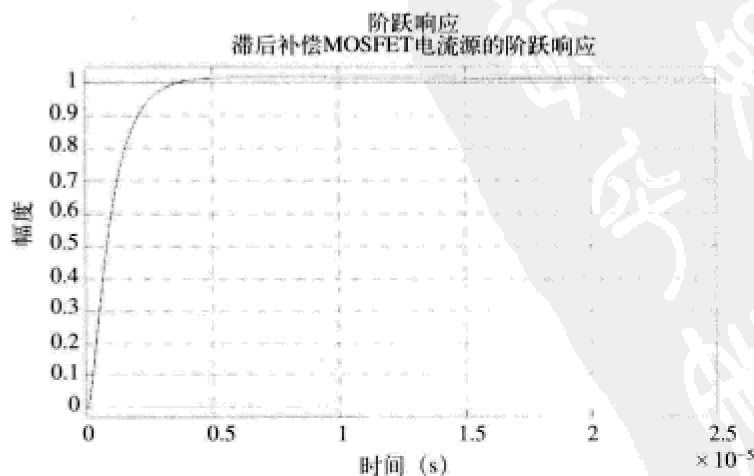


图11-42 带有滞后补偿功能的MOSFET电流源——阶跃响应

为了静态地悬浮磁体，向下重力的拉伸作用被向上的磁力所抵消。磁体稳定地浮起。也

就是说，相对平衡位置的偏差将产生恢复平衡的力量，这与弹簧振子系统中的质量块和弹簧的作用相似。在一个电磁悬浮系统中（比如一个钢珠悬浮在磁场中），磁体的直流激励不存在稳定平衡。

磁浮力作用在磁体上的大小为

$$f_Z=-k_m z=-Ci_M^2 z \tag{11-37}$$

这里k_m为等效弹簧振子常数，z为相对磁体电气零位的垂直距离，i_M为磁铁电流，C是一个常数，用于说明磁体和浮力线圈之间的几何关系和相对速度。

假设悬浮力、磁体垂向位置、磁体电流存在增长变化，则可以使用一个线性模型来表述磁体垂向位置的增长变化与磁体电流的增长变化之间的关系。垂向浮力、垂向位置和磁体电流用直流成分和增长变化成分之和来表示。

$$\begin{aligned} f_Z &= F_Z+\tilde{f}_z \\ z &= Z_o+\tilde{z} \\ i_M &= I_M+\tilde{i}_m \end{aligned} \tag{11-38}$$

将这些公式代入悬浮力的方程，得

$$f_Z\approx -CI_M^2 Z_o-CI_M^2\tilde{z}-2CI_M Z_o\tilde{i}_m \tag{11-39}$$

这里，忽略了二阶项和更高阶项。在平衡位置，磁力和重力大小相等，方向相反，使磁体保持静止。

$$F_Z=Mg=-CI_M^2 Z_o \tag{11-40}$$

使用牛顿定律对磁体进行分析，得

$$M\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2}=f_Z-Mg=-CI_M^2\tilde{z}-2CI_M Z_o\tilde{i} \tag{11-41}$$

得

$$\frac{M}{CI_M^2}\frac{d^2\tilde{z}}{dt^2}+\tilde{z}=\frac{2Mg}{k_m I_M}\tilde{i}_m \tag{11-42}$$

使用弹簧振子常数k，将该方程转化到频域，得

$$\left(\frac{M}{k_m}s^2+1\right)z(s)=\frac{2Mg}{k_m I_M}i_m(s) \tag{11-43}$$

达到磁体位置和磁体控制电流的传递函数

$$\frac{z(s)}{i_m(s)}=\frac{2Mg}{k_m I_M\left(\frac{M}{k_m}s^2+1\right)} \tag{11-44}$$

该结果表明，悬浮系统存在两个位于jω轴上的极点（如图11-43所示），与简单的、无能量损失弹簧振子系统相似

$$s_{p1,2}=\pm j\sqrt{\frac{k_m}{M}} \tag{11-45}$$

这样的系统可以使用位置－速度关系自由地调节闭环极点。通过调节参数K_f、K_v、K_p，极点可以放置在左半平面，具有足够的阻尼作用，可以达到良好的乘坐舒适性。

Maglev悬浮磁体电路的代表参数如下：

$M=10\,000$kg

$k_m=10^5$ N/cm $=10^7$N/m

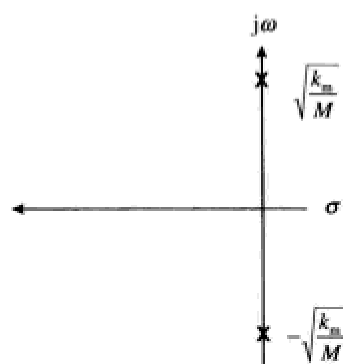


图11-43 Maglev系统的伯德图，表明极点位于jω轴上

$I_M = 10^4 A$

由这些参数得到$\omega_o = 31.6 rad/s$（$f_o = 5Hz$）的谐振频率，系统的传递函数为

$$a(s) = \frac{z(s)}{i_m(s)} = \frac{1.96 \times 10^{-6}}{(10^{-3}s^2 + 1)} = \frac{A}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + 1} \tag{11-46}$$

极点在jω轴上，与欠阻尼悬浮一致（如图11-44所示）。为了提升旅客的乘坐舒适性，必须选择合适的补偿电路以将悬浮极点移至左半平面。

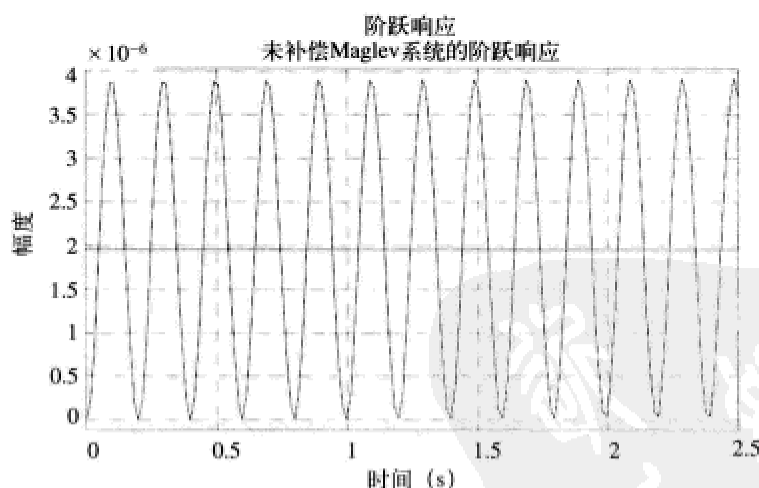


图11-44 未补偿Maglev系统的阶跃响应

使用速度反馈对该系统进行补偿，如图11-45所示。速度反馈等价于增加了该系统的阻尼

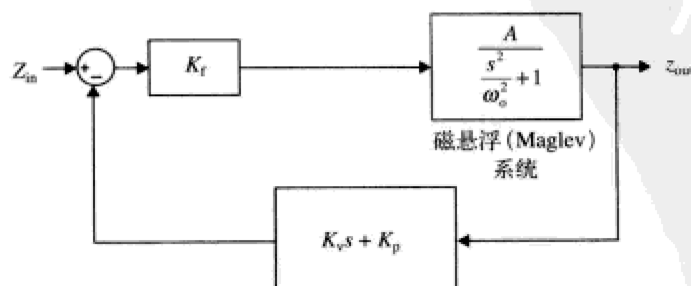


图11-45 Maglev电路的控制系统原理框图

作用。

如果控制系统的参数$K_v=10^5$，$K_p=10^4$，则得到系统的闭环传递函数

$$H(s)=\frac{1.64\times10^{-6}}{8.36\times10^{-4}s^2+1.64\times10^{-2}s+1} \tag{11-47}$$

闭环极点的阻尼系数为$\zeta=0.28$，极点位置在$-9.8\pm j33.2$ rad/s。因此，我们预计振荡频率接近33rad/s（5.2Hz）。新控制系统的阶跃响应具有更好的行为特性（如图11-46所示）。

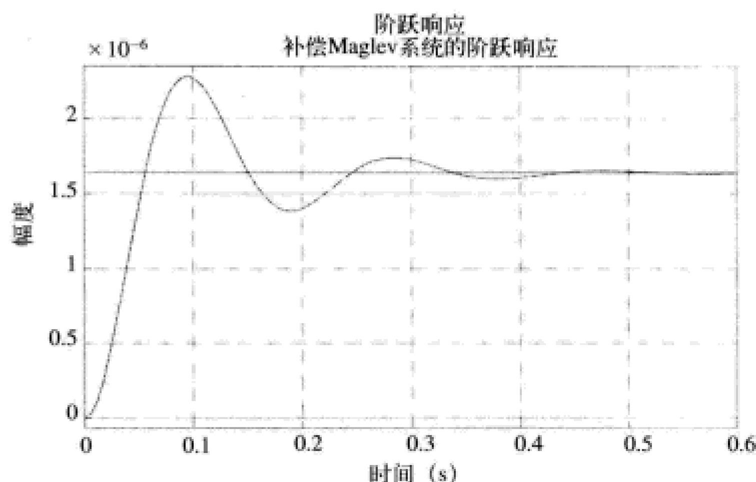


图11-46　补偿Maglev系统的阶跃响应

11.11　附录：MATLAB脚本

+1倍和+10倍增益放大器的MATLAB程序脚本

```
function cl
% Control system example #1
% Calculates parameters for gain of +1 and gain of +10 amplifiers
% Marc Thompson, 10/22/99

% Open loop transfer function a(s)
ao=1e5;                   % DC gain
d=conv([0.1 1],[1e-6 1]); % Poles
a=tf(ao,d);               % Create transfer function a(s)
bode(a)                   % Plot Bode plot of a(s)
title('file: cl.m: Transfer function of a(s)')
figure ;
pzmap(a);    % Plot pole/zero map of a(s)
title('file: cl.m: Pole map of a(s)');
damp(a)                   % Find natural frequency and damping ratio of a(s)

% gain of +1
f=1;                      % Feedback gain of +1
margin(a*f)               % Find phase and gain margin
title('Phase margin calculation for gain of +1 amplifier');figure ;
```

```
f=tf(f,1);                   % Create feedback f(s)
cloop=feedback(a,f)          % Close the loop, find transfer function H(s)
bode(cloop)
title('Bode plot of closed-loop transfer function for gain of +1
amplifier');figure
step(cloop)
title('Step response for gain of +1 amplifier');grid;figure
pzmap(cloop)
title('Pole map of closed-loop gain of +1 amplifier');grid;figure;
damp(cloop)                     % Find natural frequency and damping ratio of H(s)

% gain of +10
f=0.1;
margin(ao*f,d);title('Phase margin calculation for gain of +10 amplifier');figure ;
f=tf(f,1) ;
cloop=feedback(a,f);cloopgainof10=cloop
bode(cloop);title('Bode plot of closed-loop transfer function for gain of+10
amplifier');figure
step(cloop);grid;title('Step response for gain of +10 amplifier');
pzmap(cloop);title('Pole map of closed-loop gain of +10 amplifier');grid;damp(cloop)
```

积分控制例子的MATLAB程序脚本

```
function c3
% Control example 3
% driving reactive load

L=10e-6;
C=10e-6;
R=10;
Zo = sqrt(L/C) ;            % Characteristic Impedance
Q=R/Zo

% Calculate PLANT
num=1 ;
denom=[L*C L/R 1] ;
plant=tf(num,denom)
damp(plant)                 % Find poles and damping ratio
bode(plant); title('file: c3.m; REACTIVE LOAD EXAMPLE')

% Integral control, attempt #1
Gain=4e3;                      % Integrator gain
denom=[1 0 ] ;
Gc=tf(Gain,denom);             % Form Gc(s)
Forw=series(plant,Gc);       % Cascade with plant
margin(Forw);                  % Find gain and phase margin
F=tf(1,1) ;
Cloop=feedback(Forw,F,-1)
figure; step (Cloop) ; title ('STEP RESPONSE, CONTROLLER #1');grid

%Integral control, attempt #2
```

```
figure
d=[1/5e4 1] ;
LPF=tf(1,d);                  % Add lowpass filter to damp complex pole pair
Gc=series(LPF,Gc) ;
Forw=series(plant,Gc);
margin(Forw); title('PHASE MARGIN CALC., CONTROLLER #2') ;
F=tf(1,1) ;
Cloop=feedback(Forw,F,-1)
figure; step(Cloop);title('STEP RESPONSE, CONTROLLER #2');grid
```

MOSFET电流源例子的MATLAB程序脚本

```
function moscursource
% Analysis of MOSFET current source
% Marc Thompson, 3/28/00

% LOAD
RL=1;

% MOSFET model
gm = 8.6;                  % transconductance
Cgs = 1040e-12;
Cgd = 160e-12;

% OPAMP model
rout = 100;                % output resistance of opamp
ao=2*pi*4*1e6;             % GBP = 4 MHz
denom=[1/ao 0] ;
highpole=[1/ao 1] ;
d=conv(denom,highpole) ;
opamp=tf(1,d)

% MOSFET follower model
Rsense = 0.08;                     % current sense resistor
Ao=gm*Rsense/(1+gm*Rsense) ;       % gain of follower

% MOSFET OCTC calculation
Rgs=(rout+Rsense)/(1+gm*Rsense) ;
Tgs=Rgs*Cgs;
GM=gm/(1+gm*Rsense) ;
Rgd=rout+RL+(GM*rout*RL) ;
Tgd=Rgd*Cgd;
T=Tgs+Tgd                  % sum of OCTCs
mosfetpole=1/T
mosfet=tf(Ao,[T 1])

% Find loop transmission
LT=series(opamp,mosfet)
margin(LT) ;
title('moscursource. FREQUENCY RESPONSE OF UNCOMPENSATED MOSFET CURRENT SOURCE')
figure ;

% close the loop
```

```
f=tf(1,1)
uncomp= feedback(LT,f,-1) ;
step(uncomp); grid;
title('moscursource. STEP RESPONSE OF UNCOMPENSATED MOSFET CURRENT SOURCE')
figure

% add lag compensation
Rf=470000;   C=1e-9;
Ri=47000;
numlag=[Ri*C 1] ;
denomlag=[(Ri+Rf)*C 1] ;
f=tf(numlag,denomlag)
comp=feedback(LT,f,-1) ;
comp=series(f,comp) ;
step(comp); grid;
title('moscursource. STEP RESPONSE OF LAG COMPENSATED MOSFET CURRENT SOURCE')
```

Maglev例子的MATLAB程序脚本

```
function maglev
% Maglev example
% Marc Thompson 4/3/00

% Maglev plant
wn=sqrt(1e3) ;
num=1.96e-6;
denom=[1/wn^2 0 1] ;
plant=tf(num,denom) ;
step(plant) ;
title('Step response of uncompensated Maglev system');grid,
figure

% feedback compensation
Kp=1e5;
Kv=1e4;
num=[Kv Kp] ;
f=tf(num,1) ;

% Closed-loop
sys=feedback(plant,f,-1)
damp(sys)
step(sys) ;
grid;
title('Step response of compensated Maglev system')
```

11.12 本章习题

习题11.1

考虑图11-47所示的负反馈放大器原理框图，假设输入电压$v_i=1V$，并且干扰输入$v_d=1V$。反馈因子$f=0.1$。

(a) 如果$a=100$，求解输出电压v_o，以及误差电压v_e。

(b) 如果$a=100\ 000$，求解v_o和v_e。

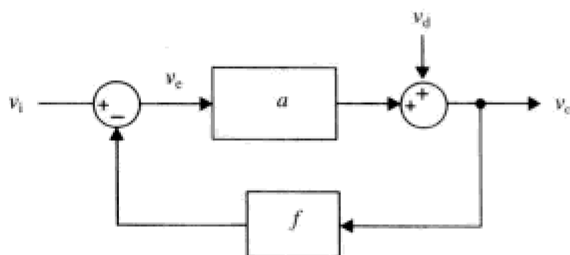


图11-47 习题11.1的负反馈放大器原理框图

习题11.2

现在，我们来考虑图11-48所示的负反馈电路原理框图，这里积分器$a(s)=K/s$，其中$K=1000$。存在单位增益反馈环路。求解传递函数$v_o(s)/v_i(s)$。绘制传递函数的零极点图，以及幅度和相位伯德图。

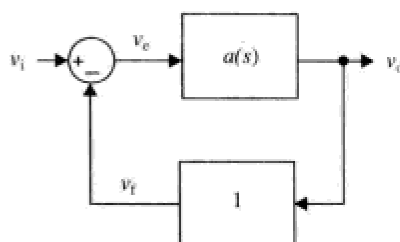


图11-48 习题11.2的负反馈放大器原理框图

习题11.3

考虑负反馈环路中的非线性元件（如图11-49所示）。非线性元件的增长增益为：

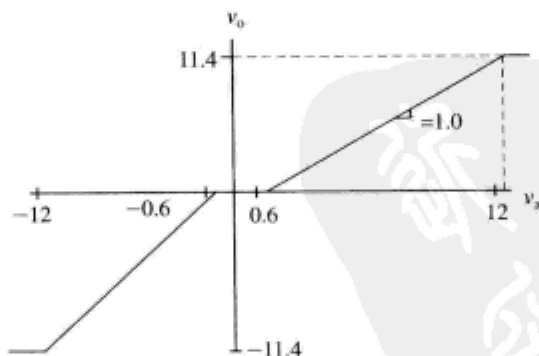
$v_o/v_a=0$，$|v_a|<0.6V$；

$v_o/v_a=1$，$0.6V<|v_a|<12V$；

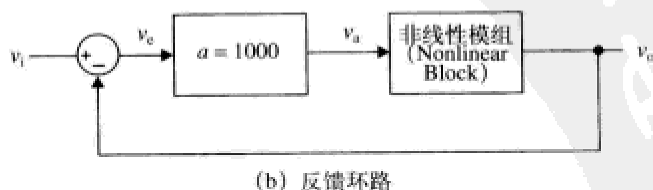
$v_o/v_a=0$，$|v_a|>12V$。

这个非线性元件的增益轮廓曲线是晶体管功率输出电路具有截止失真的典型特性。

输入电压v_i从$-12V$变化到$+12V$时，求解这个闭环放大器电路的输出电压v_o，并绘制v_o随v_i变化的曲线。



(a) 非线性元件的特性曲线



(b) 反馈环路

图11-49 习题11.3的负反馈放大器电路

习题11.4

对于图11-50所示的反馈系统：

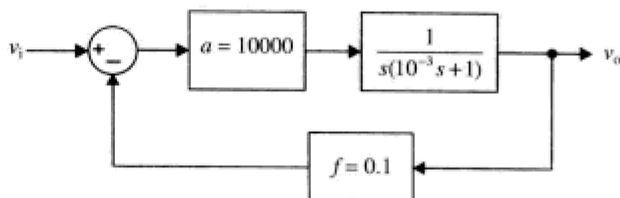


图11-50 习题11.4的负反馈放大器

(a) 求解该系统的理想输入－输出传递函数$v_o(s)/v_i(s)$，并绘制其频率变化曲线。

(b) 求解负的环路传输函数（$-L.T.$）。

(c) 绘制环路传输的幅度和相位伯德图。

(d) 求解截止频率和相位裕度。

习题11.5

如图11-51所示的视频放大器是个大带宽、正增益的电路，设计用来放大视频信号v_{in}。可以使用50Ω电阻分压器对视频发生器的输出电缆进行合理建模。假设运算放大器的开环传递函数$a(s)$为

$$a(s) = \frac{10^5}{(10^{-3}s+1)(10^{-8}s+1)}$$

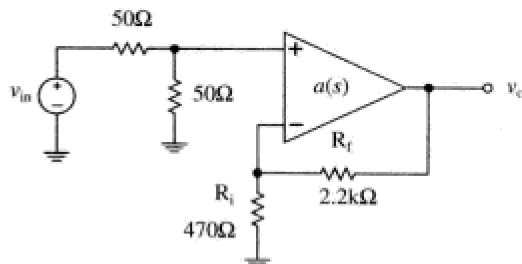


图11-51 习题11.5的视频放大器

你可以假设运算放大器的其他所有参数都是理想的（也就是说，转换速率无限快，输入电流为0A，输出电阻为0Ω等）。

(a) 绘制该电路的原理框图，原理框图的输入信号为v_i，输出信号为v_o。

(b) 求解该电路的理想闭环增益。(该习题这一步的“理想”意味着，求解过程中不需要考虑带宽限制因素的影响)。

(c) 求解负的环路传输函数（$-L.T.$）。绘制环路传输函数的幅度和相位伯德图，估计截止频率、增益裕度和相位裕度。

(d) 现在，假设输入v_i为单位阶跃函数，并且假设运算放大器没有转换速率界限，绘制$v_o(t)$的曲线。

习题11.6

使用劳斯判据，求解式（11-48）传递函数在右半平面的极点数目。

$$H(s) = \frac{40}{s^5 + 10s^4 - 5s^3 - 50s^2 + 4s + 40} \tag{11-48}$$

11.13 参考文献

Abramovitch, D., “Phase-locked loops: a control centric tutorial,” *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, May 8-10, 2002, pp. 1-15.

______, “The outrigger: a prehistoric feedback mechanism,” *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, December 9-12, 2003, pp. 2000-2009.

Abramovitch, D., and Franklin. G., "A brief history of disk drive control," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 22, no. 3, June 2002, pp. 28-42.

Bennett, S., "Development of the PID controller," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 13, no. 6, December 1993, pp. 58-62, 64-65.

Bernstein, D. S., "Feedback Control: An Invisible Thread in the History of Technology," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 22, no. 2, April 2002, pp. 53-68.

Black, Harold S., "Stabilized Feed-Back Amplifiers," *Electrical Engineering*, vol. 53, no. 1, 1934, pp. 114-120, reprinted in *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, no. 2, February 1999, pp.379-385.

______ , "Inventing the Negative Feedback Amplifier," *IEEE Spectrum*, Dec. 1977, pp. 55-60.

______ , United States Patent #2,102,671, "Wave Translation System," issued December 21, 1937, available from *www.uspto.gov.*

Calleja, Hugo, "An Approach to Amplifier Frequency Compensation," *IEEE Transactions on Education*, vol. 46, no. 1, February 2003, pp. 43-49.

Denny, Mark, "Watt steam governor stability," *European Journal of Physics*, vol. 23, 2002, pp. 339-351.

Desoer, C., "In Memoriam: Harold Stephen Black (1898-1983)," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, no. 8, August 1984, pp. 673-674.

Fasol, K. H., "A short history of hydropower control" *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 22, no. 4, August 2002, pp. 68-76.

Headrick, M. V., "Origin and evolution of the anchor clock escapement" *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 22, no. 2, April 2002, pp. 41-52.

Herwald, S., "Recollections of the early development of servomechanisms and control systems " *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 4, no. 4, November 1984, pp. 29-32.

Jury, E., "On the history and progress of sampled-data systems," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 7, no. 1, February 1987, pp. 16-21.

Kline, R., "Harold Black and the Negative-Feedback Amplifier," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 13, no. 4, Aug. 1993, pp. 82-85.

Lepschy, A. M., Mian, G. A., and Viaro, U., "Feedback control in ancient water and mechanical clocks," *IEEE Transactions on Education*, vol. 35, no. 1, February 1992, pp. 3-10.

Lewis, F.L., *Applied Optimal Control and Estimation*, Prentice-Hall, 1992.

Lundberg Kent, "Internal and External Op-Amp Compensation: A Control-Centric Tutorial," *ACC 2004*.

Lundberg, Kent H., and Roberge, James K.. "Classical Dual-Inverted-Pendulum Control," *Proceeding of the* IEEE CDC 2003, pp. 4399-4404, December 9-12, 2003, Maui, Hawaii.

Mancini, Ron, "The Saga of Harry Black," *EDN Magazine*, March 15, 2001, p. 34.

Maxwell, James C., "On Governors," *Proceedings of the Royal Society*, 1867, pp. 270-283.

Mayr, Otto, *The Origins of Feedback Control*, The MIT Press, 1970.

Michel, A. N., "Stability: the common thread in the evolution of feedback control," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 16, no. 3, June 1996, pp. 50-60.

Pidhayny, D., "The origins of feedback control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 17, no. 2, April 1972, pp. 283-284.

Roberge, James K., *Operational Amplifiers: Theory and Practice*, JohnWiley, 1975.

Siebert, William McC., *Circuits, Signals and Systems*, The MIT Press, 1986.

Tilbury, Dawn, Luntz, Jonathan, and Messner, William, "Controls Education on the WWW: Tutorials for MATLAB and Simulink," *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia PA, June 1998, pp. 1304-1308.

第12章　运算放大器的基本电路结构与实例分析

本章概要

❑ 本章从运算放大器的电路拓扑结构出发，讨论它的基本特性。通过循序渐进的实例研究来演示单片集成运算放大器的基本电路组成。本章最后，我们将讨论在运算放大器应用中遇到的一些实际限制。

12.1　器件的基本工作特性

理想运算放大器（如图12-1所示）具有下列基本特性：

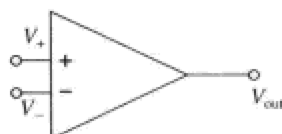


图12-1　理想运算放大器，标明差分输入V+、V–。理想运算放大器具有零输入电流，以接近无限大的增益对V+和V–的差异进行放大

- *差分输入*。输出是正输入端与负输入端之间输入信号差异成分的放大结果。
- *无限增益*。增益是无限大的。
- *无限带宽*。没有带宽限制。
- *无限转换速率*。输出转换速率没有界限，换句话说，就是dV_{out}/dt的极限为无限大。
- *零输入电流*。两个输入端的输入电流均为零。
- *零输出电阻*。输出电阻为零。
- *零功率耗散*。理想运算放大器不消耗任何功率。
- *无限电源抑制*。输出与供电电源的电压变化无关。
- *无限共模信号抑制*。输出与共模信号的大小无关。

当然，理想运算放大器是不存在的。不过，运算放大器制造商逐年发展，设计的器件一年比一年好，已经接近理想特性。比如，直流增益大于10^6倍，以及增益–带宽乘积大于100MHz的运算放大器比比皆是①。

对闭环运算放大器电路进行粗略分析的常用方法是，假设运算放大器连接“虚地（virtual ground）”。该术语有些不适当，因为运算放大器的输入端电平通常不需要为地电位。不过，用于负反馈放大时，在运算放大器内部两个输入端的差异为理想零伏。如果运算放大器的正输入端接地，负输入端将近似为地电位。在不同电路结构中，如果运算放大器的正输入端为+6V，则其负输入端也将为＋6V左右。

基本的两级运算放大器电路如图12-2所示。因为该电路包含两个增益级电路，所以它是个两级运算放大器。输入差分放大器电路（Q_1和Q_2）具有高差模增益和低共模增益。第二级增益电路（Q_3）提供辅助增益，同时提供直流电平变换功能。补偿电容C_c提供一个低频极点，

① 与运算放大器741（60年代问世，迄今仍在销售）的200000额定直流增益、1MHz额定增益–带宽乘积等基本指标进行比较，Linear Technology公司的LT1226（20世纪90年代问世的运算放大器）的增益–带宽乘积为1000MHz。

极点分裂过程[①]导致次高频率极点向更高频率方向移动。极点分裂技术对放大器的全局稳定性具有重要影响。

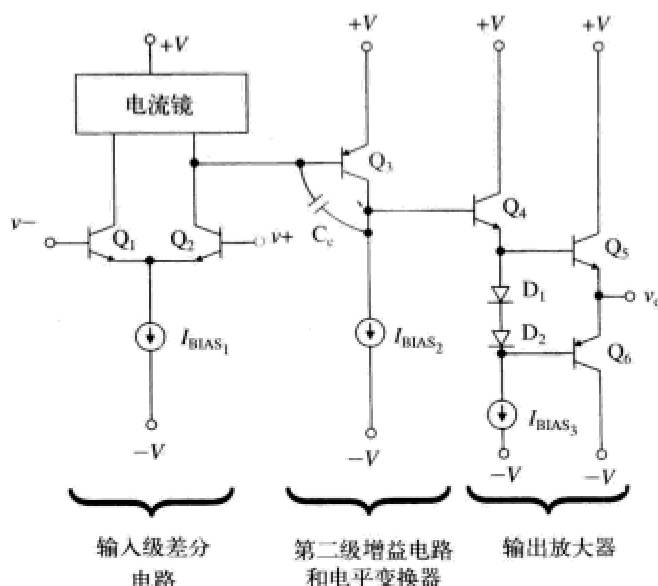
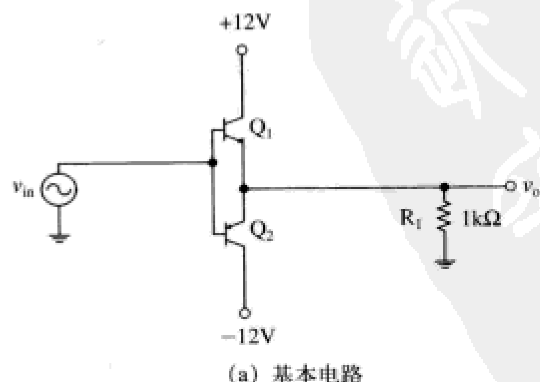


图12-2　基本的两级运算放大器电路，输入为差分增益电路，接着是第二级增益和电平变换电路，以及输出缓冲电路

射随器Q_4在高增益节点和输出节点之间进行隔离缓冲处理。输出级电路（Q_5和Q_6）是*甲乙类推挽*（AB push-pull）电路。这个输出级电路既可以提供电流也可以吸收电流。比如，向外提供电流时Q_5导通，吸收输出电流时Q_6导通。Q_5和Q_6基极端的二极管具有两个功能。首先，它们可以减小输出级电路的*截止失真*（crossover distortion）。其次，根据Q_5、Q_6的尺寸相关调节D_1、D_2到适当的尺寸[②]，可以将输出级晶体管的偏置电流设置为适度水平，这种设计可以降低输出放大器的增长输出电阻。

没有偏置调整二极管的推挽式输出级放大器的PSPICE电路如图12-3所示。输出电压波形

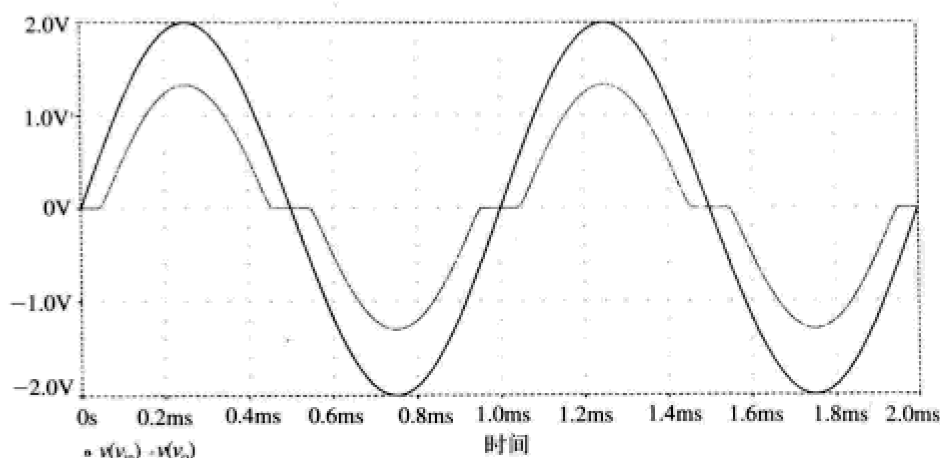


（a）基本电路

图12-3　推挽输出电路

① 在第7章中，我们详细讨论了极点分裂技术。

② 在某些实际运算放大器中，这两个二极管提供的电压降可以用一个替代电路结构来提供。参见运算放大器741，它使用一个"V_{BE}乘法器"来提供这一功能。

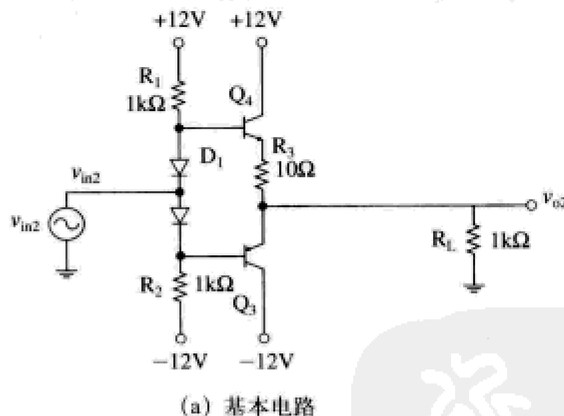


(b) 输入为4Vpp正弦波信号的输出响应，显示在输出端存在截止失真

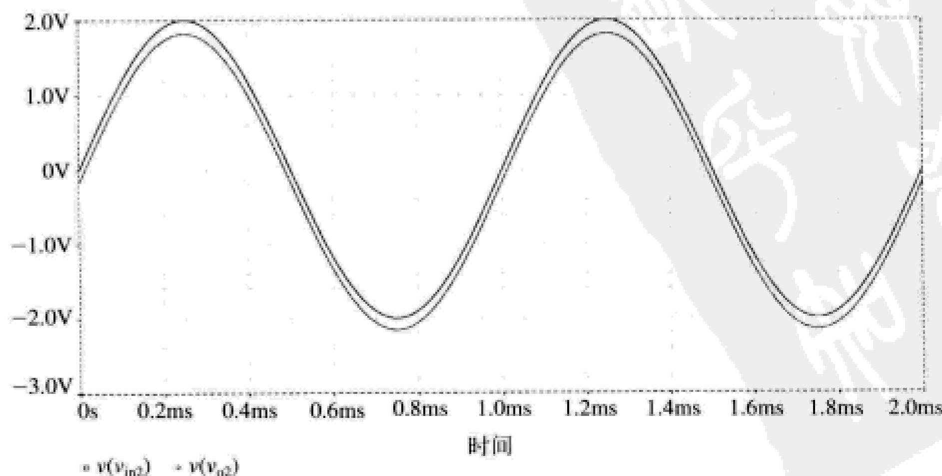
图12-3 （续）

表明，在输出电压v_o＝0V的周围，存在明显的直流失调电压、截止失真、以及±0.6V左右的死区。

可以修改推挽电路来改善电压失调特性，如图12-4所示。在晶体管基极之间加入1.2V左



(a) 基本电路



(b) 输入为4Vpp正弦波的输出响应

图12-4 带有基极偏置二极管的推挽电路

右的偏置电压，使输出晶体管导通。电阻R_1、R_2对二极管串进行直流偏置设置。

提供的小阻值电阻R_3用以减小发热失控（thermal runaway）造成的变化。该电路在发热失控时的工作过程如下：我们假设输出晶体管Q_3和Q_4携带非常大的电流，它们将会发热。因为晶体管现在处于更高的温度点，所以为了保持相同的输出电流不变[①]，它们将需要更小的基极－发射极电压。因此，输出电路的电流增大。晶体管变得更热，造成电路发热失控。包含小阻值电阻R_3可以确保，如果集电极电流急剧增大，R_3上的电压降也将变得很大，这样就盗取了晶体管的基极驱动电压。

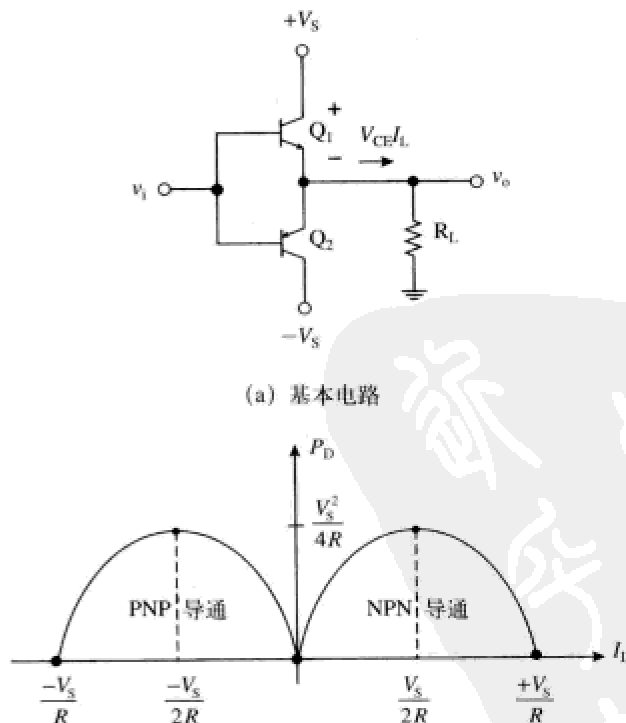
接下来，我们来研究基本推挽放大器的功率耗散（如图12-5a所示），假设均为理想元件（也就是说，没有截止失真），使用对称的电源电压。正向负载电流为I_L，NPN型晶体管导通。功率耗散为

$$P_D = V_{CE} I_L = (V_S - V_o) I_L = V_S I_L - I_L^2 R_L \tag{12-1}$$

因此，功率耗散相对负载电流的关系曲线具有抛物线形状（如图12-5b所示）。将功率耗散方程对负载电流求导数，可以求解最大功率耗散。

$$\frac{dP_D}{dI_L} = V_S - 2 I_L R_L \tag{12-2}$$

最大功率耗散发生在负载电流$I_L = V_S/(2R_L)$时，此时的输出电压为电源电压的一半[②]。



（b）NPN型晶体管和PNP型晶体管的功率耗散P_D与负载电流I_L的关系曲线

图12-5　研究推挽放大器功率耗散的电路

① 记住，V_{BE}的温度系数约为−2.2mV/℃。

② 有人可能会问，为什么集电极电流达到最大时，功率耗散反而为零呢？在这个简化模型中，我们假设晶体管的饱和电压为零，因此有限的集电极电流与零电压V_{CE}相乘，其结果为零功率耗散。

例题12.1：实例研究：分立运算放大器的设计、分析和仿真

我们使用分立元件来设计一个分立运算放大器。该例的设计结果并不代表最新的运算放大器电路技术，不过设计过程确实演示了大多数单片集成电路运算放大器使用的组成电路模块。该练习提供的设计思路将帮助我们理解实际运算放大器的诸多限制。本章稍后还将详细讨论运算放大器的限制因素。

差分输入级电路

运算放大器中通常需要某些形式的差分输入电路。一种可行的电路实现方式是电流镜负载的差分输入电路（如图12-6所示）。该电路的组成元件包括：

- 差分输入晶体管Q_1、Q_2。
- 电流镜晶体管Q_3、Q_4。
- 偏置电流源I_{bias}，这里忽略了某些电路细节。

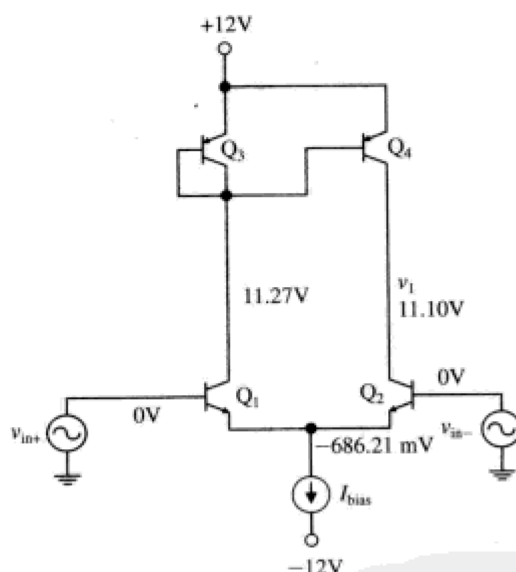


图12-6 差分输入电路，输入晶体管Q_1、Q_2，电流镜负载Q_3、Q_4。我们在晶体管Q_2、Q_4的集电极连接处，引出输出电压v_1

让我们将v_{in-}输入端接地，在v_{in+}输入端进行直流扫描（图12-7）。这将为我们提供关于输

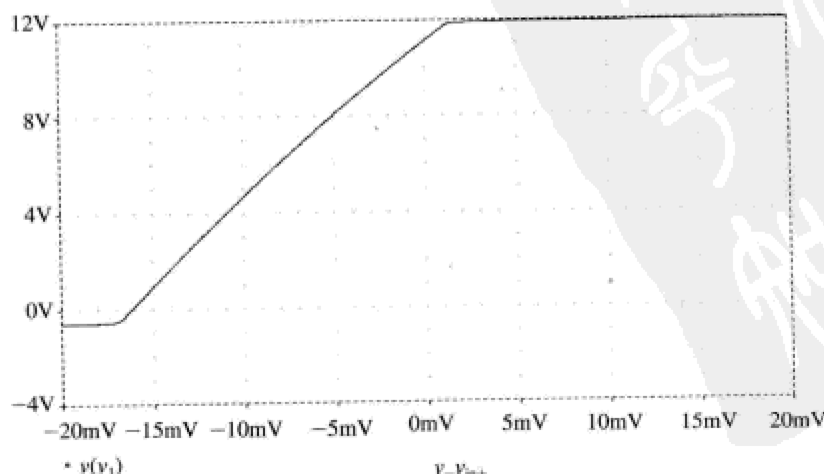
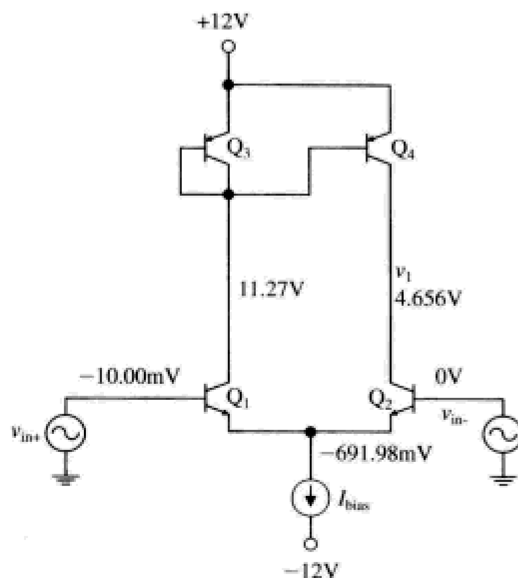


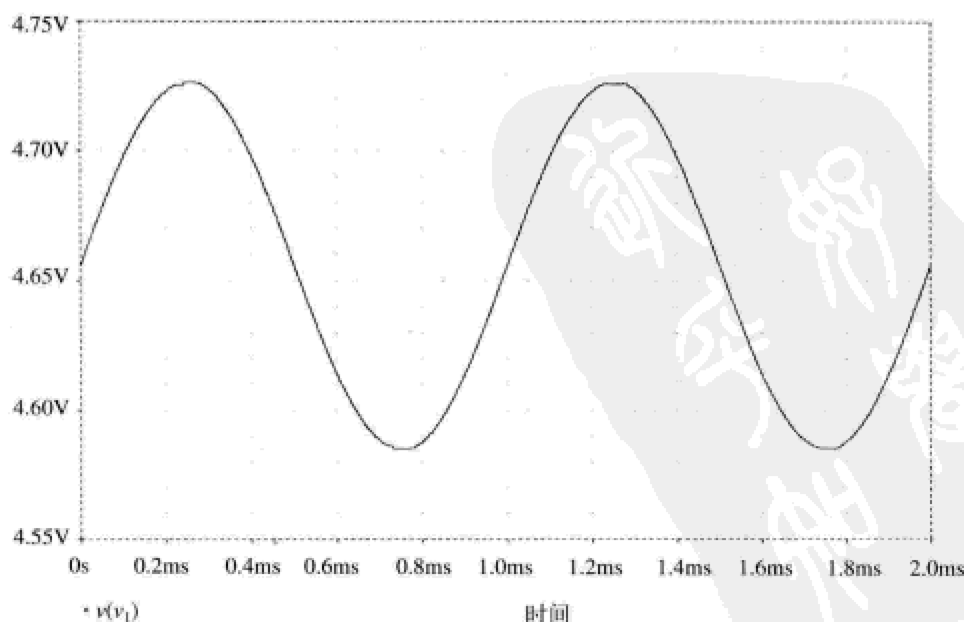
图12-7 差分输入电路的直流扫描

入电路电压漂移的解决思路。理想情况下，我们希望$v_{in+}=0V$时，输出电压v_1位于线性增益区域的（近似）中间点。实践中，受电流镜晶体管Q_3/Q_4之间的失配和误差影响，这个电压漂移并不为零。SPICE仿真也显示出了这一影响：v_{in+}从大致-15mV变化到地电平时，输出电压v_1从地电平附近过渡到+12V左右。可以看到，该电路（增益定义为v_{o1}/v_{in+}）的增益约为1000。

让我们在v_{in+}端施加-10mV的直流偏置电平，并且在输入端施加频率为1kHz、峰峰值为200μV的正弦波（如图12-8a所示）。可以看到v_1的直流偏置电平在+4.656V处（如图12-8b所



（a）电路



（b）v_{in+}在0.2mV峰峰值之间变化时的PSPICE仿真曲线

图12-8　交流正弦波扫描结果

示），这意味着Q_2、Q_4均处于导通状态，工作在正向放大区。因此，我们预计晶体管在这些偏置设置状态具有线性增益。输出电压v_1相对输入电压v_{in+}的增益约为575。

继续进行该放大器的设计，现在我们知道该电路还需要更多的晶体管来实施缓冲和电平变换（level-shifting）功能。v_1的输出只具有正电压，而在实际放大器中，我们要求在输出端既可以传输正电压也可以传输负电压。因此，我们需要对差分电路的输出电压进行电平变换。一种可行的方法是使用一个折叠式共射共基放大器（folded-cascode amplifier），如图12-9所示。折叠式共射共基放大器（晶体管Q_5、偏置电流源I_{bias2}、I_{bias3}）的工作过程如下：首先，我们假设I_{bias2}和I_{bias3}具有相同大小的电流，晶体管Q_5对晶体管Q_2和Q_4之间的差异成分进行缓冲，或者说，本例的小信号变化i_{c5}为

$$i_{c5} \approx I_{C4} - I_{C2} = \left(\frac{I_{BIAS}}{2} + \Delta i\right) - \left(\frac{I_{BIAS}}{2} - \Delta i\right) = 2\Delta i \tag{12-3}$$

更进一步，对于差分输入电路来说

$$\Delta i = g_m v_{in} \tag{12-4}$$

这也就是说，负载电路（包括电流源I_{bias3}）是将$2\Delta I$的电流转换为电压v_2。

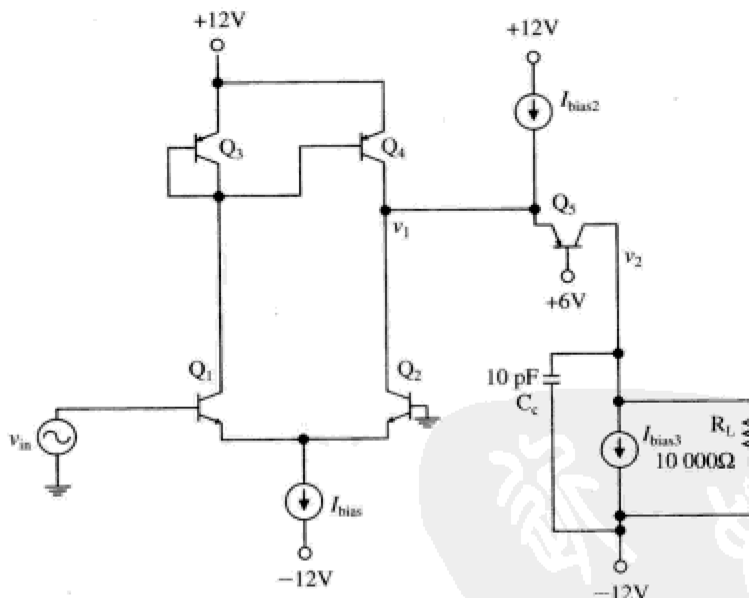


图12-9 差分放大器＋折叠式共射共基放大器

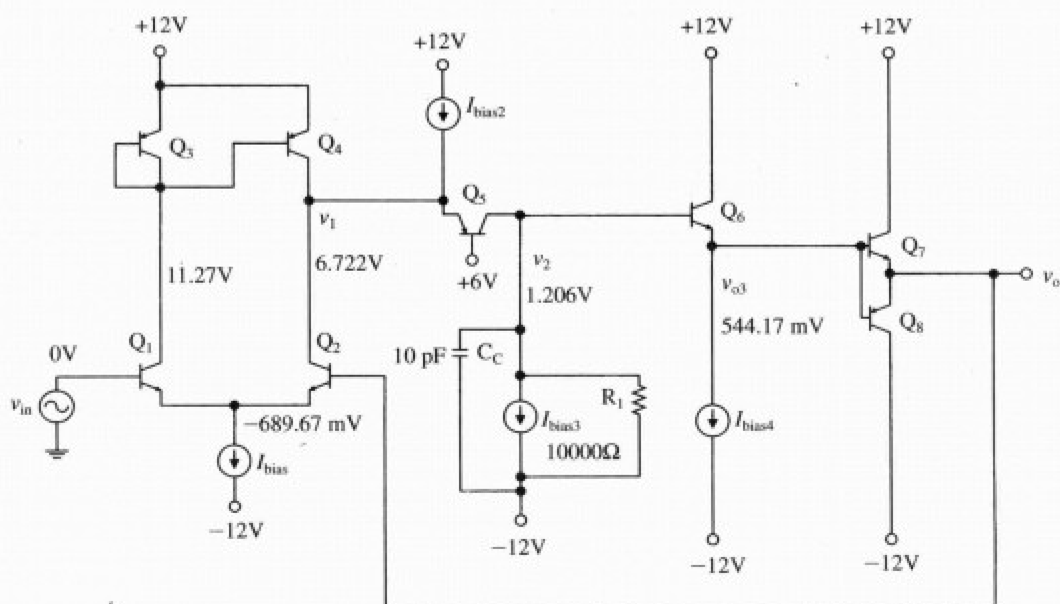
射随器缓冲电路和输出推挽电路

对于该输入电路而言，现在我们需要为其增加输出推挽电路（如图12-10a所示）。输出晶体管Q_7/Q_8可以吸收或者供给电流。增加射随器Q_6以保证输出晶体管不会严重降低晶体管Q_5的集电极的高增益节点的负载能力。我们看到，这个闭环增益为−1倍的电路的输入和输出如图12-10b所示。我们可以看到，在输入和输出之间存在−6mV失调电压。

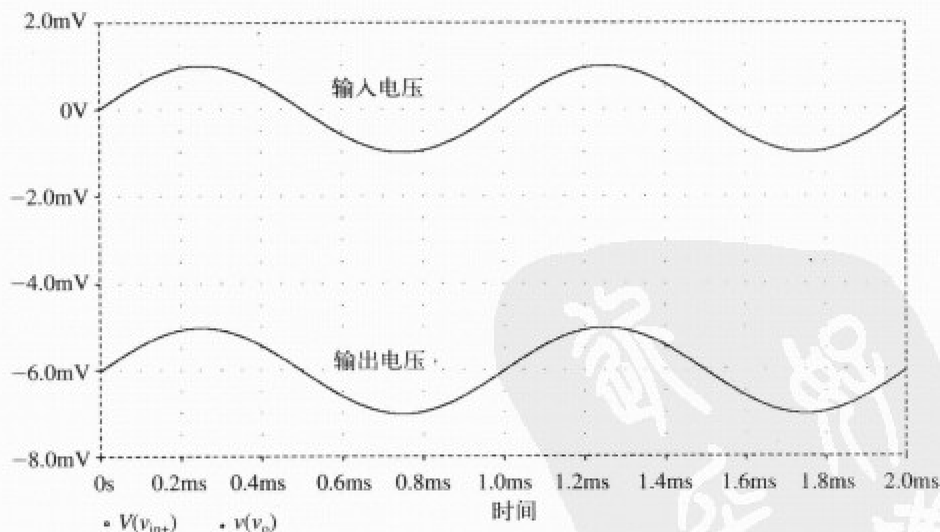
接下来，我们设计增益为−20倍的运算放大器（如图12-11a所示）。我们可以看到，输出可以在±8V之间无截止[①]地摆动（如图12-11b所示）。如果进一步增大驱动信号的幅度，

① 波峰没有削顶，波谷没有截底。——译者注

输出信号在5V附近出现截顶（如图12-11c所示），不过负正弦波依然是完好的，没有出现截底。

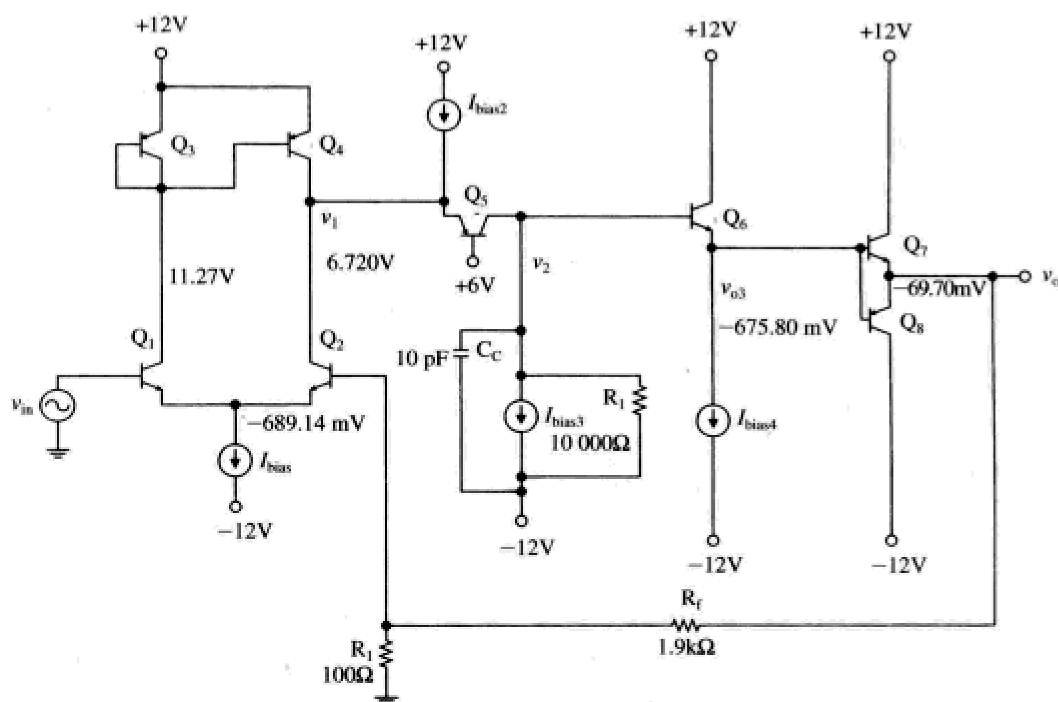


（a）电路，标明了部分节点的PSPICE仿真预测电压

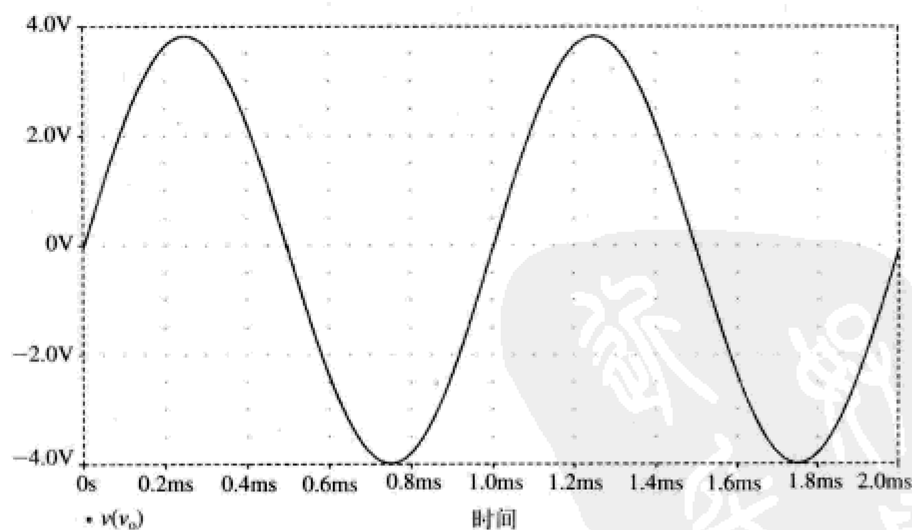


（b）输入和输出电压曲线

图12-10 设计的最终放大器，具有单位增益反馈

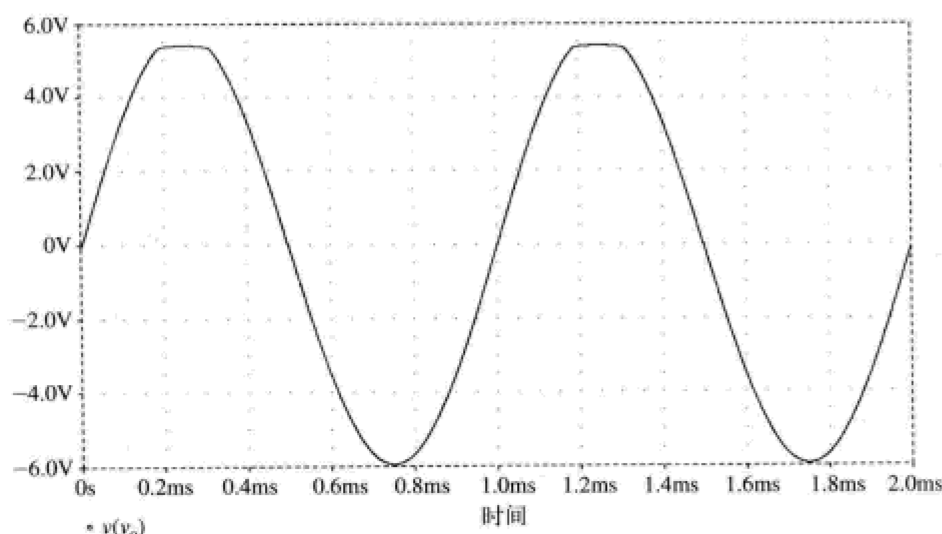


(a) 电路，标明某些节点的PSPICE预测电压



(b) 输入为频率1kHz、峰峰值400mV正弦波时的输出信号波形

图12-11 最终放大器增益为20倍的电路结构



(c) 输入为频率1kHz、峰峰值为600mV正弦波时的输出信号波形

图12-11　(续)

注意：该设计仅仅用于演示目的。存在诸多尚需改进提高的地方，包括更好的偏置设置电路，以及更明智的电路结构选择，等等。因此，请不要苛评这是个多么无用的设计！

12.2　运算放大器LM741电路的简短回顾

现在，我们来对运算放大器LM741的电路结构进行快速回顾，LM741是许多公司从20世纪60年代开始制造的众多运算放大器之一（如图12-12所示）。这是个两级运算放大器，具有极点分裂功能。

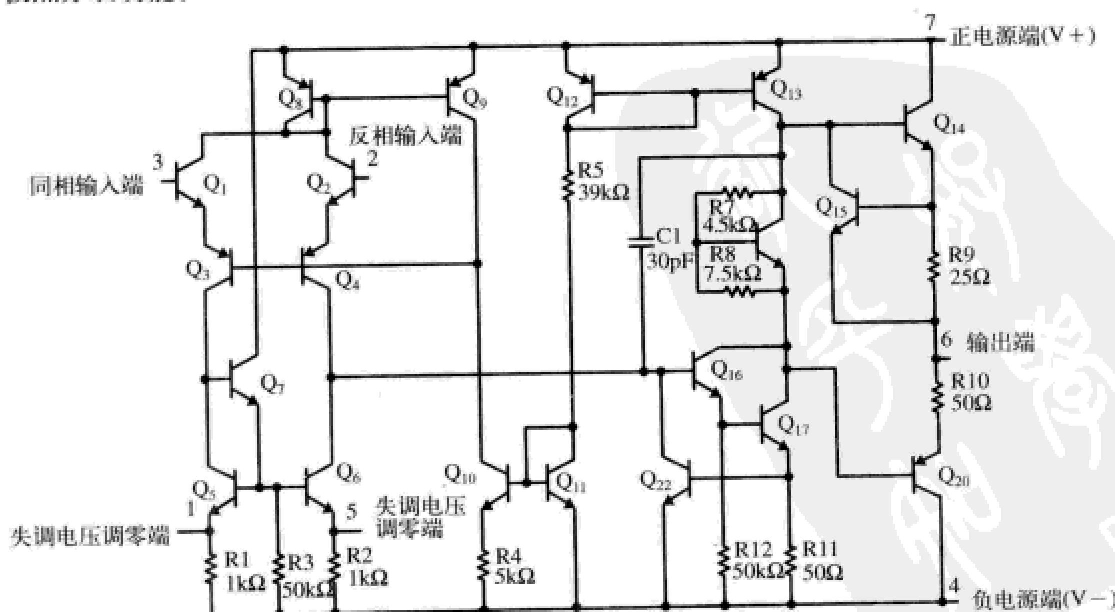


图12-12　运算放大器LM741电路图①

① 源自美国国家半导体公司。美国国家半导体公司授权使用。

输入差分增益级：Q_1、Q_2、Q_3和Q_4、Q_5和Q_6是输入差分电路的电流镜负载。Q_7是个β倍增器晶体管，辅助提高电流镜的增益比率。Q_8是个偏置电流源。

偏置电流镜：Q_8和Q_9，Q_{10}和Q_{11}，Q_{12}和Q_{13}。这些电流镜用来设置整个运算放大器的直流偏置电流水平。

第二增益级：由共射极放大器Q_{17}以及50Ω发射极退化电阻组成。晶体管Q_{15}在第一级增益电路的输出与第二级增益电路的输入之间提供缓冲电路功能。30pF电容C_1提供极点分裂功能。

输出推挽放大器：晶体管Q_{14}和Q_{20}组成推挽电路的心脏。Q_{14}和Q_{20}基极之间的V_{BE}倍乘器[①]电路部分地将推挽电路偏置设置为导通状态。晶体管Q_{15}提供的正向输出电流可以达到电流极限。

12.3 运算放大器的一些实际限制因素

电压失调

第5章，我们分析了差分放大器，曾经假设它为理想器件（也就说完美匹配）。然而，实际中，器件之间总存在不匹配的情况，在运算放大器的前端，这种失配行为表现为一个电压失调。电压失调是必须在差分输入端有区别地施加的电压，该电压用来强迫运算放大器的输出归为零伏[②]。在商用放大器中，电压失调通常在毫伏以内，最大几个毫伏。

为理想运算放大器增加一个大小为V_{os}的电压发生器，可以对电压失调进行建模，如图12-13所示。在大增益电路结构中，电压失调尤其是个令人头疼的问题，如图12-14所示。可以看到，失调发生器与输入信号v_i串联在一起，电路的输出电压为

$$v_o = 1000v_i + 1000V_{os} \tag{12-5}$$

对于小输入信号而言，电压失调很可能将其淹没掉。

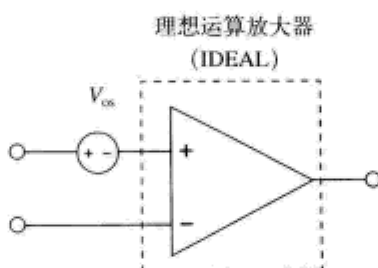


图12-13 运算放大器，标明电压失调模型V_{os}电压源

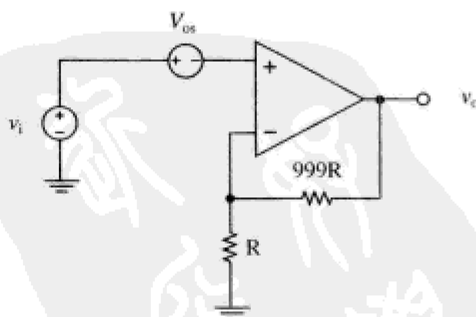


图12-14 增益为+1000倍的放大器，演示电压失调V_{os}的影响

美国国家半导体公司的数据手册摘录显示了运算放大器LM741的输入失调电压（如图12-15所示）。可以看到，不同等级运算放大器的指标稍有差异，电压失调通常为1mV左右，最大失调电压为几个mV。

① 这个“V_{BE}倍乘器”电路提供大约1.6倍的V_{BE}电压降。

② 运算放大器在没有有效的外部信号输入时，在正输入端或者负输入端施加失调电压，以使运算放大器的输出为零伏。——译者注

电压失调随温度漂移

另一个重要的设计问题是电压失调随温度漂移的问题。参见图12-16，我们知道这是运算放大器中典型的差分输入电路。可以看到，其电压失调为

参　数	条　件	LM741A			LM741			LM741C			单位
		Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	Min	Typ	Max	
输入失调电压	$T_A = 25°C$										
	$R_S \leqslant 10k\Omega$					1.0	5.0		2.0	6.0	mV
	$R_S \leqslant 50\Omega$		0.8	3.0							mV
	$T_{AMIN} \leqslant T_A \leqslant T_{AMAX}$										
	$R_S \leqslant 50\Omega$			4.0							mV
	$R_S \leqslant 10k\Omega$						6.0			7.5	mV

图12-15　运算放大器LM741的数据手册摘录（源自美国国家半导体公司），标明电压失调数据（美国国家半导体公司授权使用）

$$V_{os} = V_{BE1} - V_{BE2} \tag{12-6}$$

这是个差分电压，当输出差分电压为零时，该电压出现。对于正向偏置的晶体管，集电极电流和基极－发射极电压之间存在指数关系，晶体管Q_1的这一指数关系为

$$I_{C1} = I_S\left(e^{\frac{qV_{BE1}}{kT}} - 1\right) \approx I_S e^{\frac{qV_{BE1}}{kT}} \tag{12-7}$$

这里I_S为晶体管的反向饱和电流。现在，我们来求解双极性晶体管Q_1的基极－发射极电压方程

$$V_{BE1} = \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_{C1}}{I_S}\right) \tag{12-8}$$

得到单个V_{BE}的温度系数为

$$\frac{dV_{BE1}}{dT} = \frac{k}{q}\ln\left(\frac{I_{C1}}{I_S}\right) - \frac{kT}{qI_S}\frac{dI_S}{dT} = \frac{V_{BE1}}{T} - \frac{kT}{qI_S}\frac{dI_S}{dT} \tag{12-9}$$

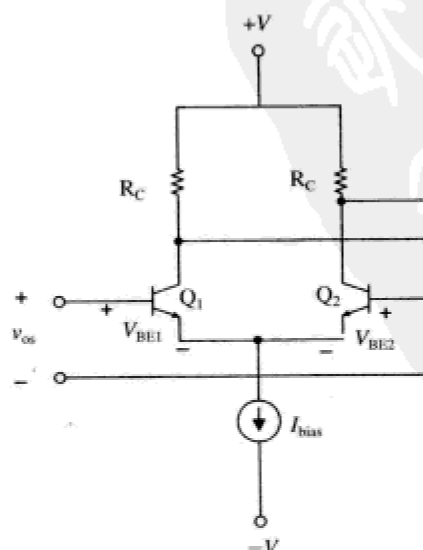


图12-16　求解双极性运算放大器失调电压随温度漂移关系的电路

式(12-9)中的第二项为漏电流的温度系数。现在，我们可以得到差分放大器的总体电压失调漂移为

$$\frac{dV_{os}}{dT} \approx \frac{dV_{BE1}}{dT} - \frac{dV_{BE2}}{dT} = \left(\frac{V_{BE1} - V_{BE2}}{T}\right) - \frac{kT}{qI_{S1}} + \frac{kT}{qI_{S2}} \tag{12-10}$$

晶体管匹配时，$I_{S1} = I_{S2}$，由漏电流漂移引起的电压失调成分相互抵消，式(12-10)可以简化为

$$\frac{dV_{os}}{dT} \approx \frac{V_{BE1} - V_{BE2}}{T} \approx \frac{V_{os}}{T} \tag{12-11}$$

使用该表达式，我们预测运算放大器741的电压失调漂移在室温条件下最大为4mV。

$$\frac{dV_{os}}{dT} \approx \frac{4\,\text{mV}}{300\,\text{K}} \approx 13\frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \tag{12-12}$$

这个计算结果与运算放大器741数据手册中的电压失调漂移值是一致的（如图12-17所示）。

平均输入失调电压漂移				15								μV/°C

图12-17 运算放大器LM741数据手册摘录（源自美国国家半导体公司），显示电压失调随温度变化的数值关系（美国国家半导体公司授权使用）

输入偏置电流与输入失调电流

运算放大器的输入差分放大器要求基极电流支持(使用双极性输入运算放大器的情况下)。运算放大器的数据手册中常标明这个输入电流为**输入偏置电流**，如图12-18所示。偏置电流非常小，但不是无限小。数据手册中还标明了**输入失调电流**，特指I_{B+}与I_{B-}之间的最大差异。

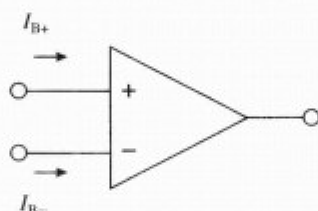


图12-18 运算放大器，标明极小的输入偏置电流I_{B+}和I_{B-}

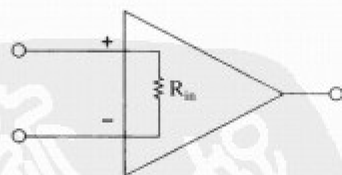


图12-19 运算放大器，标明差分输入电阻

差分输入电阻

运算放大器存在一个差模输入电阻（图12-19），可以用跨接在运算放大器输入端的大阻值电阻对其进行建模。

转换速率

前面我们已经看到，运算放大器中需要一个小电容以改善其开环的频率响应特性。通过极点分裂技术，我们可以创建一个低频主导极点。该反馈电容的另一个作用是形成转换速率极限。输入电路馈入该反馈电容的电流是有限的。因此，输出电压的时间变化率受该电容及其充电电流限制，即

$$\frac{dv}{dt} = \frac{I}{C} \tag{12-13}$$

当我们试图转换大信号时，转换速率极限就表现出来。考虑如图12-20所示的电压跟随器

电路，这里转化一个0~10V信号。可以看到，输出响应表明了正向、负向的转换速率极限。注意，两个方向的转换速率极限不一定相同。

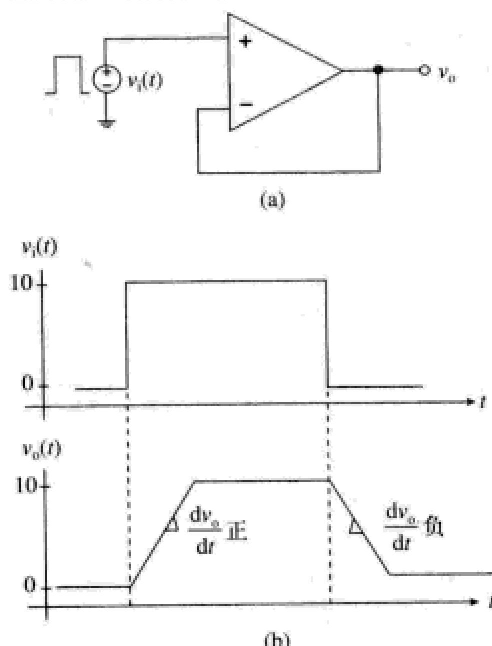


图12-20 显示转换速率极限效应的电路

输出电阻和电容负载

所有运算放大器的输出电阻都是有限的，我们将会看到，运算放大器驱动电容负载时，这个有限阻值的输出电阻（图12-21）将会严重影响运算放大器的闭环稳定性。

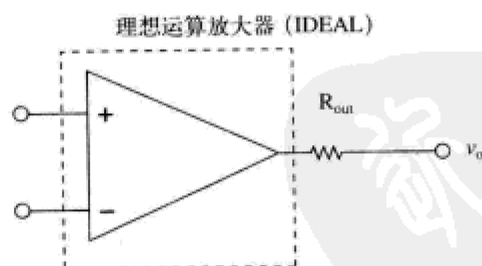


图12-21 运算放大器，标明输出电阻

例题12.2：运算放大器驱动电容负载

我们来考虑一个典型的运算放大器开环传递函数

$$a(s) \approx \frac{10^5}{(0.01s+1)(10^{-7}s+1)} \tag{12-14}$$

该运算放大器的开环传递函数$a(s)$的频率响应曲线如图12-22所示，这里我们看到，其低频极点为100rad/s，高频极点为107rad/s。这是多数商用运算放大器的典型传递函数。

现在，如果我们在跟随器电路中使用该运算放大器来驱动一个电容负载，我们来观察将会发生什么情况（如图12-23a所示）。注明运算放大器输出电阻的运算放大器模型如图12-23b所示。在该例中，我们假设运算放大器的输出电阻为100Ω。

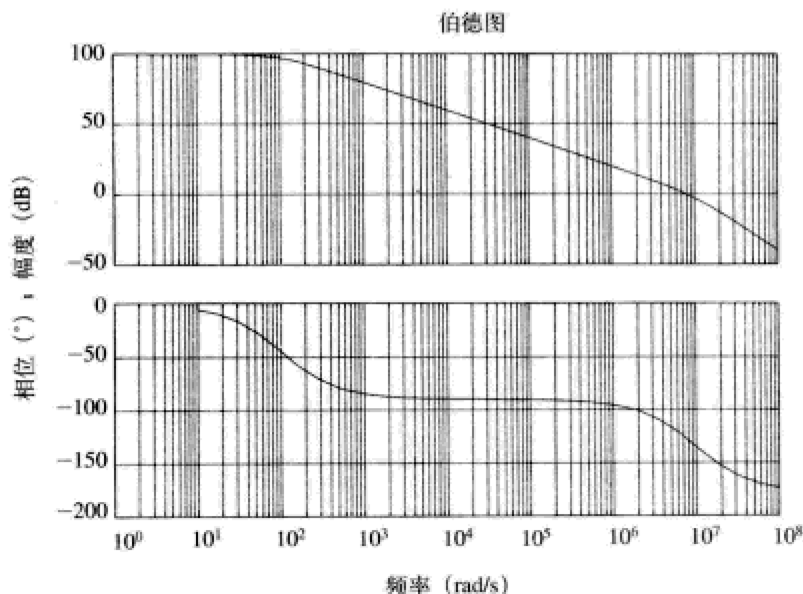
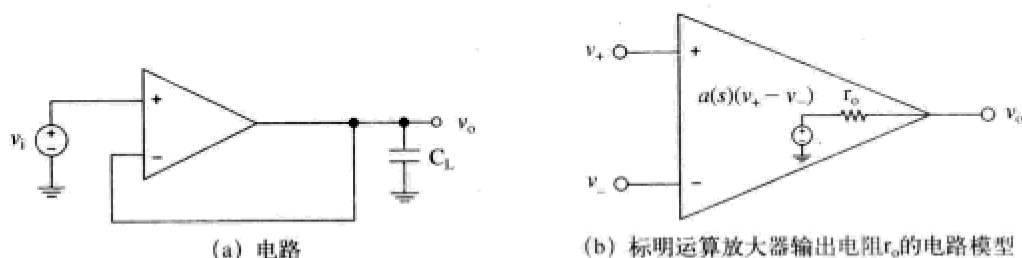


图12-22 典型运算放大器传递函数$a(s)$的伯德图



(a) 电路　　(b) 标明运算放大器输出电阻r_o的电路模型

图12-23 运算放大器射随器驱动电容负载

这个电容负载放大器的原理框图如图12-24所示。

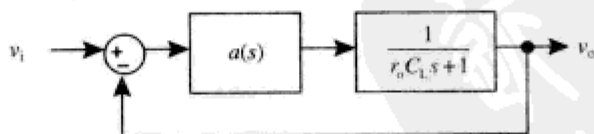


图12-24 电容负载运算放大器跟随器的原理框图

当我们绘制出该电路的环路传输的幅度响应和相位响应时（如图12-25所示），可以看到，相位裕度非常紧张，仅有22°。与预计相同，闭环系统的阶跃响应（如图12-26所示）受这个糟糕的相位裕度影响，存在明显的过冲。低相位裕度是由反馈环路内的低通滤波器，以及运算放大器输出电阻与负载电容的交互作用造成的。

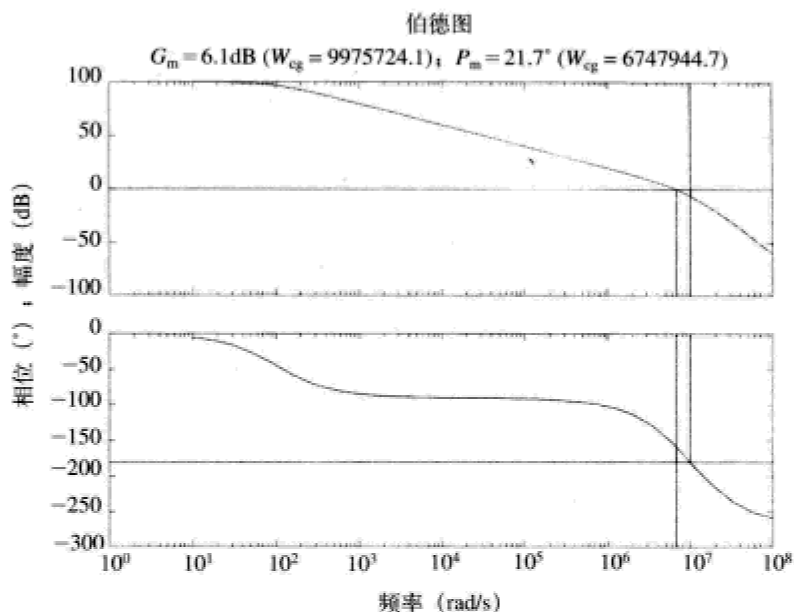


图12-25 环路传输的增益和相位伯德图，表明负载电容为1000pF时，运算放大器的相位裕度仅为21.7°

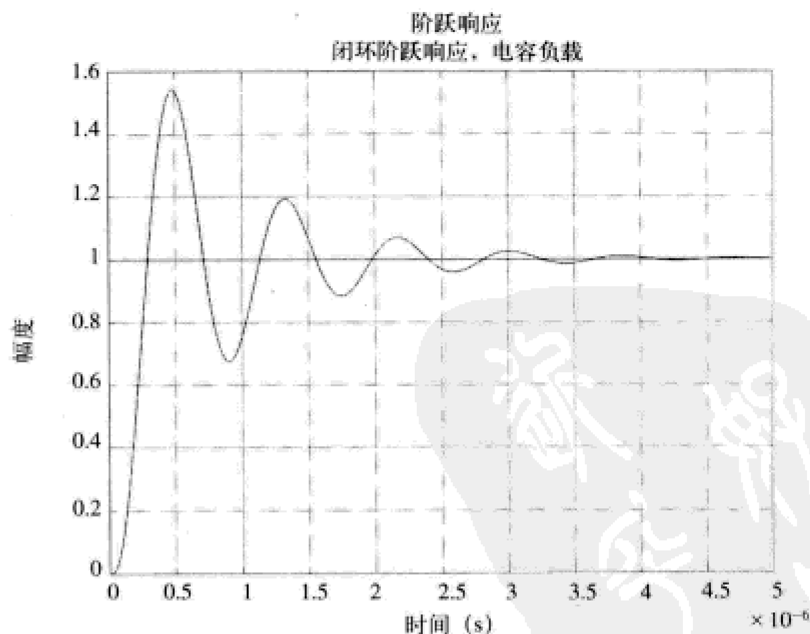


图12-26 电容负载跟随器的单位阶跃响应

12.4 本章习题

习题12.1

参考运算放大器μA741的数据手册，假设使用该运算放大器驱动一个20V峰峰值的正弦波信号，并且无转换速率限制，求解正弦波信号的最大频率（以Hz为单位）。使用数据手册中给定的典型参数取值来确定这个最大频率。

习题12.2

如图12-27所示的741A电路驱动一个电阻负载。输入信号为频率为100Hz、峰峰值为20V的正弦波信号。再次使用数据手册中给定的典型参数取值，绘制输出电压的时间变化关系。

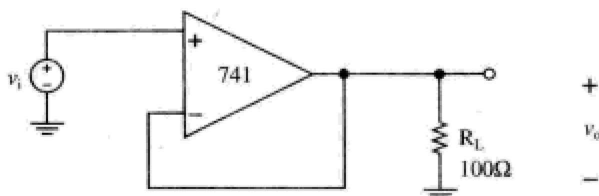


图12-27 运算放大器驱动电阻负载

习题12.3

如图12-28所示的741A电路，求解其输出电压。将运算放大器的输入偏置电流、电压失调因素考虑在内。使用数据手册中给定的典型参数值。

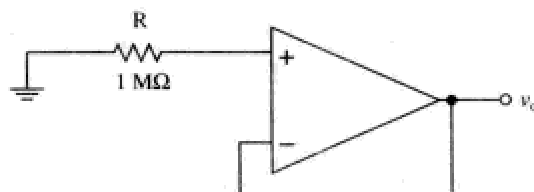


图12-28 电路演示运算放大器的输入偏置电流与电压失调作用

习题12.4

该习题重温运算放大器跟随器驱动电容负载的问题。减轻驱动电容负载时不稳定作用的一种方法是，使用一个外部电阻R_{EXT}将运算放大器跟随器电路与电容负载C_L隔离开来，如图12-29所示。绘制该电路的原理框图，包含v_i、v_o和v_f，评述该方案是如何通过提高它的相位裕度来稳定该电路的。

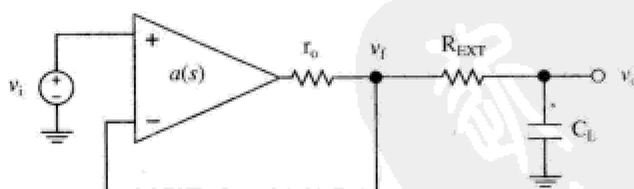


图12-29 提高运算放大器跟随器驱动电容负载C_L稳定性的策略。运算放大器的本征输出电阻r_o，传递函数$a(s)$

12.5 参考文献

下列参考文献提供了丰富的信息。部分作者非常喜欢的参考文献是由Bob Widlar撰写的。Bob Widlar是运算放大器原创设计师之一。Solomon、Gray和Meyer的参考文献也对运算放大器技术进行了非常好的总结。

Allen, P. E., "Slew Induced Distortion in Operational Amplifiers," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 12, no. 1, February 1977, pp. 39-44.

Bowers, D. F., and Wurcer, S. A., "Recent Developments in Bipolar Operational Amplifiers," *Proceedings of the 1999*

Bipolar/BiCMOS Circuits and Technology Meeting, September 26-28, 1999, pp. 38-45.

Brown, J. L., "Differential Amplifiers that Reject Common-Mode Currents," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 6, no. 6, December 1971, pp. 385-391.

Chuang, C. T., "Analysis of the Settling Behavior of an Operational Amplifier," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 17, no. 1, February 1982, pp. 74-80.

Comer, D. T., and Comer, D. J., "A New Amplifier Circuit with Both Practical and Tutorial Value," *IEEE Transactions on Education*, vol. 43, no. 1, February 2000, p. 25.

Erdi, G., "Common-Mode Rejection of Monolithic Operational Amplifiers," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 5, no. 6, December 1970, pp. 365-367.

Gray, P., and Meyer, R., "Recent Advances in Monolithic Operational Amplifier Design," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 21, no. 3, May 1974, pp. 317-327.

Hearn, W. E., "Fast Slewing Monolithic Operational Amplifier," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 6, no. 1, February 1971, pp. 20-24.

Huijsing, J. H., and Tol, F., "Monolithic Operational Amplifier Design with Improved HF Behaviour," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 11, no. 2, April 1976, pp. 323-328.

Ruediger, V. G., Hosticka, V.G. and B. J., "The Response of 741 Op Amps to Very Short Pulses," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 15, no. 5, October 1980, pp. 908-910.

Solomon, J. E., "The Monolithic Op Amp: a Tutorial Study," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 9, no. 6, December 1974, pp. 314-332.

Soloman, James E., "A Tribute to Bob Widlar" *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. 26, no. 8, August 1991, pp. 1087-1089.

Soundararajan, K., and Ramakrishna, K., "Characteristics of Nonideal Operational Amplifiers," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 21, no. 1, January 1974, pp.69-75.

Treleaven, D., and Trofimenkoff, F., "Modeling Operational Amplifiers for Computer-Aided Circuit Analysis," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 18, no. 1, 1971, pp.205-207.

Widlar, R. J., "A New Breed of Linear ICs runs at 1-volt levels," *Electronics*, March 29, 1979, pp.115-119.

______ , "DC Error Reduction in Bipolar Opamps," *1980 IEEE Solid State Circuits Conference*, vol. 23, February 1980, pp. 204-205.

______ , "Design Techniques for Monolithic Operational Amplifiers," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 4, no. 4, August 1969, pp. 184-191.

______ , "Low Voltage Techniques [for Micropower Operational Amplifiers]," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 13, no. 6, December 1978, pp. 838-846.

______ , "Some Circuit Design Techniques for Linear Integrated Circuits," *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. CT-12, no. 4, December 1965, pp. 586-590.

Widlar, R. J., Dobkin, R., and Yamatake, M., "New Op Amp Ideas," *National Semiconductor Application Note 211*, December 1978.

Widlar, R. J., and Yamatake M., "A 150W Opamp," *1985 IEEE Digest of Technical Papers, Solid State Circuits Conference*, vol. 27, February 1985, pp. 140-141.

Wooley, B. A., and Pederson, D. O., "A Computer-Aided Evaluation of the 741 Amplifier," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 6, no. 6, December 1971, pp. 357-366.

Yang, H. C., and Allsot, D. J., "Considerations for Fast Settling Operational Amplifiers," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 37, no. 3, March 1990, pp. 326-334.

第13章　电流反馈运算放大器

本章概要

- 电压反馈运算放大器从输出到输入的主反馈通路承载的是电压信号，而电流反馈运算放大器则不同，它从输出到输入的主反馈通路承载的则是电流信号。电压反馈运算放大器的增益带宽乘积为常数，而电流反馈运算放大器的带宽则不存在这一限制因素，可以达到非常高的带宽。不过，它又有其他一些限制因素。

13.1　传统电压反馈运算放大器及其“增益带宽乘积”常数

传统电压反馈运算放大器（Voltage-feedback operational amplifier）电路如图13-1所示。我们假设运算放大器受极低频段的单极点控制。在此假设条件下，我们可以如此描述运算放大器的开环传递函数[①]

$$a(s) \approx \frac{A_0}{\tau s+1} \approx \frac{K}{s} \tag{13-1}$$

这里A_0为放大器的直流增益，$1/\tau$为运算放大器主导极点的极点频率。可以看到，我们做如此处理，正是将运算放大器近似处理为关注频率段的积分器（integrator）。这大大简化了下面讨论中使用的数学理论。

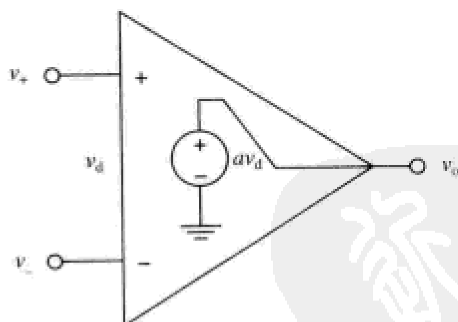


图13-1　传统电压反馈运算放大器。输出电压为$v_o = av_d = a(v_+ - v_-)$

我们将该放大器放置到同相放大电路中，如图13-2a所示。该放大器的理想低频闭环增益为

$$G = 1+\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1+R_2}{R_1} \tag{13-2}$$

我们使用图13-2b的原理框图，来计算该放大器的整体传递函数为

① 因为我们感兴趣的是高频截止点的细节，所以我们将作如下简化假设：低频极点为直流频率，或者接近直流频率。这大大简化了推导过程中使用的数学理论。通用运算放大器在非常低的频率存在一个主控极点，更高频率的极点会影响闭环稳定性。主控极点的频率近似为g_m/C_c，这里g_m为输入电路的跨导，C_c为补偿电容的大小。对于典型运算放大器来说，主控极点为几个赫兹。

$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{\dfrac{K}{s}}{1+\left(\dfrac{K}{s}\right)\left(\dfrac{R_1}{R_1+R_2}\right)}=\frac{K}{s+\dfrac{K}{G}}=\frac{G}{\dfrac{G}{K}s+1} \tag{13-3}$$

（a）配置为正增益放大器　　　（b）原理框图

图13-2　传统电压反馈运算放大器

可以看到，该放大器的低频增益为G（与预计一致），带宽为K/G。因此，如果闭环增益增大，那么闭环带宽将减小。这就是电压反馈放大器的增益－带宽乘积（gain-bandwidth product）直方图，如图13-3所示。稍后我们将会看到，电流反馈运算放大器并不遵从相同的增益－带宽乘积这一限制因素。

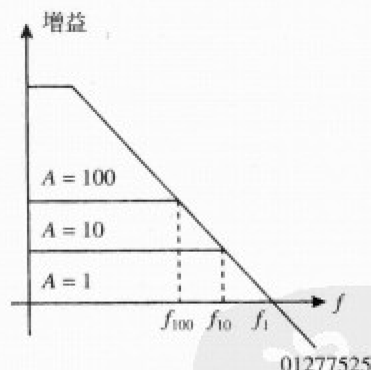


图13-3　传统电压反馈运算放大器增益－带宽乘积演示。随着闭环增益增大，闭环带宽减小

13.2　传统运算放大器的转换速率限制

在传统运算放大器中，常使用一个补偿电容来改善放大器的开环频率响应，以使其开环频率响应仅受单个极点控制。在传统内部补偿运算放大器中（比如下面图13-4所示的运算放大器LM741），器件内部有一个补偿电容。我们能够对该电容进行充电和放电的最大转换速率（并且输出电压也是）依赖于前级差分电路的偏置电流（由晶体管Q_8原始提供）。该运算放大器的转换速率（slew rate）指标为0.5μs左右，该指标与其15μA左右的输入偏置电流是一致的[①]。

① 转化速率计算方法极为简单：$dV/dt=I/C$，这里I为输入级电路的偏置电流，C为补偿电容的大小。如果想详细了解运算放大器LM741内部工作过程，可以参考Gray、Hurst Lewis和Meyer的著作*Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*, 4th edition的6.8节。该参考文献表明，电流I为19μA左右，对于补偿电容为30pF的情况，形成的转换速率为0.6V/μs左右。

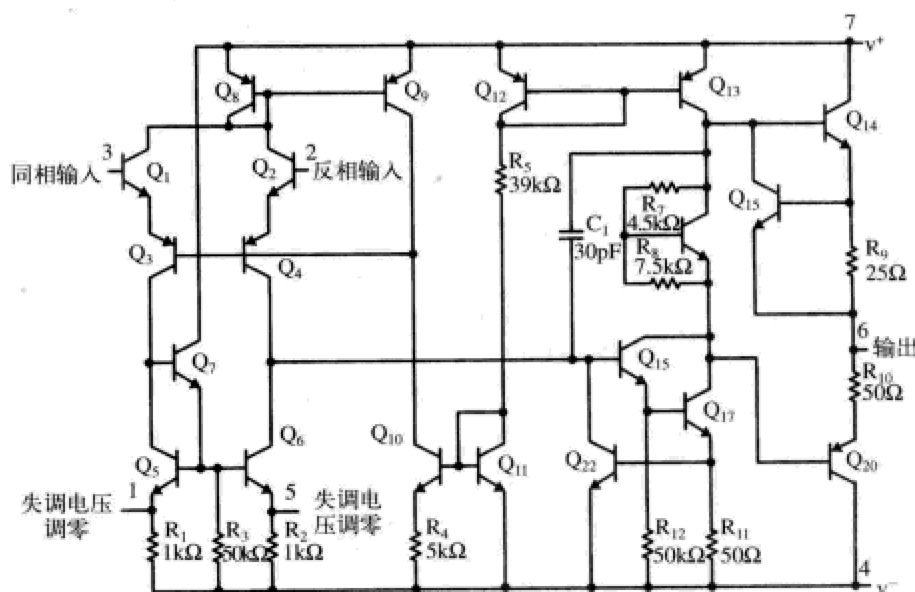


图13-4 运算放大器LM741的简化电路①。注意30pF补偿电容C_1

13.3 电流反馈运算放大器基础

基本电流反馈运算放大器（current-feedback operational amplifier）（如图13-5所示）与传统的电压反馈运算放大器在诸多方面存在差异。负输入端（v^-）具有非常低的输入电阻（专门设计为如此），这是因为这个负输入节点正是馈入返回电流的位置。单位增益缓冲电路（Q_1–Q_3、Q_2–Q_4）强迫v^-端的输入信号跟踪v^+端的输入信号的变化②。

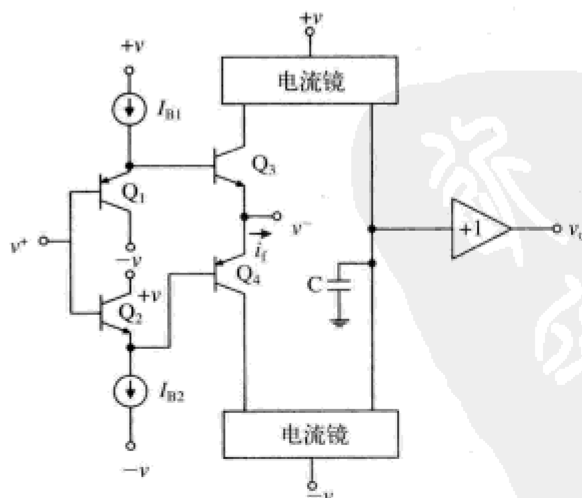


图13-5 电流反馈运算放大器的一种电路结构

① 这个电路图来自美国国家半导体公司，其他供应商也制造该运算放大器。美国国家半导体公司授权使用。

② 这类由4个晶体管构成的跟随器有些时候也称为“钻石缓冲器（diamond buffer）”，或“钻石跟随器（diamond follower）”。参见Burr-Brown公司（后被Texas Instruments，即美国德州仪器公司收购）K. Lehmann撰写的应用笔记AB-181，“Diamond Transistor OPA660”，以及W.Lillis和A.Wang的4893091号美国专利，“Complementary current mirror for correcting input offset voltage of diamond follower, especially as input stage for wideband amplifier”，该专利在1990年1月9日被授予专利权。

因为我们在反相输入端$v-$使用负电流反馈[①]，所以我们要求$v-$节点具有非常低的输出电阻，以确保输入电阻不会严重影响反馈电流的大小。输入放大器Q_3/Q_4，以及相应的电流镜，将流出负输入端的反馈电流信号i_f在电流镜输出端这一高增益节点处转换为电压信号。高增益节点的电压信号经单位增益缓冲电路进一步缓冲处理后再进行输出。

从图13-5可以看到，在放大器内部并没有发生电压放大。输入跟随器$Q_1-Q_2-Q_3-Q_4$的电压增益为+1倍。电流镜提供的电流增益为+1倍，其电压增益非常小。在高增益节点处，电流镜输出的电流信号被转换为电压信号，经缓冲后再进行输出。因此，在电流反馈运算放大器中不存在"米勒效应"。

为了近似分析电流反馈运算放大器的增益和带宽，我们来考虑一个简化的电路模型，该模型抓住了电流反馈放大器的一阶效应。图13-6表明，该电流反馈运算放大器被降格为一个简化形式。输入电阻R_{in}为晶体管Q_3的输出电阻和Q_4的输出电阻的并联组合[②]。

$$R_{in} \approx \frac{1}{g_{m3}} \left\| \frac{1}{g_{m4}} \right. \tag{13-4}$$

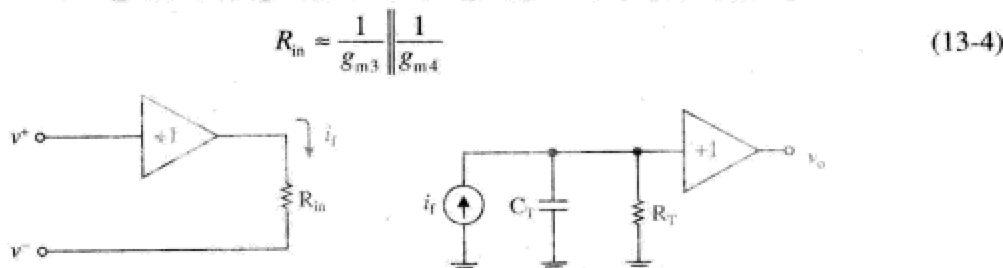


图13-6 电流反馈运算放大器的等效电路。反馈电流i_f被镜像至高增益节点

对于晶体管Q_3/Q_4的偏置电流为250μA的情况，输入电阻在52Ω左右[③]。

对于电流反馈放大器的一阶效应，受放大器的高增益节点的R_TC_T时间常数影响，存在一个单一极点。高增益极点的电阻R_T为高端电流镜与低端电流镜的输出电阻的并联组合（如图13-5所示）。假设我们使用的是共射共基放大器电流镜或者Wilson电流镜（可以增大输出电阻），那么高增益节点的电阻为

$$R_T \approx \frac{r_{\mu,npn}}{2} \left\| \frac{r_{\mu,npn}}{2} \right. \tag{13-5}$$

假设电流镜的偏置电流为250μA，基极宽度调制因子$\eta_{npn} = \eta_{pnp} = 10^{-3}$，$\beta_{Fnpn} = \beta_{Fpnp} = 100$，该增益节点的电阻为2.6MΩ，即$R_T = 2.6\text{M}\Omega$[④]。

电容C_T是由器件参数和内部布局的寄生效应形成的。

如果我们对放大器的直流特性的准确性感兴趣，那么该放大器的直流电压增益就显得非常重要。开环电压增益为

$$a_{v,ol} = \frac{R_T}{R_{in}} \approx \frac{2.6 \times 10^6}{52} \approx 50\,000 \tag{13-6}$$

① 电流反馈的概念并不新颖；使用阴极反馈方法设计真空管放大器的历史可以追溯到20世纪20年代。

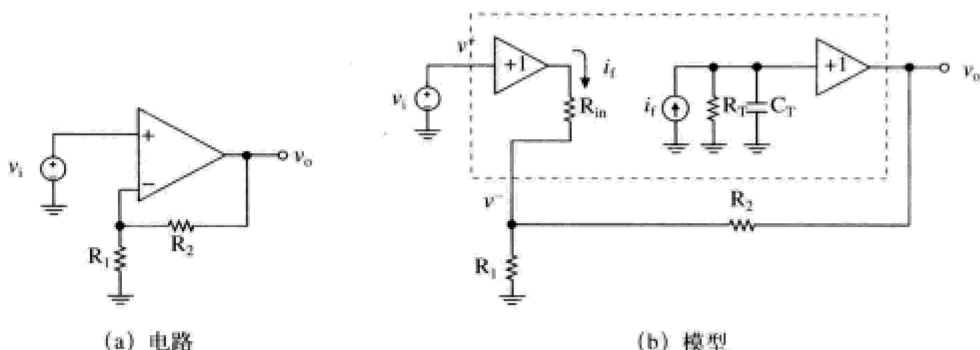
② 该简化计算忽略了基极扩展电阻r_x。

③ 记住，晶体管工作在正向放大区时，如果其基极电阻r_x以及从基极端点看到的源电阻可以忽略不计，则从其发射极看进去的输入电阻约为$1/g_m$。输入电阻的闭环计算为

$$\text{当}R_s, r_x \ll r_\pi \text{时} \; r_{in,emitter} \approx \frac{R_s + r_x + r_\pi}{h_{fe}+1} \approx \frac{1}{g_m}$$

④ 这些数字与Analog Devices公司的运算放大器AD844一致，AD844数据手册中列出，反相输入端的名义输入电阻为50Ω，高增益节点的电阻为3MΩ。

电流反馈运算放大器配置为同相放大电路的电路结构如图13-7所示。该电路的原理框图如图13-8所示。



(a) 电路　　　　(b) 模型

图13-7 电流反馈运算放大器配置为正增益

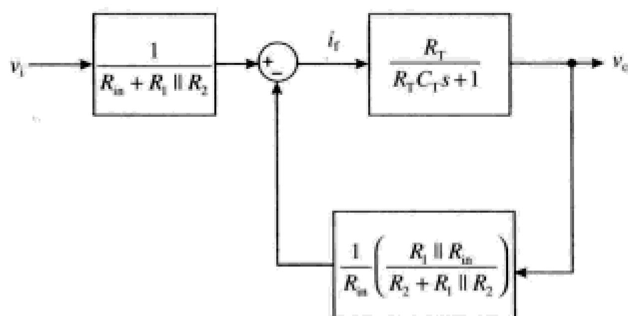


图13-8 电流反馈运算放大器配置为正向闭环增益的原理框图

该放大器的总体增益为

$$\frac{v_o}{v_i}=\left(\frac{1}{R_{in}+R_1\|R_2}\right)\left(\frac{\dfrac{R_T}{R_TC_Ts+1}}{1+\left(\dfrac{R_T}{R_TC_Ts+1}\right)\left(\dfrac{1}{R_{in}}\right)\left(\dfrac{R_1\|R_{in}}{R_2+R_1\|R_{in}}\right)}\right) \tag{13-7}$$

尽管该公式看起来像一团乱麻，但是认识到单位增益输入缓冲电路的输入电阻非常小（$R_{in}<<R_1$、$R_{in}<<R_2$），高增益节点的电阻非常大（即$R_T>>R_1$、$R_T>>R_2$），我们则可以将该公式进行简化处理。我们使用这些假设，可以将放大器的增益变换为

$$\frac{v_o}{v_i}\approx\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right)\left(\frac{R_T}{R_TC_Ts+1+\dfrac{R_T}{R_2}}\right)\approx\left(\frac{R_1+R_2}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R_2C_Ts+1+\dfrac{R_2}{R_T}}\right)\approx G\left(\frac{1}{R_2C_Ts+1}\right) \tag{13-8}$$

可以看到，电流反馈运算放大器的理想闭环增益G与电压反馈放大器相同。还可以看到，电流反馈运算放大器不存在增益－带宽乘积限制问题。电流反馈运算放大器的整体带宽确实依赖于反馈电阻R_2的大小，但是我们可以独立设置闭环增益（通过改变电阻R_1的取值），而不影响其带宽①。

① 注意，这里分析的只是放大器的一阶效应。二阶效应确实会限制电流反馈运算放大器的带宽。

接下来，我们来评论电流反馈运算放大器的稳定性。我们注意到，前面在忽略高频极点之后，显示的带宽大致为$1/(R_2C_T)$，如图13-9所示。我们还注意到，确实还存在没有在这个简化模型中说明的更高频率的极点。因此，制造商通常会明确标出确保放大器稳定工作的最小反馈电阻要求①。

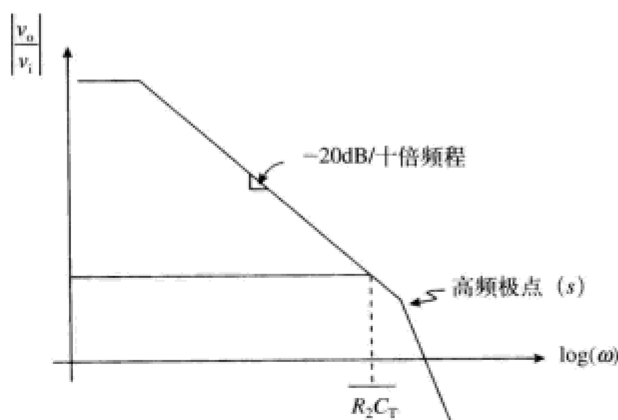


图13-9　演示反馈电阻R_2对闭环带宽影响的伯德图

13.4　电流反馈运算放大器无转换速率极限

在电流反馈运算放大器中，不存在与传统电压反馈运算放大器相同的转换速率极限问题。注意，在电流反馈运算放大器中，注入到输入电路反相输入端（$v-$）的电流被镜像输出，在高增益节点最终对电容C_T进行充电与放电。因此，为了在放大器的输出端形成大的电压摆幅，需要将更大的电流反馈到反相输入端（$v-$）。沿着这一推理路线，我们可以得到，在电流反馈运算放大器不存在本征转换速率极限②。

例题13.1：一个较为简略的电流反馈运算放大器分立设计

我们来分析一个分立电流反馈运算放大器电路的演示设计，并且对其进行仿真，该设计用晶体管2N3904和2N3906来搭建。注意，这绝不是个最优化的电流反馈运算放大器设计，最终形成的设计电路极可能存在电压失调、瞬态响应等问题。不过，这个简单的例题确实演示了前面分析讨论的许多概念。

图13-10所示是设计电路，刚开始配置为单位反馈。首先，假设电阻R_1的阻值为1MΩ。在该电路中，我们预计其为单位增益，因为，正如我们在前面计算的那样，闭环增益（在低频段）约为

$$G = 1 + \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \tag{13-9}$$

贯穿整个设计，我们可以看到下列功能模块：

- 晶体管Q_1~Q_4为输入缓冲电路，在同相输入端（$v+$）提供高输入电阻（Q_1和Q_3的基极），

① 注意，如果你试图通过减小R_2来增大放大器的带宽，实际上你甚至可以进入高频极点区，这将会形成潜在的稳定性问题。

② 当然，存在影响电流反馈运算放大器最大转换速率的二阶限制因素。在高增益节点存在一些寄生电容。然而，对某些电流反馈运算放大器的测量表明，它们的转换速率确实很高。比如，Analog Devices公司的AD844（2000V/μs），美国国家半导体公司的LM6181（2000V/μs），Texas Instruments公司的TMS3110（1300V/μs），Linear Technology公司的LT1227（1100V/μs），还有很多。

在反相输入端（$v-$）提供低输入电阻（Q_2和Q_4的发射极）。晶体管Q_1和Q_3受电流源进行直流偏置设置，晶体管Q_2和Q_4的集电极电流约为

$$I_{C2} \approx I_{C4} \approx \sqrt{I_{C1} I_{C3}} \tag{13-10}$$

在本书的后续章节中（16.6节）我们将会看到该计算结果是如何得到的。

- 晶体管Q_5/Q_7和Q_6/Q_8为电流镜，它们将Q_2和Q_4的集电极电流镜像输出到高增益节点。这些电流镜的作用为电流缓冲器，将反馈电流镜像到高增益节点。高增益节点是Q_7和Q_8的集电极连接。该节点的输出电阻为电流镜晶体管Q_7和Q_8的输出电阻的并联组合；该节点相对地的整体电阻为该电流镜的电阻与跟随器电路Q_9/Q_{10}的输入电阻的并联组合。
- 晶体管Q_9/Q_{10}为单位增益推挽输出电路，在输出节点v_{out}提供低电阻。
- R_2为反馈电阻，R_1为反相输入端（$v-$）的输入电阻。注意，我们在前面对电流反馈运算放大器的分析表明，主要带宽限制因素是我们选择的反馈电阻R_2。

SPICE仿真得到的偏置工作点参数的数值告诉我们一些有趣的结论。比如，输入缓冲电路（Q_1-Q_4）确实存在电压失调，与电路配置相同。可以看到，输入电压为0V时，反相输入端（$v-$）的电压为−12.9mV。这个电压失调层层下传，流经放大器的其余电路，最终导致同相输入端（$v+$）为零电位时，输出电压为−681mV。

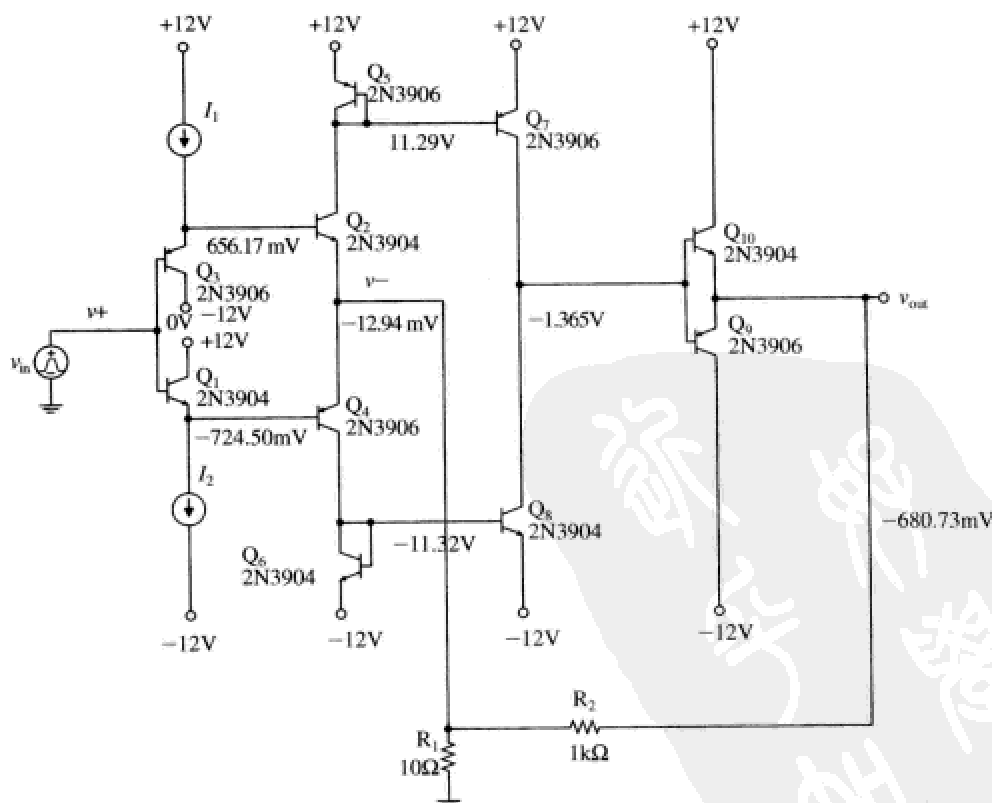


图13-10 分立设计电流反馈运算放大器，配置为正增益。标注的节点电压是PSPICE仿真的预测值

该运算放大器在电阻$R_1 = 1\text{M}\Omega$、$R_1 = 100\Omega$、$R_1 = 10\Omega$时的交流分析结果如图13-11所示。可以看到，闭环增益在很大范围内变化时，闭环带宽近似为常数。

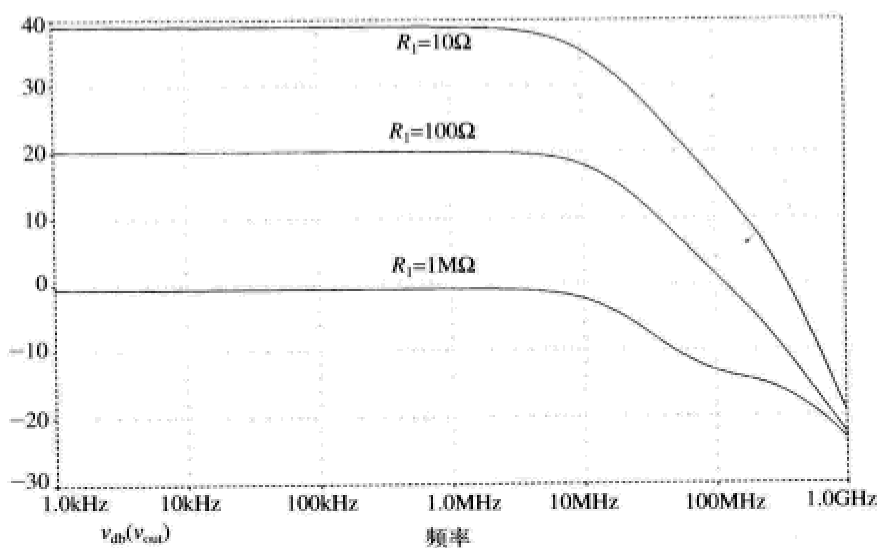


图13-11　分立交流反馈运算放大器的交流分析的PSPICE仿真结果曲线

表13-1是PSPICE仿真结果与SPICE仿真得到的理想增益、最终的带宽以及放大器增益－带宽乘积的比较总结表。可以看到，在计算增益与PSPICE增益之间存在一些微小差异，差异部分是由于简化分析中没有包含负载效应的影响造成的。

表13-1　电流反馈运算放大器设计实例的PSPICE仿真结果

R1	理想增益	理想增益（dB）	PSPICE增益	PSPICE增益（dB）	PSPICE小信号带宽	GBP（增益－带宽乘积）
1MΩ	1.001	0.009	0.93	−0.6	15MHz	14MHz
100Ω	11.0	20.8	10.1	20.1	12.7MHz	128.5MHz
10Ω	101	40.1	88.1	39	8.7	766.5MHz

电流反馈运算放大器增益配置为101倍时的阶跃响应曲线如图13-12所示。输入阶跃信号

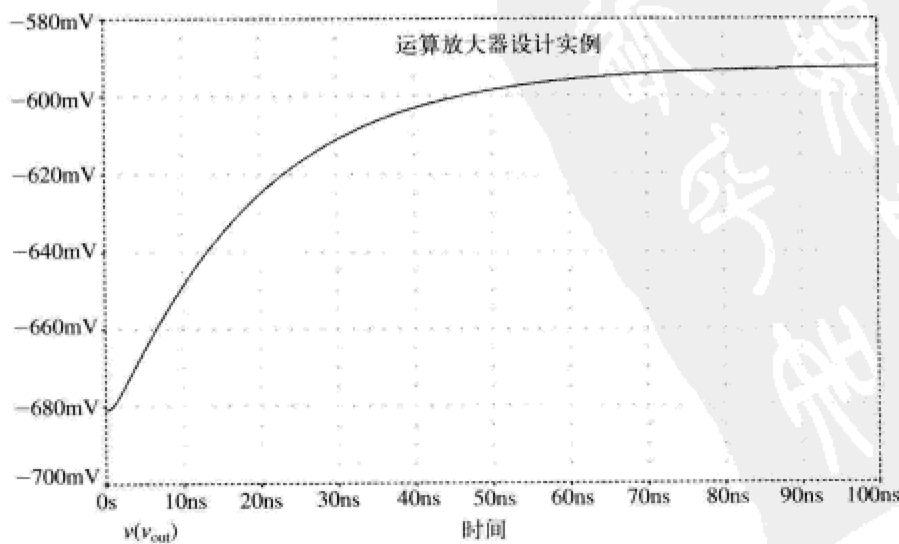


图13-12　分立电流反馈运算放大器的阶跃响应的PSPICE仿真结果

设置为1mV。上升时间约为41ns，与8.7MHz的小信号带宽一致①。注意该放大器存在糟糕的电压失调②。

13.5 电流反馈放大器的制造商数据手册信息

我们来看一下制造商数据手册的摘录内容。如图13-13所示是美国国家半导体公司的器件LM6181的数据手册的首页的节选。可以看到，该放大器具有很高的转换速率（2000V/μs）。该运算放大器常用于视频放大应用中，视频放大器常要求高带宽、高转换速率、低差分相位以及低差分增益。

National Semiconductor

May 1998

LM6181
100 mA, 100 MHz Current Feedback Amplifier

General Description

The LM6181 current-feedback amplifier offers an unparalleled combination of bandwidth, slew-rate, and output current. The amplifier can directly drive up to 100 pF capacitive loads without oscillating and a 10V signal into a 50Ω or 75Ω back-terminated coax cable system over the full industrial temperature range. This represents a radical enhancement in output drive capability for an 8-pin DIP high-speed amplifier making it ideal for video applications.

Built on National's advanced high-speed VIP™ II (Vertically Integrated PNP) process, the LM6181 employs current-feedback providing bandwidth that does not vary dramatically with gain; 100 MHz at $A_V = -1$, 60 MHz at $A_V = -10$. With a slew rate of 2000V/μs, 2nd harmonic distortion of −50 dBc at 10 MHz and settling time of 50 ns (0.1%) the LM6181 dynamic performance makes it ideal for data acquisition, high speed ATE, and precision pulse amplifier applications.

Features

(Typical unless otherwise noted)

- Slew rate: 2000 V/μs
- Settling time (0.1%): 50 ns
- Characterized for supply ranges: ±5V and ±15V
- Low differential gain and phase error: 0.05%, 0.04°
- High output drive: ±10V into 100Ω
- Guaranteed bandwidth and slew rate
- Improved performance over EL2020, OP160, AD844, LT1223 and HA5004

Applications

- Coax cable driver
- Video amplifier
- Flash ADC buffer
- High frequency filter
- Scanner and Imaging systems

图13-13 美国国家半导体公司的电流反馈运算放大器LM6181。美国国家半导体公司授权使用

LM6181的简化电路如图13-14所示。存在一个由4个晶体管组成的输入缓冲电路，构成运算放大器的正相输入端、反相输入端。反馈电流被镜像到一个级联电流镜。共射共基放大器电流镜在高增益节点提供更高的电流源输出电阻，因此也提供了更大的开环电压增益。高增益节点处的电压信号又被另一个4个晶体管构成的单位增益缓冲电路缓冲到输出端。可以看到，在输出端存在短路保护；如果输出电阻R两端的电压大约超过0.6V，输出晶体管将被关闭。

① 输入阶跃信号必须足够小，以保证晶体管的工作点不会发生严重改变，并且放大器没有转换速率极限，因此使用了1mV的小输入阶跃信号。记住一阶系统上升时间的计算结果，可以使用公式，上升时间＝0.35/带宽，来进行计算，这里带宽的单位为Hz。该运算放大器有多个极点（该例中多于12个）。然而，放大器的小信号交流响应和小信号阶跃响应确实是受单个极点控制，这是由高增益节点的负载效应造成的。

② 这就是输出为什么从−680mV（而不是0V）开始的原因。在实际电流反馈运算放大器中，增加额外偏置设置电路可以大大减小这个电压失调。

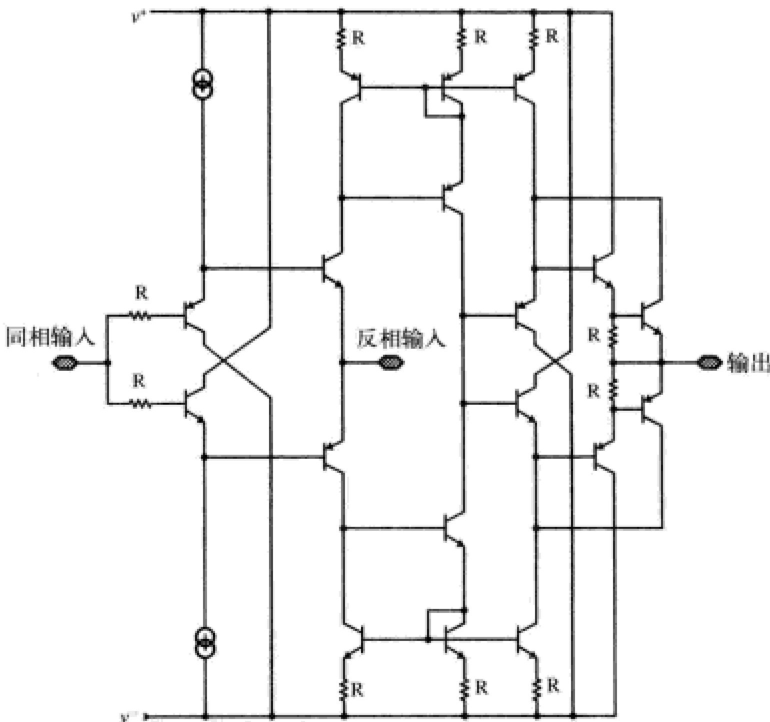
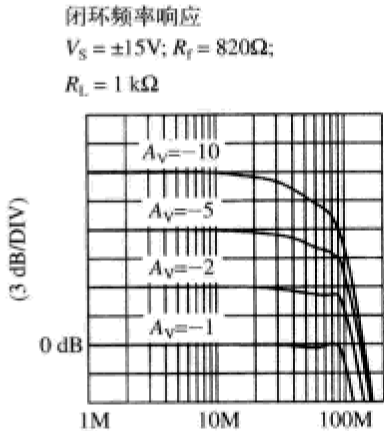


图13-14　美国国家半导体公司的电流反馈运算放大器的简化电路图。美国国家半导体公司授权转载

闭环频率响应曲线（如图13-15所示）表明，增益在−1到−10的大范围内变化时，带宽大致为常数。



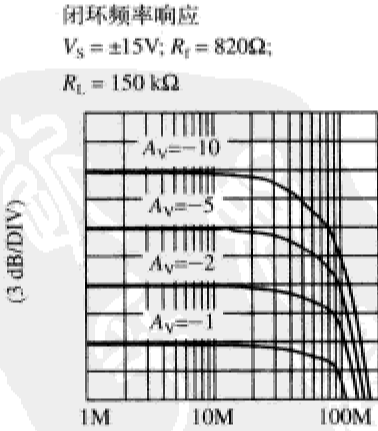


图13-15　美国国家半导体公司的电流反馈运算放大器LM6181的小信号带宽曲线。美国国家半导体公司授权使用

13.6　电流反馈运算放大器的更精细模型及其限制因素评论

电流反馈运算放大器更为精细的模型如图13-16所示，将某些更深入的影响，比如影响带宽、增益和稳定性的因素进行了建模。比如，电容C_{in-}对反相输入节点的寄生电容进行建模。

该电容是由内部晶体管的电容、焊接引线造成的外部寄生电容、集成电路的管脚等形成的。电阻r_o对输出单位增益缓冲电路的小输出电阻（但是不是无限小）进行建模。初始分析使用简化等效电路模型（如图13-16所示）之后，常需要设计者将这些附加的电路元件考虑在内，这些附加电路元件会影响电路的工作。

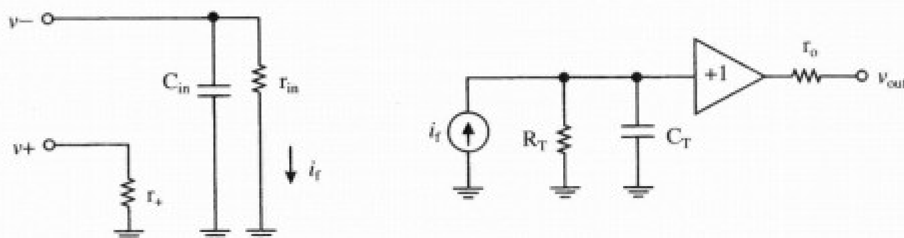


图13-16 电流反馈运算放大器更为精细的模型。附加到前一模型中的寄生效应包括：r_+（同相输入端的输入电阻）、C_{in-}（反相输入端的输入电容）、r_o（输出电阻）

与电压反馈运算放大器相比，当使用电流反馈运算放大器时，还要将其他一些设计问题考虑在内。

- *直流性能*。电流反馈运算放大器工作时是否具有可接受的直流性能（比如电压失调、CMRR等）依赖于前端的NPN型晶体管和PNP型晶体管之间的匹配程度。电压失调的更进一步降级是由输入缓冲电路中的晶体管的欧拉电压（Early voltage）引起的。
- *反相输入端的低电阻*。多数电流反馈放大器本身就依赖于反相输入端的低电阻。
- *反馈电阻的最小值*。受稳定性影响，在闭环配置中必须使用反馈电阻的最小值以确保放大器的稳定性。

13.7 本章习题

习题13.1

使用传统运算放大器模型，使用运算放大器741绘制一个电路，提供+100倍增益。求解该放大器的带宽。

习题13.2

使用AD844的数据手册，抽取电流反馈运算放大器的参数，填写图13-6所示的等效电路模型。

习题13.3

使用开路时间常数方法，估计图13-5电路中的4晶体管输入电路（Q_1-Q_4）的带宽。假设Q_3、Q_4的偏置设置为集电极电流I_o，每个晶体管的电流增益－带宽乘积为$\omega_T=6.3\times10^9$rad/s。假设每个晶体管的$C_\mu=0.5$pF，$I_{B1}=I_{B2}=I_o=1$mA。根据需要进行其他假设，并且对假设进行说明。

习题13.4

使用图13-5所示的电路，求解晶体管Q_3、Q_4的集电极电流，假设输入晶体管Q_1、Q_2的偏置设置如图所示。假设$i_f=0$，出于计算目的，输入端v_+接地。此外，进一步假设Q_2、Q_3的反向饱和电流为$I_{S,NPN}$，Q_1、Q_4的反向饱和电流为$I_{S,PNP}$。

13.8 参考文献

Bowers, D. E., "The so-called current-feedback operational amplifier-technological break-through or engineering

curiosity?" *IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS '93*, May 3-6 1993, pp. 1054-1057.

Bowers, D. F., and Wurcer, S. A., "Recent developments in bipolar operational amplifiers," *Proceedings of the 1999 Bipolar/BiCMOS Circuits and Technology Meeting*, September 26-28,1999,pp.38-45.

Franco, S., "Current Feedback Amplifiers Benefit High-Speed Designs," *EDN*, January 5, 1989, pp. 161-172; "Analytical foundations of current-feedback amplifiers," *1993 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, (ISCAS'93, vol.2) 3-6 May 3-6 1993, pp. 1050-1053.

Harvey, B., "Current feedback opamp limitations: a state-of-the-art review," 1993 *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, (*ISCAS'93*), May 3-6 1993, p. 1066-1069.

______ , "Dual-Amplifier Designs Increase the Accuracy of Current-Feedback Amps," *EDN*, December 9, 1993, pp. 129-134.

______ , "Take Advantage of Current-Feedback Amps for High-Frequency Gain," *EDN*, March 18, 1993, pp. 215-222.

Intersil, Inc., "Current Feedback Amplifier Theory and Applications," *Application Note # AN9420.1*, April 1995.

______ , "An Intuitive Approach to Understanding Current Feedback Amplifiers," *Application Note #AN9787*, February 1998.

______ , "Converting From Voltage-Feedback to Current-Feedback Amplifiers," *Application Note #AN9663.1*, April 1999.

______ , "A Designer's Guide for the HA-5033 Video Buffer," *Application Note AN 548.1*, November 1996.

Koullias, I. A., "A Wideband Low-Offset Current-Feedback Op Amp Design," *Proceedings of the 1989 Bipolar Circuits and Technology Meeting*, Minneapolis, September 18-19, 1989,pp.120-123.

Lidgey, F. J., and Hayatleh, K., "Current-feedback operational amplifiers and applications," *Electronics & Communication Engineering Journal*, vol. 9, no. 4 , Aug. 1997, pp. 176-182.

Lillis, William, and Wang, Anthony, "Complementary Current Mirror for Correcting Input Offset Voltage of Diamond Follower, Especially as Input Stage for Wide-Band Amplifier," U.S. Patent # 4,893, 091, filed October 11, 1988; issued January 9, 1990.

Mancini, Ronald, "Converting From Voltage-Feedback to Current-Feedback Amplifiers," *Electronic Design*, (*Analog Applications Issue*), June 26, 1995, pp. 37-46.

National Semiconductor, "Current Feedback Op Amp Applications Circuit Guide" Application Note # OA-07, May 1988.

______ , "Frequent Faux Pas in Applying Wideband Current Feedback Amplifiers," Application Note # OA-15, August 1990.

______ , "Current-Feedback Myths Debunked," Application Note # OA-20, July 1992.

______ , "Current Feedback Amplifiers," Application Note # OA-31, November 1992.

______ , "Current Feedback Loop Gain Analysis and Performance Enhancement," Application Note # OA-13, January 1993.

______ , "Stability Analysis of Current Feedback Amplifiers," Application Note # OA-25, May 1995.

______ , "Current vs. Voltage Feedback Amplifiers," Application Note # OA-30, January 1998.

Palumbo, G., "Current feedback amplifier: stability and compensation," *Proceedings of the 40th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, August 3-6, 1997, pp. 249-252.

Palumbo, G., and Pennisi, S., "Current-feedback amplifiers versus voltage operational amplifiers," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 48, no. 5, May 2001, pp. 617-623.

Sauerwald, M., "Current feedback and voltage feedback. The choice amplifiers: which one to use, when and why," *Northcon/94 Conference Record*, October 11-13, 1994, pp. 285-289.

Smith, Doug, "Current-feedback amps enhance active-filter speed and performance," *EDN*, September 17, 1990, pp. 167-172.

Smith, Douglas, "High Speed Operational Amplifier Architectures," *Proceedings of the 1993 IEEE Bipolar Circuits and Technology Meeting*, pp. 141-148.

Smith, Doug, Koen, Mike, and Witulski, Arthur, "Evolution of High-Speed Operational Amplifier Architectures," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 29, no. 10, October 1994, pp. 1166-1179.

Tammam, A. A., Hayatleh, K., Hart, B., and Lidgey, F. J., "High Performance Current-Feed-back Op-Amps," *Proceedings of the 2004 International Symposium on Circuits and Systems, (ISCAS'04)*, May 23-26, 2004, pp. 825-828.

Texas Instruments, Inc., "Voltage Feedback vs. Current Feedback Op Amps Applications Report," *TI Application Note*, November 1998.

Toumazou, Chris, Payne, Alison, and Lidgey, John, "Current-Feedback Versus Voltage Feedback Amplifiers: History, Insight and Relationships," *1993 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, (ISCAS'93), May 3-6, 1993, pp. 1046-1049.

Wilson, B., "Current-mode amplifiers," *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, May 8-11, 1989, pp. 1576-1579.

Wong, James, "Current-Feedback Op Amps Extend High Frequency Performance," *EDN*, October 26, 1989, pp. 211-216.



第14章　模拟低通滤波器

本章概要

- 本章讨论模拟低通滤波器的基础知识。这些技术对于设计模拟滤波器是非常有用的，同时对设计数字滤波器的原型滤波器也很有帮助。本章没有包含模拟电路设计的方方面面，而只是关于模拟低通滤波器的基本介绍。如果需要，读者可以参考其他文档以获取滤波器设计更为详尽的细节内容。

14.1　引言

低通滤波器（low-pass filter）是许多类信号处理系统的基本元件。通道隔离、A/D抗混叠（antialiasing）以及通用信号处理都是低通滤波器的实际应用，这里列出的只是很小的一部分。即使你是个数字滤波器设计者，也有必要了解一些模拟滤波器设计的知识，这是因为大多数数字滤波器的设计都是从模拟原型滤波器（analog prototype filter）开始的，然后再转换到数字域。此外，DSP系统通常有一个包含模拟低通滤波器的模拟前端电路，模拟低通滤波器用于抗混叠目的（如图14-1所示）。

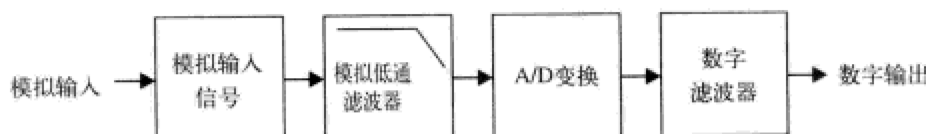


图14-1　典型的数字信号处理链路

对于任何设计来说，难点都在细节中。你的设计规范将引导你在滤波器结构、阶数上做出选择，这取决于你需要的电路衰减，可以忍受的通带纹波，以及可以忍受的群延迟变化。接下来的几节，我们将讨论与低通滤波器设计相关的各种设计问题。讨论结果也可以轻松扩展应用到带通滤波器（band-pass filter）与高通滤波器（high-pass filter）。

14.2　低通滤波器基础知识

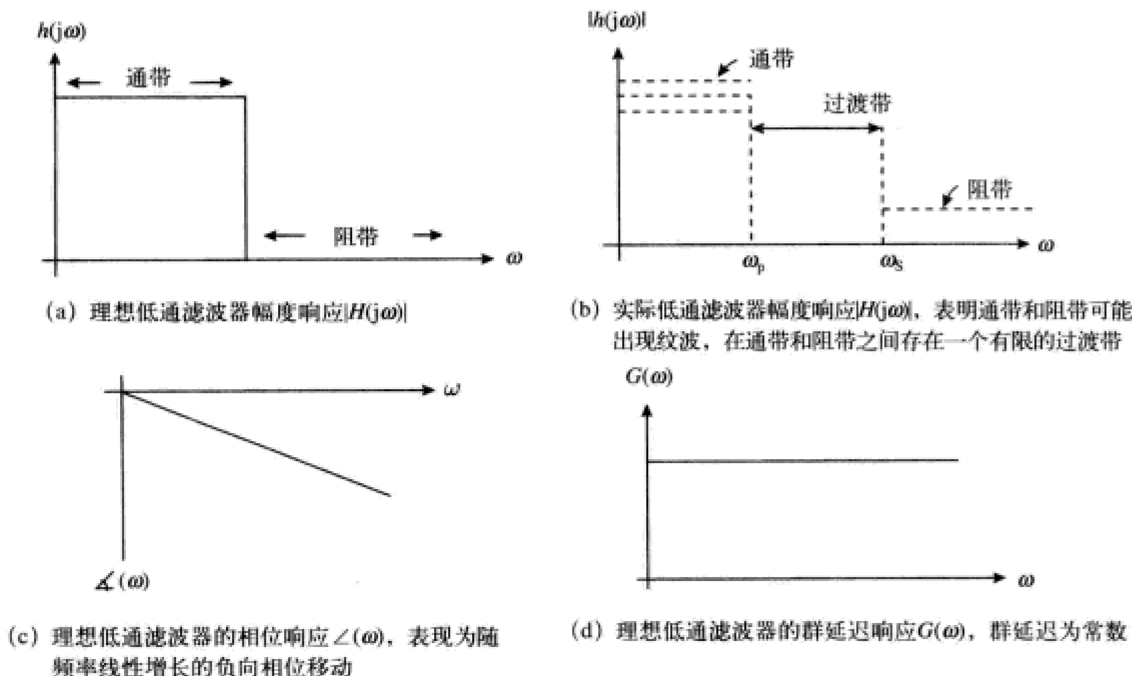
理想低通滤波器的幅度响应如图14-2a所示。该滤波器的增益在通带（低于滤波器截止[①]频率ω_h的频率段）上极为平坦。幅度响应在高于截止频率（cut-off frequency）的频率段下降至零。

实际低通滤波器的幅度响应如图14-2b所示。非理想影响包括：

- 滤波器通带可能出现的纹波（ripple）。
- 阻带可能出现的最大衰减基底。
- 通带和阻带之间存在有限过渡宽度。

① 通常，滤波器的截止频率规定为滤波器通带增益下降至直流增益的0.707倍时的频率点，或者说为−3dB频率。

不过，滤波器的幅度响应只说明了一半事实。此外，我们必须关心滤波器的相位响应。在接下来的讨论中我们将会看到，相位响应（与群延迟[①]响应一起）影响滤波器的瞬态响应。理想滤波器的相位响应随频率线性移动，因此群延迟为常数，如图14-2c和14-2d所示。接下来详细讨论几种不同的低通滤波器，它们不同程度地接近低通滤波器理想的幅度响应和相位响应。



（a）理想低通滤波器幅度响应|H(jω)|

（b）实际低通滤波器幅度响应|H(jω)|，表明通带和阻带可能出现纹波，在通带和阻带之间存在一个有限的过渡带

（c）理想低通滤波器的相位响应∠(ω)，表现为随频率线性增长的负向相位移动

（d）理想低通滤波器的群延迟响应G(ω)，群延迟为常数

图14-2 低通滤波器响应

14.3 巴特沃思滤波器

巴特沃思滤波器（Butterworth filter）在通带内提供最大平坦响应。N阶巴特沃思滤波器的极点位置在圆周上等间隔分布，圆周的半径等于滤波器的截止频率。如果巴特沃思滤波器的−3dB截止频率$\omega_{3dB}=1\text{rad/s}$，则其极点的位置为

$$-\sin\frac{(2k-1)\pi}{2N}+\mathrm{j}\cos\frac{(2k-1)\pi}{2N}\quad k=1,2\cdots N \tag{14-1}$$

其频率响应为

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^{2N}}} \tag{14-2}$$

各阶巴特沃思滤波器的极点传递函数如表14-1所示。注意传递函数被拆分为一阶因子和二阶因子[②]。该表中的模式拆分传递函数可以帮助我们实现我们自己的滤波器，这是因为一阶和二阶滤波器电路容易使用运算放大器进行综合。这里还给出了截止频率为1rad/s的滤波器

① 滤波器的群延迟通过对相位响应函数相对频率ω进行微分得到，即$G(\omega)=\mathrm{d}\angle(\omega)/\mathrm{d}\omega$。群延迟是对给定频率成分通过滤波器时被延迟时间的度量。对于低脉冲失真应用来说，你可能希望滤波器对所有傅里叶成分的延迟时间相同，也就是希望群延迟固定不变，相位响应是线性的。

② 如此拆分可以帮助促进我们使用运算放大器来实现传递函数。比如，一阶滤波电路可以使用简单RC滤波器来实现，二阶传递函数可以使用任意数量的运算放大器电路实现，包括Sallen-Key滤波器等等。

的传递函数。

表14-1　巴特沃思滤波器的传递函数，拆分为一阶因子和二阶因子。所示传递函数随滤波器阶数*N*变化，滤波器的截止频率为1rad/s

阶数 *N*	传递函数
2	$\dfrac{1}{s^2+1.414s+1}$
3	$\dfrac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$
4	$\dfrac{1}{(s^2+0.7654s+1)(s^2+1.8478s+1)}$
5	$\dfrac{1}{(s+1)(s^2+0.6180s+1)(s^2+1.6180s+1)}$
6	$\dfrac{1}{(s^2+0.5176s+1)(s^2+1.4142s+1)(s^2+1.9318s+1)}$
7	$\dfrac{1}{(s+1)(s^2+0.4450s+1)(s^2+1.2480s+1)(s^2+1.8019s+1)}$
8	$\dfrac{1}{(s^2+0.3902s+1)(s^2+1.1111s+1)(s^2+1.6629s+1)(s^2+1.9616s+1)}$

巴特沃思滤波器的幅度响应、阶跃响应、群延迟响应分别如图14-3、图14-4、图14-5所示。我们要注意下列结论：

- 随着滤波器的阶数增加，过渡带衰减特性的尖锐程度增大。比如，在10rad/s处，8阶滤波器的衰减约为160dB，但是低阶数滤波器的衰减则相对小一些。
- 对于阶跃响应来说，通过滤波器的过冲和延迟随滤波器阶数的增加而增大。
- 对于群延迟来说，群延迟的峰峰值摆动随滤波器阶数的增加而增大。

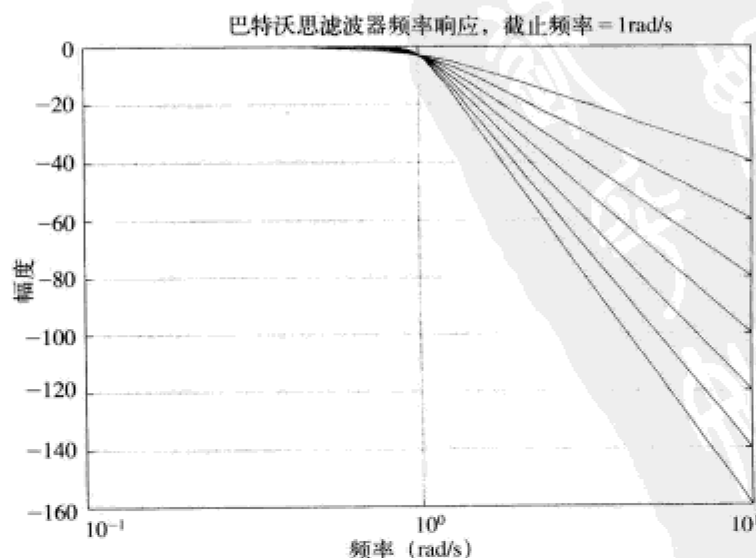


图14-3　巴特沃思滤波器频率响应，滤波器的截止频率为1rad/s，滤波器阶数$N=2\sim8$

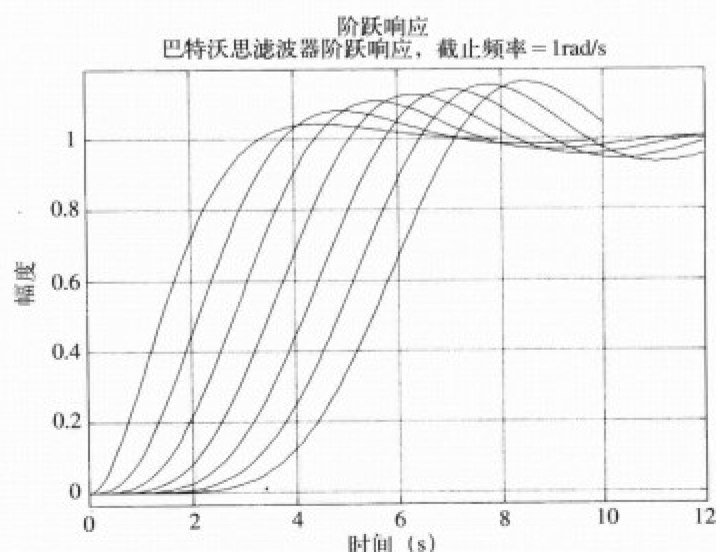


图14-4 巴特沃思滤波器阶跃响应，滤波器的截止频率为1rad/s，滤波器阶数$N=2\sim8$

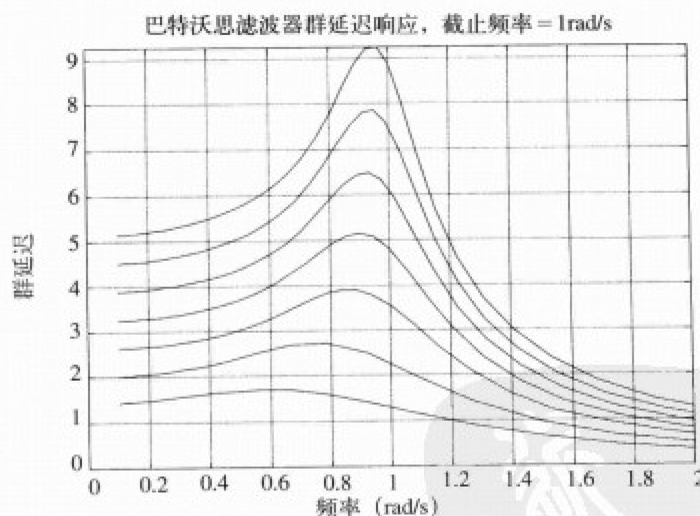


图14-5 巴特沃思滤波器群延迟响应，滤波器的截止频率为1rad/s，滤波器阶数$N=2\sim8$

前面的总结使得我们可以对滤波器的频率响应、群延迟以及瞬态响应之间的关系进行一些泛泛的评论。具有更尖锐截止特性的滤波器通常具有更大的群延迟摆动，频率响应具有更大的过冲或振铃。这就是为什么群延迟摆动是滤波器设计中的一个重要设计参数的原因：更大的群延迟摆动导致一个波形信号通过滤波器时将会造成更严重的脉冲失真。反过来说，具有近似常数群延迟特性的滤波器可以使脉冲信号无严重失真地通过。

14.4 切比雪夫滤波器

切比雪夫滤波器（Chebyshev filter）在通带有一些纹波，过渡带的截止特性比巴特沃思滤波器更尖锐。我们将会看到，与巴特沃思滤波器相比，使用切比雪夫滤波器设计的代价是会导致更大的群延迟摆动。

N阶切比雪夫滤波器的极点位置在$\sigma_k+j\omega_k$处，实部和虚部由下列公式给出

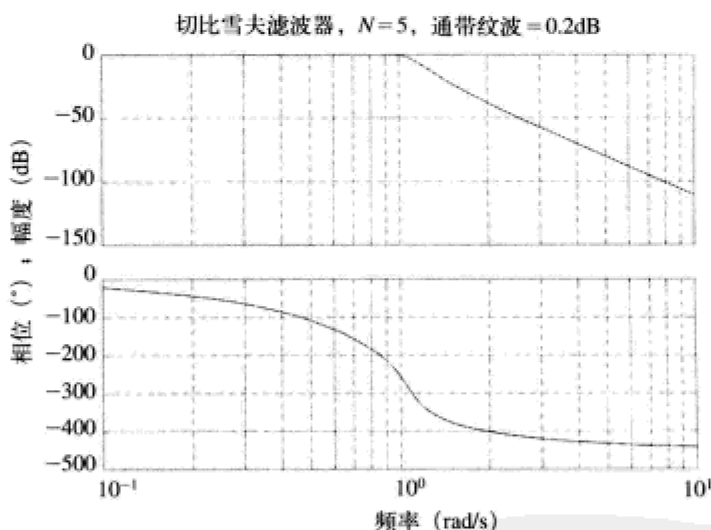
$$\sigma_k = -\sinh\left[\frac{1}{N}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\sin(2k-1)\frac{\pi}{2N}, k=1,2\cdots N$$
$$\omega_k = \cosh\left[\frac{1}{N}\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\cos(2k-1)\frac{\pi}{2N}, k=1,2\cdots N \tag{14-3}$$

切比雪夫滤波器受两个参数控制：滤波器阶数N、以及允许的通带纹波。纹波参数ε由下式给出

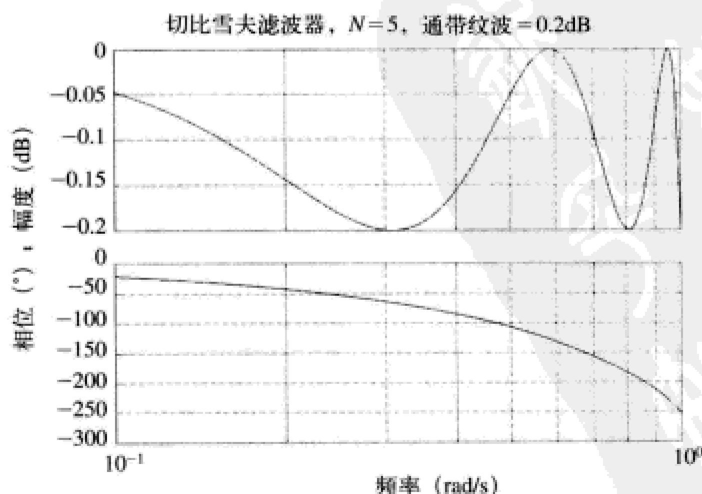
$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{R_{db}}{10}}-1} \tag{14-4}$$

这里R_{db}为允许的纹波峰值，用dB表示。在这些极点位置形成的传递函数的幅度响应比巴特沃思滤波器更加尖锐。图14-6a所示为阶数$N=5$，通带纹波$\varepsilon=0.20$dB的切比雪夫滤波器的伯德图。

观察这个滤波器的通带细节，我们在图14-6b中绘制出频率从0.1～1rad/s变化时的频率响



（a）整体响应



（b）通带纹波细节，可以看到−3dB截止频率稍高于1rad/s。这里所示的切比雪夫近似公式产生1rad/s的通带纹波频率

图14-6 切比雪夫滤波器频率响应，阶数$N=5$，通带纹波$\varepsilon=0.2$dB

应，我们看到滤波器阶数（$N=5$）等于通带内纹波上下振荡的数目。我们还可以看到，切比雪夫滤波器公式不能产生截止频率刚好等于1rad/s的滤波器。该公式产生的滤波器在1rad/s的频率处离开允许的纹波带，切比雪夫滤波器的−3dB频率点稍高一些。−3dB频率点由下式给出

$$\omega_{3\text{db}}=\cosh\left[\left(\frac{1}{N}\right)\cosh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \tag{14-5}$$

比如，对于阶数$N=5$，通带纹波$\varepsilon=0.20$dB的情况，滤波器的−3dB带宽为1.10rad/s。

传递函数表格以及3种不同类型切比雪夫滤波器的−3dB频率如表14-2、表14-3、表14-4所示。

表14-2 切比雪夫滤波器的传递函数[①]表，滤波器阶数N变化，滤波器纹波频率为1rad/s，通带纹波$\varepsilon=0.1$dB，−3dB频率点ω_c稍微高一些

阶 数 N	传递函数	$\omega_{3\text{dB}}$（rad/s）
2	$\dfrac{3.314}{s^2+2.3724s+3.314}$	1.94
3	$\dfrac{1.6381}{(s+0.9694)(s^2+0.9694s+1.6899)}$	1.38
4	$\dfrac{0.8285}{(s^2+0.5283s+1.33)(s^2+1.2755s+0.6229)}$	1.21
5	$\dfrac{0.4095}{(s+0.5389)(s^2+0.3331s+1.1949)(s^2+0.8720s+0.6359)}$	1.13
6	$\dfrac{0.2071}{(s^2+0.2294s+1.1294)(s^2+0.6267s+0.6964)(s^2+0.8561s+0.2634)}$	1.09
7	$\dfrac{0.1024}{(s+0.3768)(s^2+0.1677s+1.0924)(s^2+0.4698s+0.7532)(s^2+0.6789s+0.3302)}$	1.07
8	$\dfrac{0.0518}{(s^2+0.12805s+1.0695)(s^2+0.3644s+0.7989)(s^2+0.5454s+0.4162)(s^2+0.6433s+0.1456)}$	1.05

表14-3 切比雪夫滤波器的传递函数表，滤波器阶数N变化，滤波器纹波频率为1rad/s，通带纹波$\varepsilon=0.20$dB

阶 数 N	传递函数	$\omega_{3\text{dB}}$（rad/s）
2	$\dfrac{2.3568}{s^2+1.9271s+2.3568}$	1.67
3	$\dfrac{1.1516}{(s+0.8146)(s^2+0.8146s+1.4136)}$	1.28
4	$\dfrac{0.5892}{(s^2+0.4496s+1.1987)(s^2+1.0855s+0.4916)}$	1.16
5	$\dfrac{0.2879}{(s+0.4614)(s^2+0.2852s+1.1174)(s^2+0.7466s+0.5584)}$	1.10
6	$\dfrac{0.1473}{(s^2+0.1970s+1.0779)(s^2+0.5383s+0.6449)(s^2+0.7354s+0.2119)}$	1.07
7	$\dfrac{0.0720}{(s+0.3243)(s^2+0.1433s+1.0557)(s^2+0.4044s+0.7164)(s^2+0.5844s+0.2934)}$	1.05
8	$\dfrac{0.0368}{(s^2+0.1103s+1.0418)(s^2+0.3141s+0.7712)(s^2+0.4700s+0.3886)(s^2+0.5544s+0.1180)}$	1.04

① 这些传递函数是使用MATLAB和CHEBY1函数产生的。CHEBY1函数计算在给定通带纹波时的切比雪夫滤波器的极点位置。

表14-4　切比雪夫滤波器的传递函数表，滤波器阶数N变化，滤波器纹波频率为1rad/s，通带纹波ε=0.50dB

阶　数　N	传 递 函 数	$\omega_{3\mathrm{dB}}$（rad/s）
2	$\dfrac{1.5162}{s^2+1.4256s+1.5162}$	1.39
	$\dfrac{0.7157}{(s+0.6265)(s^2+0.6265s+1.1424)}$	1.17
4	$\dfrac{0.3791}{(s^2+0.3507s+1.0635)(s^2+0.8467s+0.3564)}$	1.09
5	$\dfrac{0.1789}{(s+0.3623)(s^2+0.2239s+1.0358)(s^2+0.5762s+0.4768)}$	1.06
6	$\dfrac{0.0948}{(s^2+0.1553s+1.0230)(s^2+0.4243s+0.5900)(s^2+0.5796s+0.1570)}$	1.04
7	$\dfrac{0.0447}{(s+0.2562)(s^2+0.1140s+1.0161)(s^2+0.3194s+0.6769)(s^2+0.4616s+0.2539)}$	1.03
8	$\dfrac{0.0237}{(s^2+0.0872s+1.0119)(s^2+0.2484s+0.7413)(s^2+0.3718s+0.3587)(s^2+0.4386s+0.0881)}$	1.02

切比雪夫滤波器阶数变化时的群延迟响应[①]比较如图14-7所示。注意，群延迟的尖峰在截止频率的附近。随着我们增大切比雪夫滤波器的通带纹波，这个尖峰，以及通带内的群延迟纹波，变得越来越明显。

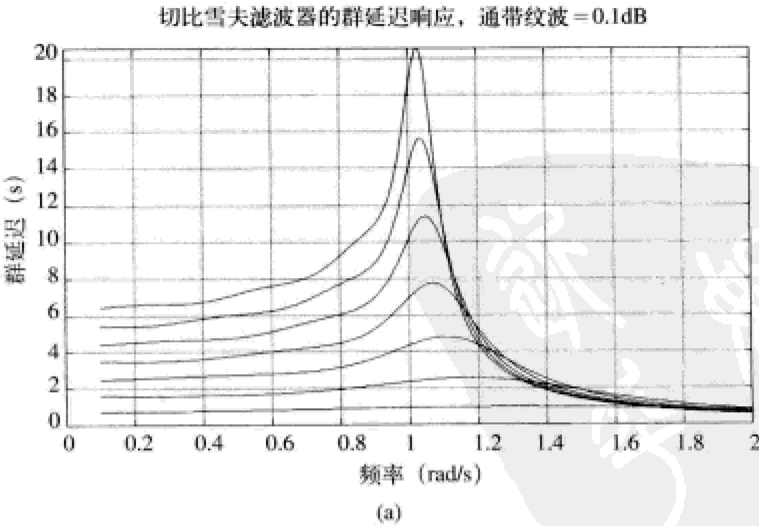
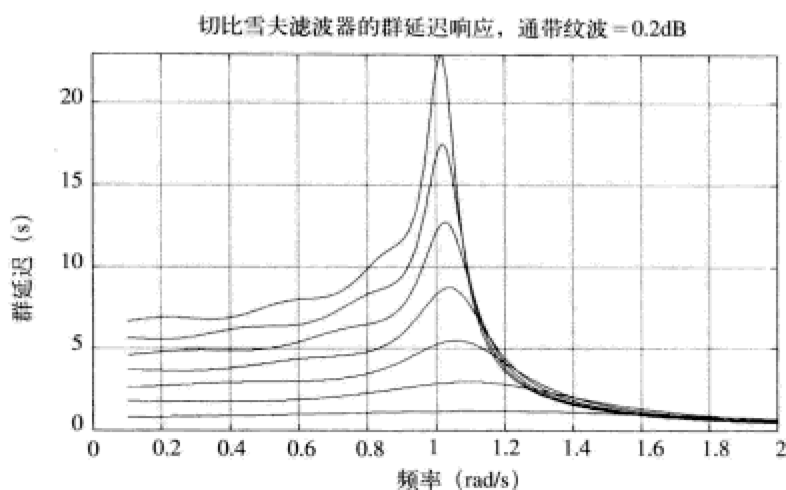
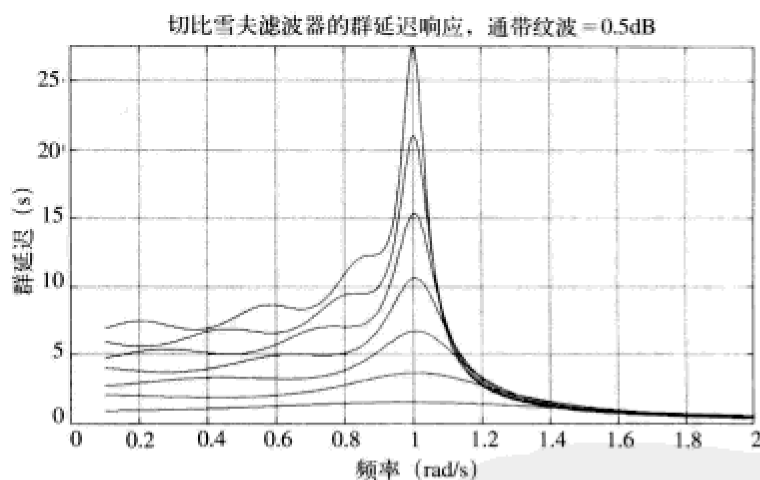


图14-7　切比雪夫滤波器的群延迟响应比较，通带纹波分别为0.1dB、0.2dB、0.5dB，截至频率接近于1rad/s，滤波器阶数N=2~8

① 在每种情况下，滤波器都进行频率归一化处理，归一化频率为纹波带首次超过1rad/s的频率点。因此，每个滤波器的截止频率都近似为1rad/s，但是又不是准确地等于1rad/s。



(b)



(c)

图14-7 （续）

14.5 贝塞尔滤波器

贝塞尔滤波器（Bessel filter）被优化为在滤波器通带内提供恒定的群延迟特性，这是以牺牲频率响应的尖锐截止特性为代价的。在图14-8、图14-9、图14-10和表14-5中我们可以看到这些影响。频率响应在过渡带梯度变化，阶跃响应不存在过冲。通带内的群延迟表现为极为平坦的响应。

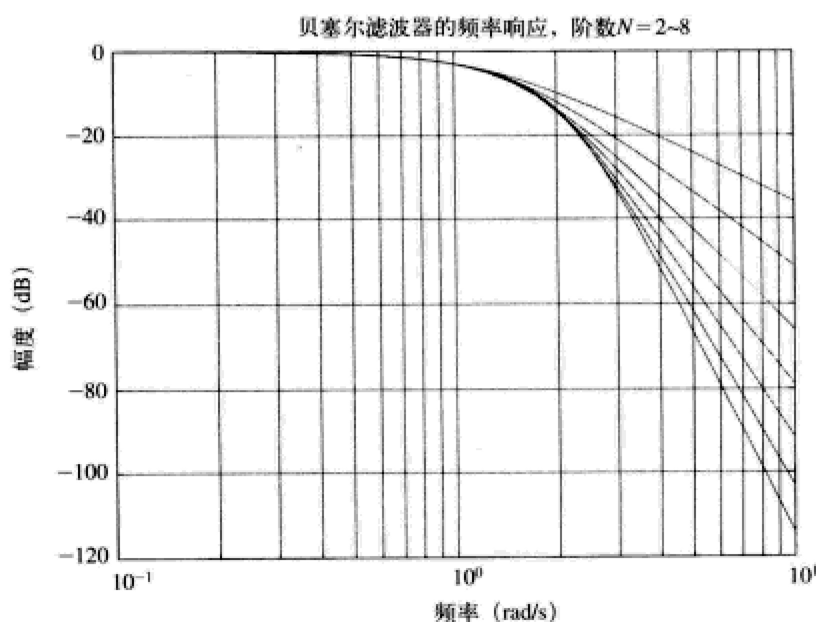


图14-8　贝塞尔滤波器的频率响应，阶数$N=2\sim8$，滤波器的−3dB截止频率为1rad/s

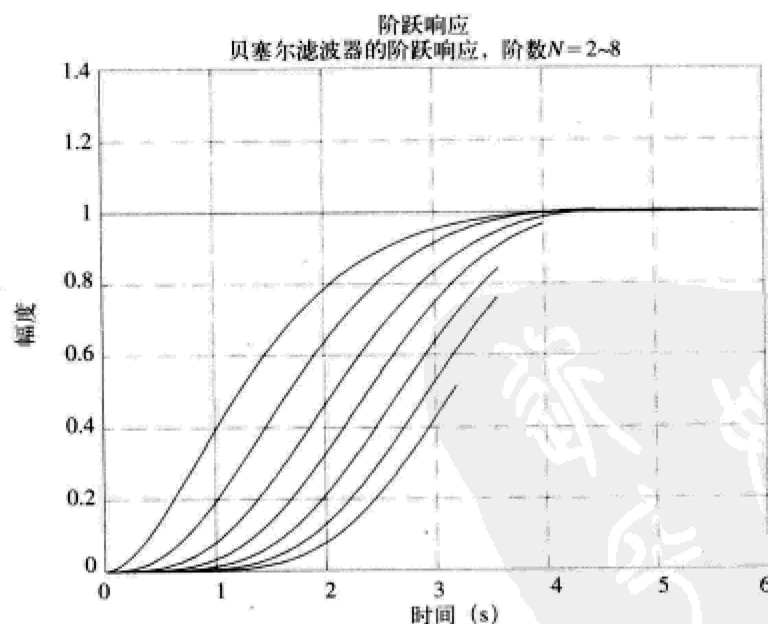


图14-9　贝塞尔滤波器的阶跃响应，阶数$N=2\sim8$，滤波器的−3dB截止频率为1rad/s

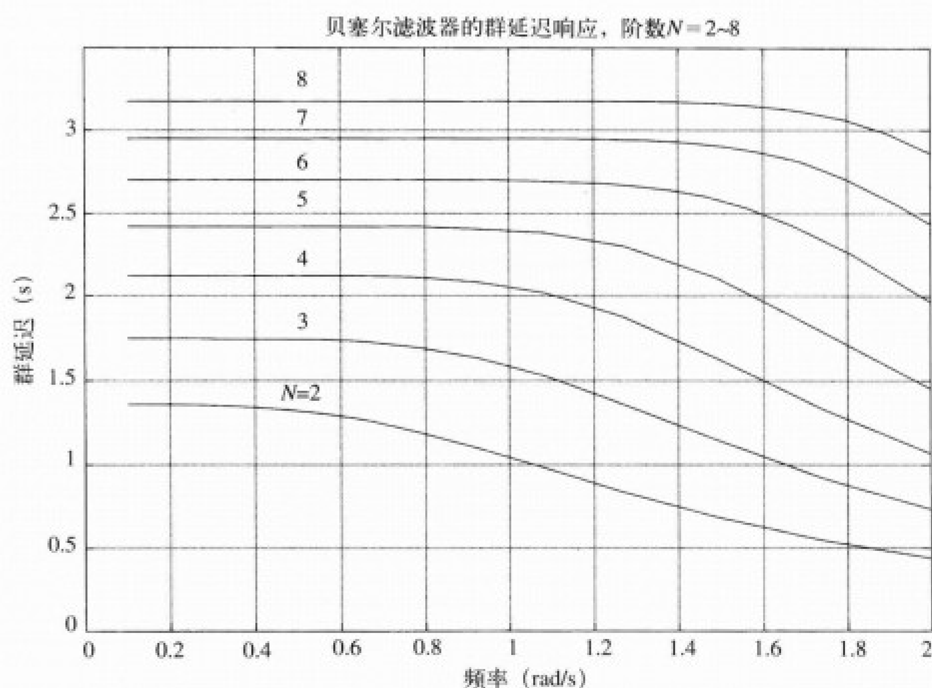


图14-10 贝塞尔滤波器的群延迟响应，阶数$N=2\sim8$，滤波器的-3dB截止频率为1rad/s。注意，随着滤波器阶数增加，通带内群延迟响应的平坦程度升高

表14-5 贝塞尔滤波器的极点位置，阶数N变化，滤波器截止频率$\omega_c=1$rad/s

阶 数 N	实部（$-\sigma$）	虚部（$\pm j\omega$）
2	1.1030	0.6368
3	1.0509	1.0025
	1.3270	
4	1.3596	0.4071
	0.9877	1.2476
5	1.3851	0.7201
	0.9606	1.4756
	1.5069	
6	1.5735	0.3213
	1.3836	0.9727
	0.9318	1.6640
7	1.6130	0.5896
	1.3797	1.1923
	0.9104	1.8375
	1.6853	
8	1.7627	0.2737
	0.8955	2.0044
	1.3780	1.3926
	1.6419	0.8253

贝塞尔滤波器传递函数的计算结果如表14-6所示。

表14-6　贝塞尔滤波器的传递函数表，拆分为一阶因子和二阶二次因子，阶数N变化，滤波器截止频率$\omega_c=1\text{rad/s}$

阶　数　N	传 递 函 数
2	$\dfrac{1.6221}{s^2+2.206s+1.6221}$
3	$\dfrac{2.7992}{(s+1.3270)(s^2+2.1018s+2.1094)}$
4	$\dfrac{5.1002}{(s^2+2.7192s+2.0142)(s^2+1.9754s+2.5321)}$
5	$\dfrac{11.3845}{(s+1.5069)(s^2+2.7702s+2.4370)(s^2+1.9212s+3.1001)}$
6	$\dfrac{26.8328}{(s^2+3.1470s+2.5791)(s^2+2.7672s+2.8605)(s^2+1.8636s+3.6371)}$
7	$\dfrac{69.5099}{(s+1.6853)(s^2+3.2262s+2.9497)(s^2+2.7594s+3.3251)(s^2+1.8208s+4.2052)}$
8	$\dfrac{198.7746}{(s^2+3.5254s+3.1820)(s^2+1.7910s+4.1895)(s^2+2.7560s+3.8382)(s^2+3.2838s+3.3770)}$

14.6　不同类型滤波器响应比较

阶数$N=5$时三种不同类型滤波器的频率响应比较如图14-11所示。可以看到，与预计一样，切比雪夫滤波器的截止频率特性最尖锐，贝塞尔滤波器的阻带则更缓和。

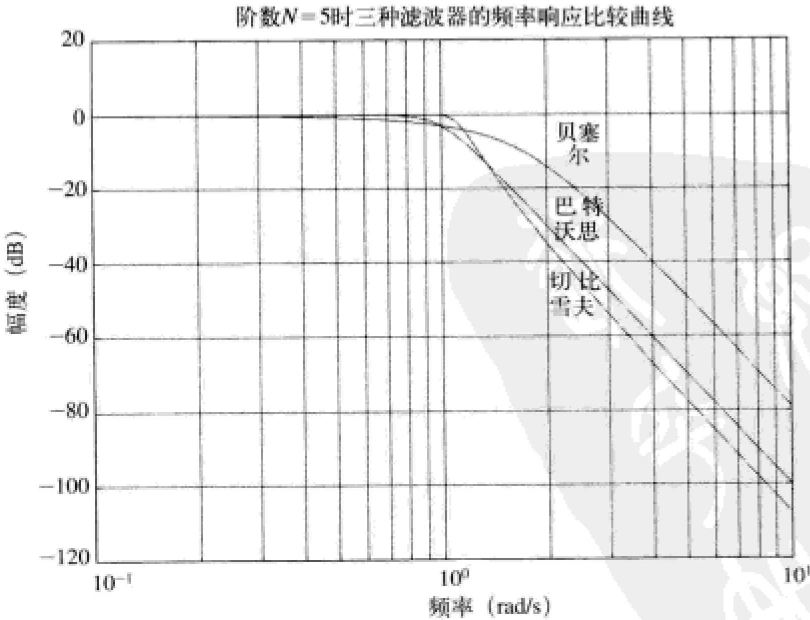


图14-11　滤波器频率响应比较，5阶巴特沃思滤波器，5阶切比雪夫滤波器、纹波为0.1dB，5阶贝塞尔滤波器，截止频率均为1rad/s

3种不同类型滤波器的阶跃响应比较如图14-12所示。可以看到，贝塞尔滤波器具有最小的过冲，巴特沃思滤波器和切比雪夫滤波器的过冲则基本相当。更大通带纹波切比雪夫滤波器将具有更高的过冲。

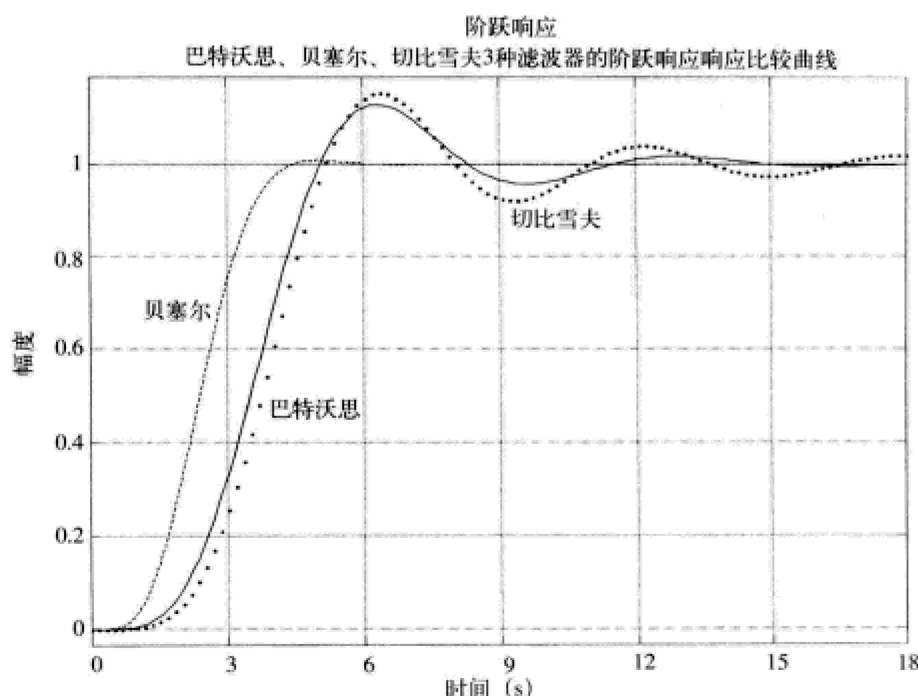


图14-12 阶跃响应比较，5阶巴特沃思滤波器，5阶切比雪夫滤波器（0.1dB纹波），5阶贝塞尔滤波器，截止频率均为1rad/s。图例：巴特沃思（实线）、贝塞尔（虚线）、切比雪夫（点线）。可以看到，贝塞尔响应具有最小的过冲，巴特沃思和切比雪夫响应的过冲则相当

在图14-13中，我们比较3种不同类型滤波器的群延迟响应。我们可以看到，贝塞尔滤波器在通带内具有平坦的群延迟响应，巴特沃思滤波器在通带内则具有适度变化的群延迟。切比雪夫滤波器则在通带内表现出显著的群延迟尖峰。

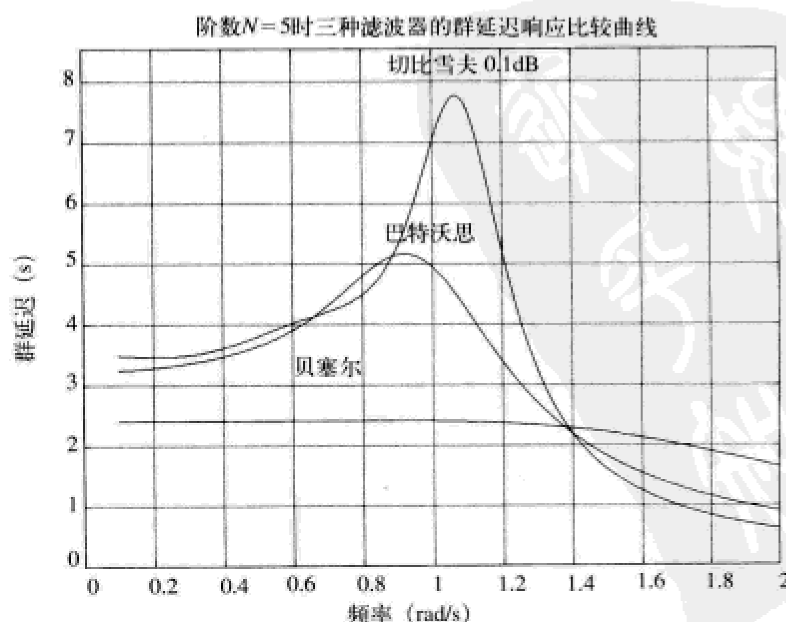


图14-13 群延迟响应比较，5阶巴特沃思滤波器，5阶切比雪夫滤波器（0.1dB纹波），5阶贝塞尔滤波器，截止频率均为1rad/s

14.7 滤波器实现

到目前为止，我们经历了刻苦的学习，理解了滤波器的类型和阶数等概念，但是实践中我们又该如何构建一个滤波器呢？构建滤波器存在多种方法，在下面的内容中，我们将会讨论其中的几种方法。

14.7.1 梯形滤波器（Ladder）

对于高频滤波器来说。一种选择是使用电阻、电感和电容搭建一个无源梯形电路。适用于实现巴特沃思、切比雪夫和贝塞尔滤波器的N阶梯形滤波器电路结构如图14-14a所示。这些滤波器电路使用交互的电感和电容搭建，在源端和终端使用了源接电阻和端接电阻。我们可以看到，对于偶数阶滤波器来说，滤波器使用一个电阻和一个电容进行端接；而对于奇数阶滤波器来说，则使用一个电感和一个电阻进行端接。4阶和5阶梯形滤波器电路分别如图14-14b和图14-14c所示。

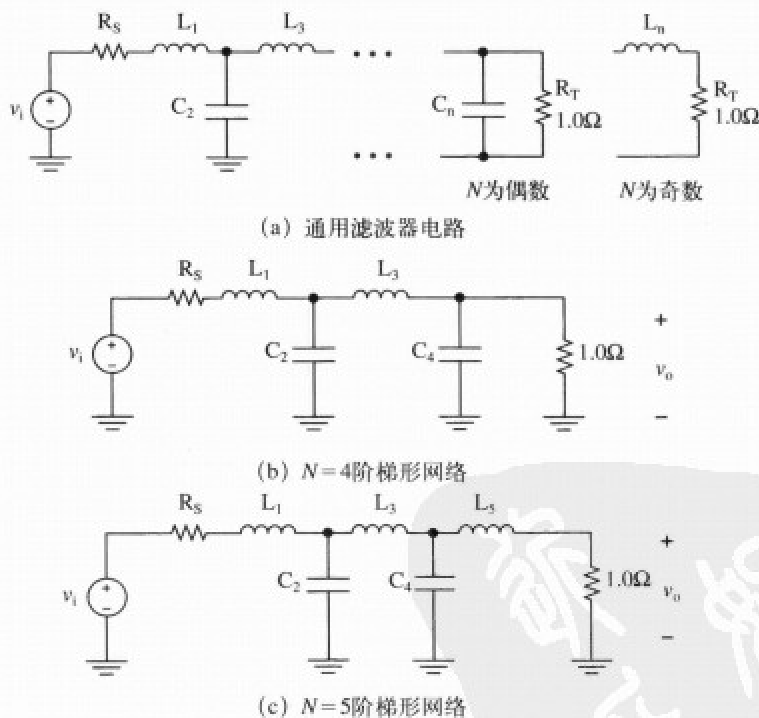


图14-14　N阶梯形滤波器，适于实现巴特沃思、切比雪夫和贝塞尔滤波器

滤波器各个无源元件的取值都是按照1rad/s的截止频率计算得到的，并且制成了表格。这个归一化滤波器的端接电阻为1Ω，滤波器的源接电阻R_s可以设定为你期望的任何阻值。表格化的多阶巴特沃思、贝塞尔和切比雪夫滤波器的梯形电路元件取值如表14-7~表14-11所示。

表14-7 阶数N变化时的各阶巴特沃思梯形滤波器中电感[①]和电容的取值表，滤波器截止频率ω_c=1rad/s，端接电阻R_T=1.0Ω。注意，这种情况下，源电阻的所有取值均为R_s=1.0Ω

N	R_s	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	C_6	L_7	C_8
2	1.0	1.4142	1.4142						
3	1.0	1.0000	2.0000	1.0000					
4	1.0	0.7654	1.8478	1.8478	0.7654				
5	1.0	0.6180	1.6180	2.0000	1.6180	0.6180			
6	1.0	0.5176	1.4142	1.9319	1.9319	1.4142	0.5176		
7	1.0	0.4450	1.2470	1.8019	2.0000	1.8019	1.2470	0.4450	
8	1.0	0.3902	1.1111	1.6629	1.9616	1.9616	1.6629	1.1111	0.3902

表14-8 阶数N变化时的各阶贝塞尔梯形滤波器中电感和电容的取值表，滤波器截止频率ω_c=1rad/s，端接电阻R_T=1.0Ω。注意，这种情况下，源电阻的所有取值均为R_s=1.0Ω

N	R_s	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	C_6	L_7	C_8
2	1.0	0.5755	2.1478						
3	1.0	0.3374	0.9705	2.2034					
4	1.0	0.2334	0.6725	1.0815	2.2404				
5	1.0	0.1743	0.5072	0.8040	1.1110	2.2582			
6	1.0	0.1365	0.4002	0.6392	0.8538	1.1126	2.2645		
7	1.0	0.1106	0.3259	0.5249	0.7020	0.8690	1.1052	2.2659	
8	1.0	0.0919	0.2719	0.4409	0.5936	0.7303	0.8695	1.0956	2.2656

表14-9 0.1dB纹波切比雪夫梯形滤波器的电感和电容的取值表，滤波器截止频率ω_c=1rad/s，端接电阻R_T=1.0Ω。注意，源电阻的各种取值随滤波器阶数变化

N	R_s	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	C_6	L_7	C_8
2	1.3554	1.2087	1.6382						
3	1.0	1.4328	1.5937	1.4328					
4	1.3554	0.9924	2.1476	1.5845	1.3451				
5	1.0	1.3013	1.5559	2.2411	1.5559	1.3013			
6	1.3554	0.9419	2.0797	1.6581	2.2473	1.5344	1.2767		
7	1.0	1.2615	1.5196	2.2392	1.6804	2.2392	1.5196	1.2615	
8	1.3554	0.9234	2.0454	1.6453	2.2826	1.6841	2.2300	1.5091	1.2515

表14-10 0.25dB纹波切比雪夫梯形滤波器的电感和电容的取值表，滤波器截止频率ω_c=1rad/s，端接电阻R_T=1.0Ω

N	R_s	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	C_6	L_7	C_8
2	2.0	0.6552	2.7632						
3	1.0	1.6325	1.4360	1.6325					
4	2.0	0.6747	3.6860	1.0247	1.8806				
5	1.0	1.5046	1.4436	2.4050	1.4436	1.5046			
6	2.0	0.6867	3.2074	0.9308	3.8102	1.2163	1.7088		
7	1.0	1.5120	1.4169	2.4535	1.5350	2.4535	1.4169	1.5120	

① 所有的电感和电容取值表均摘自A.Zverev的著作*Handbook of Filter Synthesis*，John Wiley，1967年。对于其他的源电阻R_s，读者请查阅这个参考文献。

表14-11　0.5dB纹波切比雪夫梯形滤波器的电感和电容的取值表，滤波器截止频率ω_c＝1rad/s，端接电阻R_T＝1.0Ω

N	R_s	L_1	C_2	L_3	C_4	L_5	C_6	L_7	C_8
2	1.9841	0.9827	1.9497						
3	1.0	1.8636	1.2804	1.8636					
4	1.9841	0.9202	2.5864	1.3036	1.8258				
5	1.0	1.8068	1.3025	2.6912	1.3025	1.8068			
6	1.9841	0.9053	2.5774	1.3675	2.7133	1.2991	1.7961		
7	1.0	1.7896	1.2961	2.7177	1.3848	2.7177	1.2961	1.7896	
8	1.9841	0.8998	2.5670	1.3697	2.7585	1.3903	2.7175	1.2938	1.7852

例题14.1：设计实例之0.5dB通带纹波的5阶切比雪夫滤波器

我们将使用滤波器设计表格来设计一个5阶切比雪夫滤波器，它的截止频率为1MHz，通带纹波为0.5dB。从滤波器设计表格（表14-11）我们可以找到截止频率为1rad/s的滤波器的电路元件的对应取值。

$R_s=R_T=1\Omega$

$L_1=1.8068$

$C_2=1.3025$

$L_3=2.6914$

$C_4=1.3025$

$L_5=1.8068$

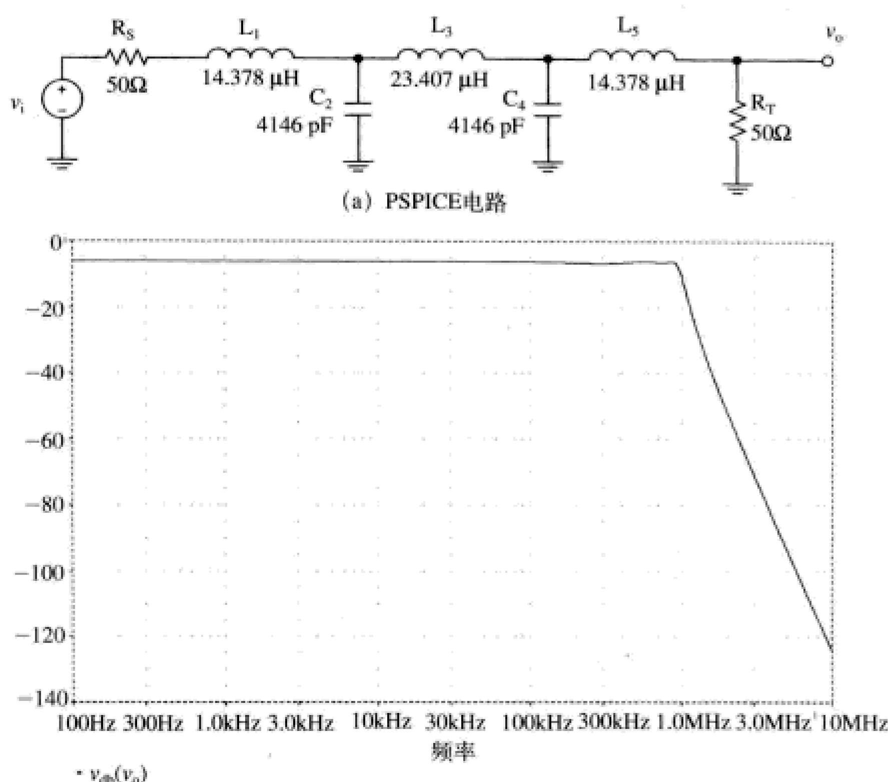
接下来，我们需要选取源接电阻和端接电阻的更为合理的取值（而不是1.0Ω的归一化电阻）。对于这个设计实例，我们将选择$R_s=R_T=50\Omega$。我们现在利用逆归一化过程来将截止频率为1rad/s的滤波器变换到我们期望的1MHz截止频率。逆归一化过程为

$$C=\frac{C_n}{2\pi f_c R} \qquad L=\frac{L_n R}{2\pi f} \tag{14-6}$$

这里，C_n和L_n为滤波器设计表格中各个元件的归一化取值，f_c为新的期望截止频率，R为新滤波器中使用的电阻值。使用这个过程来设计我们的滤波器，得

$$\begin{aligned}
L_1'&=\frac{L_1R}{2\pi f_c}=\frac{(1.8068)(50)}{(2\pi)(10^6)}=14.378\,\mu\text{H}\\
C_2'&=\frac{C_2}{2\pi f_c R}=\frac{(1.3025)}{(2\pi)(10^6)(50)}=4146\,\text{pF}\\
L_3'&=\frac{L_3R}{2\pi f_c}=\frac{(2.6914)(50)}{(2\pi)(10^6)}=23.407\,\mu\text{H}\\
C_4'&=\frac{C_4}{2\pi f_c R}=\frac{(1.3025)}{(2\pi)(10^6)(50)}=4146\,\text{pF}\\
L_4'&=\frac{L_4R}{2\pi f_c}=\frac{(1.8068)(50)}{(2\pi)(10^6)}=14.378\,\mu\text{H}
\end{aligned} \tag{14-7}$$

1MHz滤波器的结果电路和频率响应如图14-15所示。



(a) PSPICE电路

(b) 频率响应。可以看到，该滤波器的直流增益为−6dB（或者说存在一个1/2因子），这是由R_s-R_T电阻分压器造成的

图14-15 使用梯形电路实现的1MHz截止频率、0.5dB通带纹波切比雪夫低通滤波器

14.7.2 滤波器实现——有源方式

我们还可以使用有源滤波器电路来直接实现滤波器传递函数，比如Sallen-Key滤波器电路。Sallen-Key滤波器（如图14-16所示）生成如下传递函数

$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+[R_2C_2+R_1C_2]s+1} \tag{14-8}$$

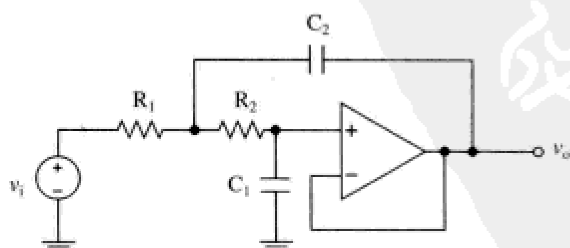


图14-16 Sallen-Key滤波器电路（直流增益为单位1）

比如，实现一个4阶滤波器时，只要你知道滤波器所有极点的位置，就可以将两个Sallen-Key滤波器电路级联在一起。

该设计方案的一个变化是Sallen-Key电路具有可调节的直流增益，同时也可以调节滤波

器的阻尼因子，如图14-17所示。该滤波器的传递函数为

$$\frac{v_{out}}{v_{in}}=\left(\frac{1}{k}\right)\frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2+\left[R_2C_2+R_1C_2+R_1C_1\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]s+1} \tag{14-9}$$

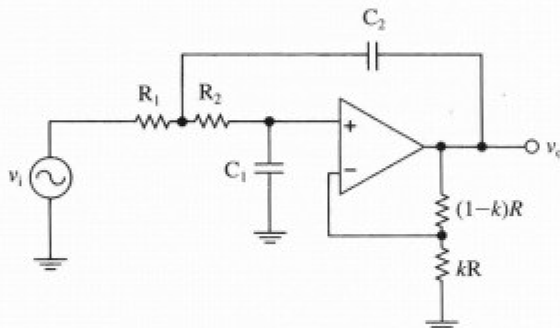


图14-17　Sallen-Key电路（具有可调节的品质因数Q）。调节品质因数Q的实现方法是使用一个电位器来实现电阻（1−k）R和kR

14.7.3　椭圆（"砖墙"）滤波器

椭圆滤波器的详细设计超出了本书的讨论范围，但是对椭圆滤波器进行适当的评论则是适宜的。椭圆滤波器（elliptic filter），也称为"砖墙（brick wall）"滤波器，具有极为尖锐的滤波器截止特性。当然，这是以极为非线性的群延迟响应为代价换来的。椭圆滤波器的一个优点是，在通带内无纹波，阻带内只具有很有限的纹波。这是靠传递函数中的零点实现的。截止频率为1rad/s的椭圆低通滤波器如图14-18所示。可以看到，滤波器具有并联的LC电路。这些电路形成了传递函数中的零点。

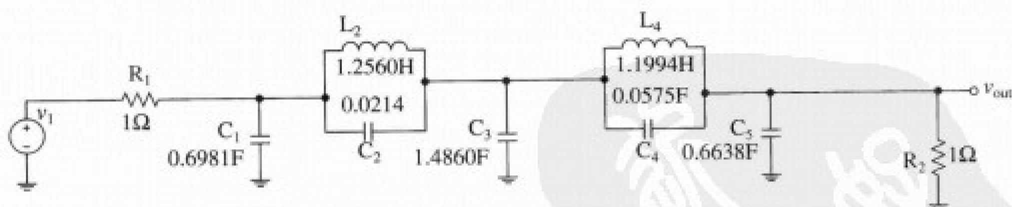
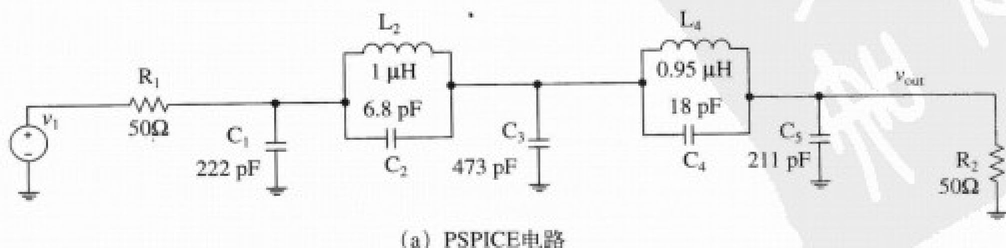


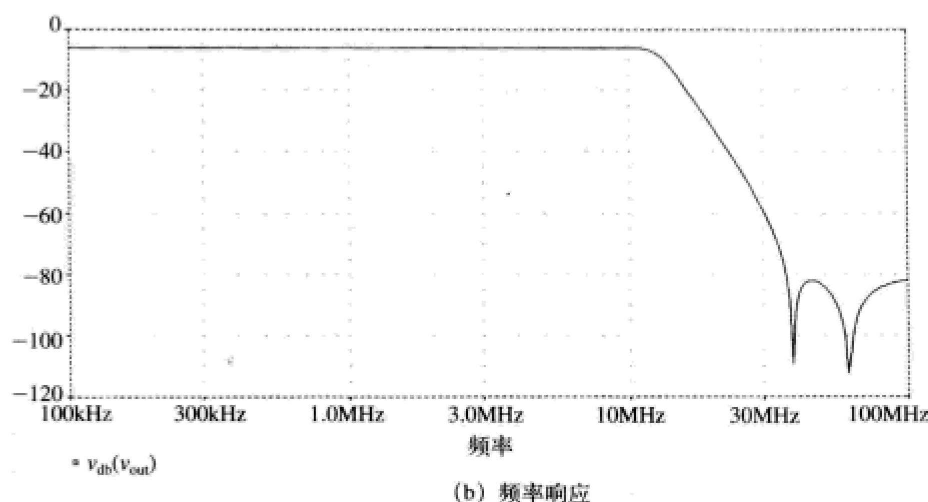
图14-18　椭圆低通滤波器原型电路（截止频率1rad/s）

现在，我们使用前面的方法，对该滤波器进行逆归一化处理，生成截止频率为10MHz的滤波器（如图14-19a所示）。频率响应表明（如图14-19b所示），在过渡带有一个极快的滚降，存在一个极小的衰减基底。



（a）PSPICE电路

图14-19　逆归一化椭圆低通滤波器原型（截止频率10MHz）

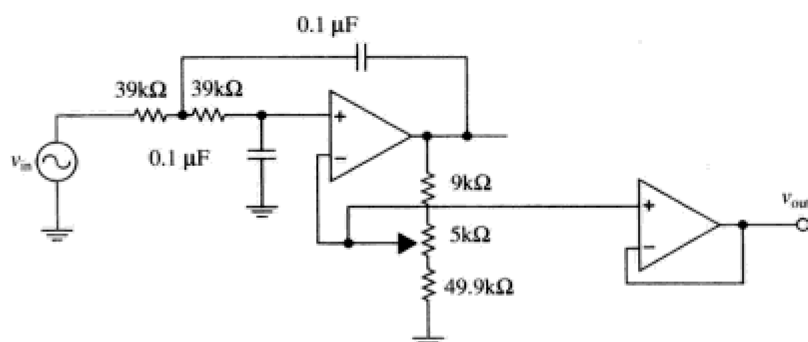


（b）频率响应

图14-19 （续）

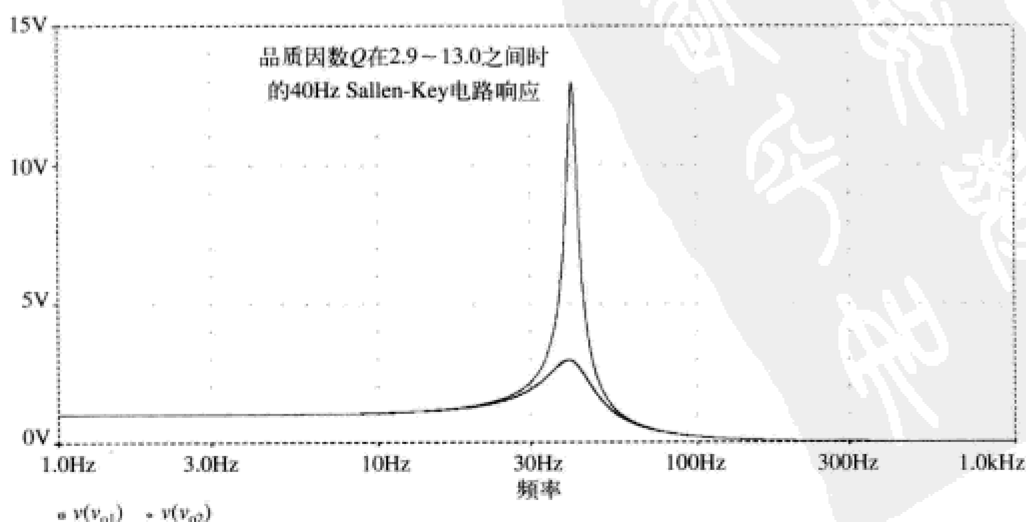
例题14.2：设计实例之40Hz截止频率的Sallen-Key滤波器电路，具有可调节的品质因数Q

图14-20是具有可调节Q的40Hz截止频率低通滤波器。



品质因数Q在2.9～13.0之间调节

（a）电路



（b）SPICE仿真

图14-20 具有可调节Q的40Hz截止频率 Sallen-Key滤波器

14.7.4 全通滤波器

全通滤波器（all-pass filter）是具有单位幅度响应的滤波器，它只提供相位移动。你可以使用全通滤波器来改善滤波器的群延迟响应。你可能发现，为了达到群延迟设计指标的要求，需要在设计的滤波器后面级联一个全通滤波器。一阶全通滤波器电路如图14-21所示。可以看到，这个全通滤波器电路提供的直流增益为−1。如果需要，你可以将一个反相运算放大器电路与全通滤波器级联在一起，解决这个相位翻转问题。

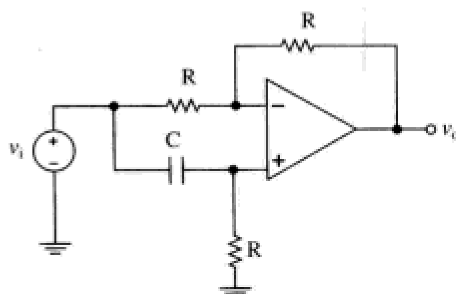


图14-21　一阶全通滤波器

一阶全通滤波器的传递函数、相位角、群延迟为

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{RCs-1}{RCs+1} = \frac{s-\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}} = \frac{s-a}{s+a} \\
\angle H(s) &= -2\arctan\frac{\omega}{a} \\
D(\mathrm{j}\omega) &= \frac{2a}{a^2+\omega^2}
\end{aligned}
\tag{14-10}
$$

在$a=1\text{rad/s}$时的群延迟特性如图14-22所示。可以看到，直流延迟为RC乘积的两倍。

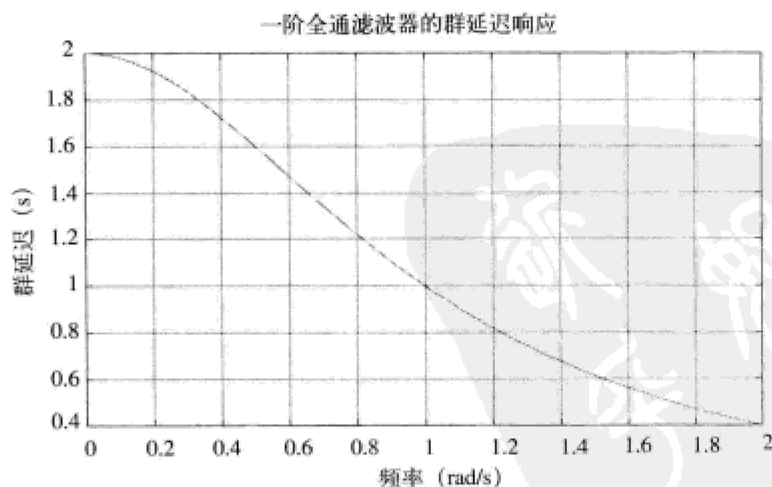


图14-22　一阶全通滤波器的群延迟响应

例题14.3：设计案例之1MHz截止频率的低通滤波器

在这个设计案例中，我们将设计一个满足下列指标（表14-12）的模拟低通滤波器，并对其进行仿真。

表14-12 设计案例指标表

滤波器类型	低 通
−3dB额定带宽	1MHz
通带增益	0dB额定直流增益，频率上升至750kHz时，额定增益变化不超过0.25dB。
衰减	2.5MHz时大于50dB
群延迟响应	从直流到1MHz的群延迟变化低于1000ns。

该设计可以使用无源梯形滤波电路（电阻、电感和电容）实现，或者使用Sallen-Key二阶有源电路级联实现。如果你试图使用一个贝塞尔滤波器，那么滤波器的阶数将非常高。如果你选择椭圆滤波器，又很难达到群延迟指标。

该设计的$\omega_s/\omega_c=2.5$，ω_s处的最小衰减为−50dB。由于高滤波器阶数的要求，没有实现贝塞尔滤波器。为了在归一化频率点2.5处满足−50dB增益指标要求，需要使用阶数$N>10$的贝塞尔滤波器。一个6阶巴特沃思滤波器几乎就能达到这一指标，因为

$$20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2.5^{12}}}\right)=-47.8\text{dB}$$

因此，如果我们使用一个巴特沃思滤波器，那么滤波器的阶数至少为7。巴特沃思滤波器的优点在于通带内没有幅度纹波。

另一个可选方案是尝试一个不超过7阶的切比雪夫滤波器，不过将会存在一些通带纹波。根据我们前面所做的切比雪夫滤波器分析，看起来通带纹波为0.1dB的6阶切比雪夫滤波器能够满足指标要求。通带纹波为0.25dB的5阶切比雪夫滤波器只是不能满足衰减指标的要求。因此，我们尝试使用一个$N=6$的0.1dB切比雪夫滤波器设计（如图14-23所示）。

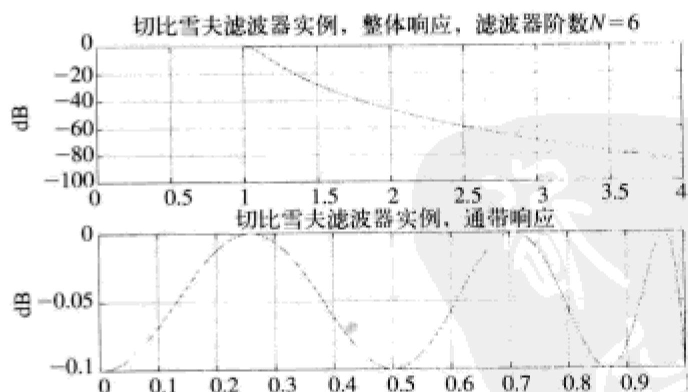


图14-23 切比雪夫滤波器设计，$N=6$，0.1dB通带纹波

使用一个梯形滤波器电路来实现$N=6$的0.1dB切比雪夫滤波器，截止频率$\omega_c=1\text{rad/s}$，$R_T=1\Omega$时无源元件的归一化取值为：

$R_s=1.3554$
$L_1=0.9419$
$C_2=2.0797$
$L_3=1.6581$
$C_4=2.2473$

$L_5 = 1.5344$
$C_6 = 1.2767$
记住，我们使用下面的公式对归一化滤波器进行尺度化处理。

$$L = \frac{L_{norm} R}{\omega_c}$$

$$C = \frac{C_{norm}}{\omega_c R}$$

因此，我们计算−3dB频率为1MHz的滤波器的逆归一化元件取值（如图14-24所示），使用了一个75Ω的端接电阻。切比雪夫梯形滤波器的频率响应的整体幅度如图14-25所示。

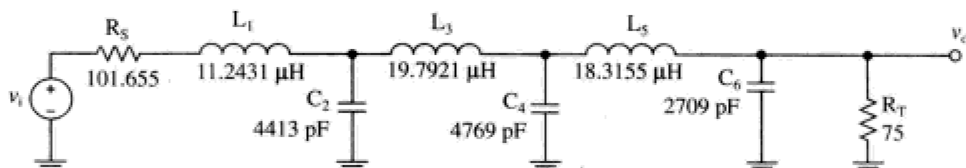


图14-24　切比雪夫梯形滤波器设计

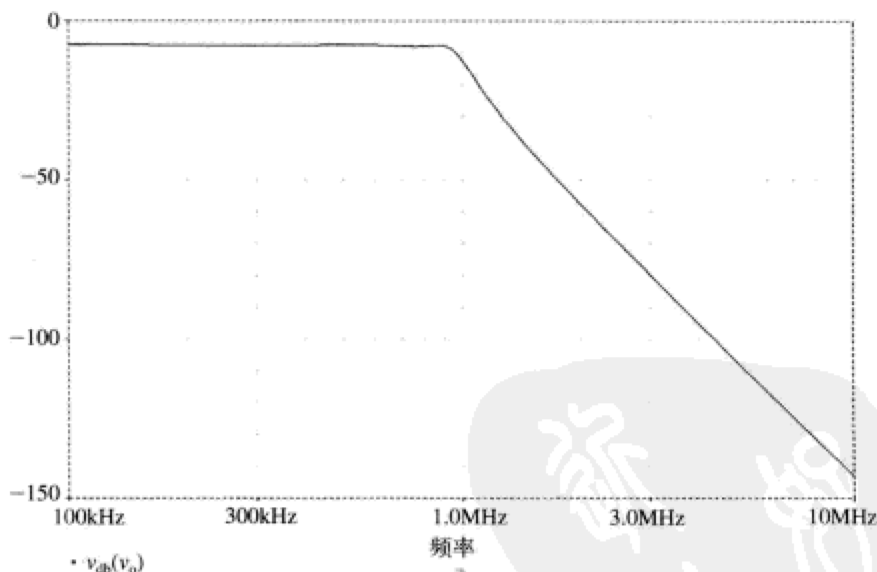


图14-25　切比雪夫梯形滤波器频率响应的幅度曲线（SPICE仿真得到）。纵轴的单位为dB

阻带细节表明，幅度在2.5MHz处的衰减量大于60dB，与预计一致（如图14-26所示）。

可以看到，在通带存在稍许不希望的纹波。这可能是由于梯形元件的舍入误差引起的（如图14-27所示）。

SPICE仿真结果表明，从直流到1MHz范围内的群延迟变化约为1200ns，这违反了群延迟的设计指标（如图14-28所示）。

从上面分析，我们看到，从直流到1MHz范围的延迟变化超过1000ns。因此，我们将级联一个一阶全通网络试图来填充1MHz以下的群延迟漏洞（如图14-29所示）。这里我们假设使用的都是理想运算放大器。这就是说，我们只需要选择增益−带宽乘积远大于我们关注频率范围的运算放大器，即我们选择的运算放大器的增益−带宽乘积必须大于1MHz。一阶全通滤

波器的低频延迟为$2RC$，因此，在该设计中，我们选择660ns的直流延迟。

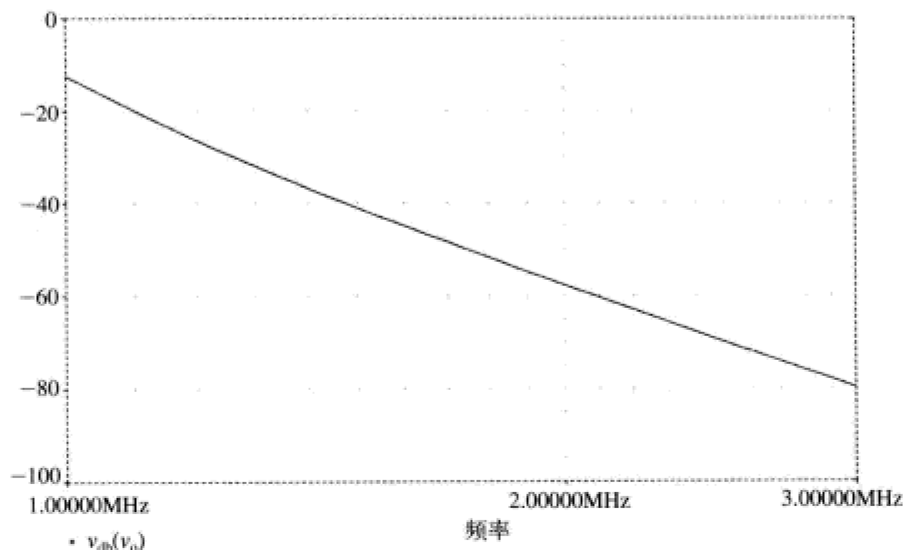


图14-26 切比雪夫梯形滤波器设计的频率响应，阻带细节。纵轴单位为dB

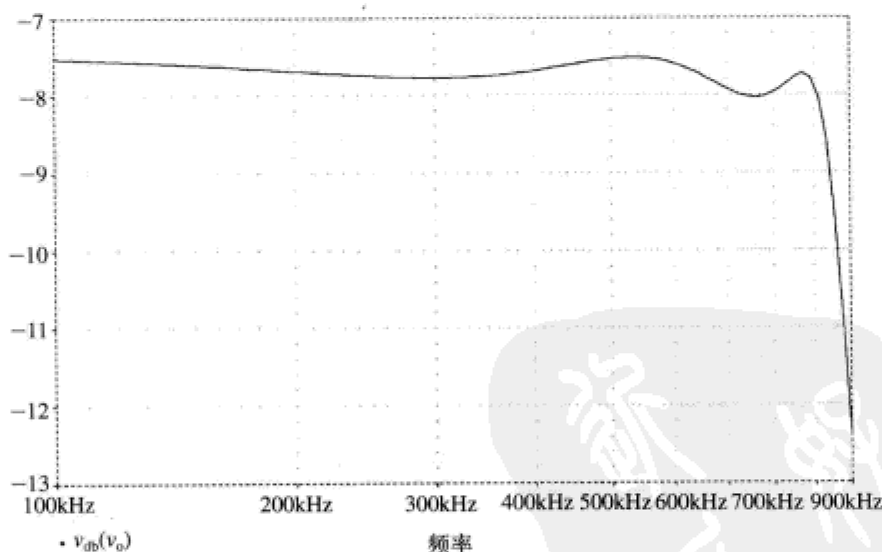


图14-27 切比雪夫梯形滤波器设计的频率响应，通带细节。纵轴单位为dB

延迟均衡滤波器达到了群延迟指标的要求。通带内的延迟变化峰峰值约为900ns（如图14-30所示），因此我们的设计达到了群延迟指标的要求。

原始电路的阶跃响应和添加延迟均衡电路之后的阶跃响应（如图14-31所示）表明，均衡电路的阶跃响应的过冲现象小于原始电路，这与预计是一致的。不过，通过滤波器的延迟加大了（这是由全通网络造成的）。

例题14.4：使用巴特沃思滤波器进行替代设计

这里是一个7阶巴特沃思滤波器设计，也满足了群延迟设计指标，并且没有使用任何全通滤波技术。对于该设计来说，巴特沃思滤波器证明是个更为简单的设计，尽管它的阶数更高一些，然而它却不需要延迟均衡器。

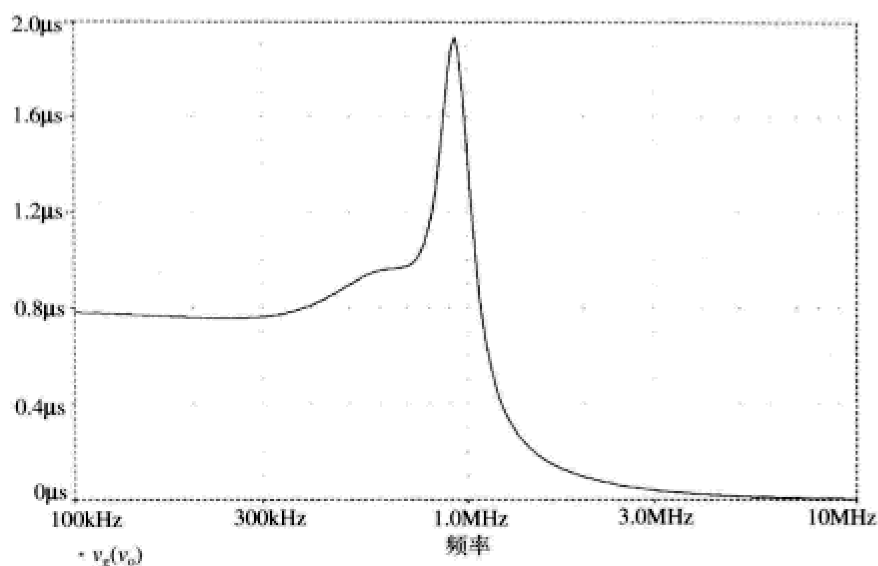


图14-28 切比雪夫梯形滤波器设计的群延迟曲线。通带内存在约为1200ns的群延迟变化

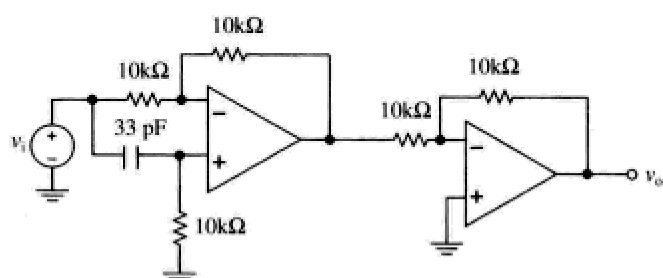


图14-29 滤波器设计实例的群延迟均衡器电路

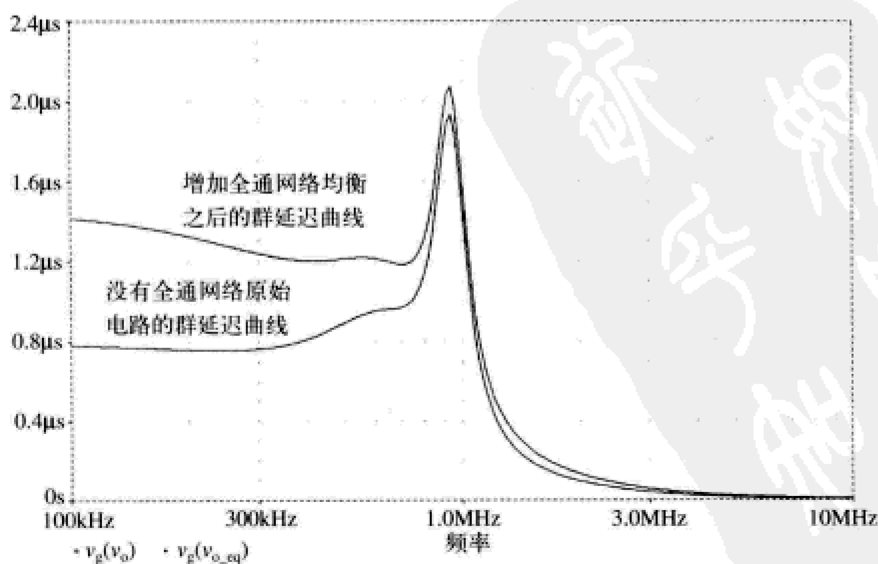


图14-30 切比雪夫梯形滤波器设计增加均衡电路之后的群延迟曲线，与原始电路的群延迟进行比较

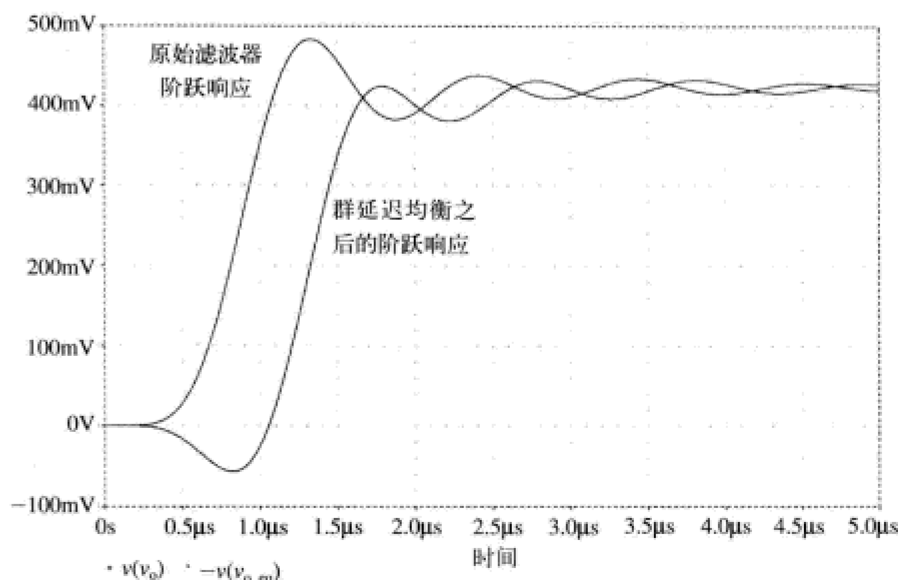
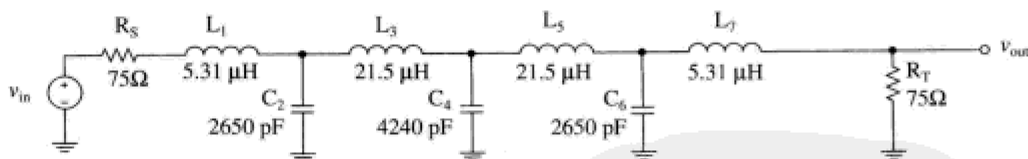
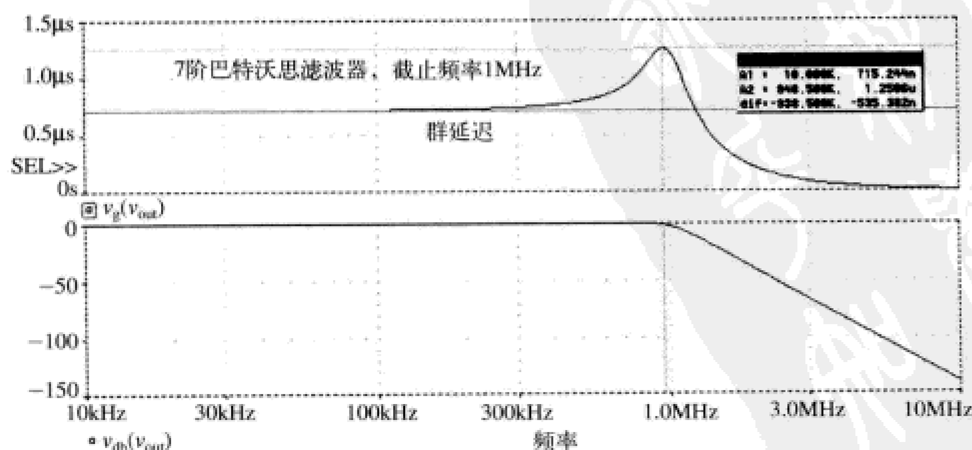


图14-31 切比雪夫梯形滤波器设计增加群延迟均衡电路之后的阶跃响应曲线，与原始电路的阶跃响应进行比较

我们选定设计使用的无源元件取值为：$R_s=1$、$L_1=0.445$、$C_2=1.247$、$L_3=1.8019$、$C_4=2.0$、$L_5=1.8019$、$C_6=1.247$、$L_7=0.445$、$R_T=1$。这些元件的逆归一化取值标注如图14-32a所示。可以看到，使用巴特沃思滤波器设计我们同时满足了增益指标和群延迟指标（如图14-32b所示），并且没有使用额外的群延迟均衡电路。



(a) 电路



(b) 延迟变化峰峰值小于1000ns（约为535ns）。

图14-32 7阶巴特沃思梯形滤波响应

注：假设滤波器后面使用+2倍增益电路补偿（滤波器中）电阻分压器的影响。

14.8 本章习题

习题14.1

设计一个7阶巴特沃思低通滤波器，它的截止频率为4.5MH。使用LC梯形滤波电路来实现这一滤波器，源电阻为50Ω。假设在滤波器后面使用了＋2倍增益电路以补偿源电阻和端接电阻分压造成的−6dB损失。

习题14.2

计算习题14.1设计的4.5MHz截止频率滤波器在13.5MHz处的衰减。

习题14.3

设计一个5阶巴特沃思滤波器，它的截止频率为50kHz，使用Sallen-Key电路来实现它。

习题14.4

比较7阶4.5MHz截止频率的巴特沃思滤波器与7阶4.5MHz截止频率的切比雪夫滤波器的阶跃响应。对每个滤波器的上升时间和过冲进行评价。

习题14.5

设计一个6阶切比雪夫滤波器，它的通带纹波为0.5dB，截止频率为3.58MHz。求解该滤波器群延迟变化的峰峰值。

习题14.6

一个5阶巴特沃思滤波器设计，使用相同的源电阻和端接电阻，如图14-33所示。该滤波器的−3dB频率点为1rad/s（0.16Hz）。

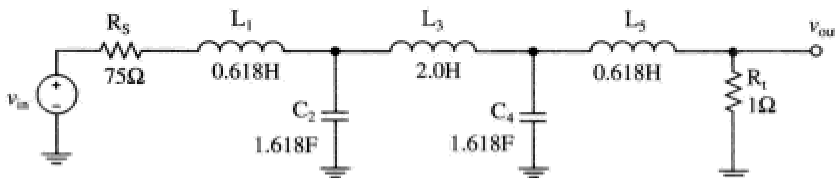


图14-33　5阶1rad/s巴特沃思低通滤波器

（a）计算如图14-33所示滤波器的输出衰减下降至−40dB的频率点（以rad/s为单位）。

（b）现在，假设源电阻和端接电阻均为75Ω。你需要一个−3dB截止频率为10MHz（不是以rad/s为单位）的滤波器。求解逆归一化巴特沃思滤波器各个元件的取值，在电路中标注出来。

（c）绘制10MHz滤波器的群延迟－频率关系曲线。在绘制的曲线中，至少要包含下列数据点：直流、5MHz、10MHz、15MHz。并且说明群延迟在哪个频率点达到峰值。

习题14.7

一个−3dB截止频率的低通滤波器原型，它的群延迟在直流点为1s。对该滤波器进行变换，得到相同类型和相同阶数的新滤波器，不过新滤波器的−3dB截止频率为4.5MHz，那么，请问新滤波器在直流点的群延迟又是多少呢？

14.9 参考文献

Balch, Brent, "A Simple Technique Boosts Performance of Active Filters," *EDN*, November 10,1988, pp. 277-286.

Blinchikoff, H., and Zverev, A., *Filtering in the Time and Frequency Domains*, John Wiley, 1976.

Burton, L. T., and Treleaven, D., "Active Filter Design Using Generalized Impedance Converters," *EDN*, February 5, 1973, pp. 68-75.

Chambers, William, "Know Your Options and Requirements when Designing Filters," *EDN*, August 5, 1991, pp. 129-138.

Corral, C., "Designing elliptic filters with maximum selectivity," *EDN*, May 25, 2000, pp. 101-109.

Corrington, Murlan S., "Transient Response of Filters," *RCA Review*, September 1949, vol. 10,no.3, pp. 397-429.

Downs, Rick, "Vintage Filter Scheme Yields Low Distortion in New Audio Designs," *EDN*, November 7, 1991, pp. 267-272.

Steer, Robert, Jr., "Antialiasing Filters Reduce Errors in A/D Converters," *EDN*, March 30, 1989,pp. 171-186.

Tow, J., "A Step-by-Step Active-Filter Design," *IEEE Spectrum*, December 1969, pp. 64-68.

Williams, A., and Taylor, F, *Electronic Filter Design Handbook*, McGraw-Hill, 1988.

Yager, Charles, and Laber, Carlos, "Create a High-Frequency Complex Filter," *Electronic Design*, April 13, 1989, pp. 123-127.

Zverev, Anatol, *Handbook of Filter Synthesis*, John Wiley, 1967.



第15章　无源元件综述与PCB设计案例研究

本章概要

- 本章考虑无源元件的某些微妙性质，比如无源元件的构造技术、寄生效应等。在这里，我们将涉及电阻、电容和电感的一些细节知识。然后，我们将使用学过的知识对PCB的布局与设计问题进行演示性讨论。

15.1　电阻

乍一看，电阻就是电阻，（没有什么微妙的地方啊）。不过，现在我们将挖掘电阻元件的某些微妙性质。一个理想电阻的阻抗是与其工作频率无关的①，即

$$Z_{\text{resistor,ideal}} = R \tag{15-1}$$

而一个真实电阻（如图15-1所示）则还包含一个由电阻引线长度引起的寄生电感，以及一个跨接在电阻两端的寄生电容。电阻元件包含这些寄生元件之后的阻抗为②

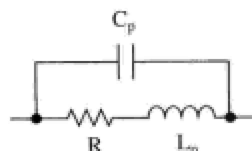


图15-1　电阻R（标明寄生元素）串联电感L_p和并联电容C_p

$$Z_{\text{resistor,real}}(s) = \frac{Ls+R}{LCs^2+RCs+1} = \frac{R\left(1+\frac{L}{R}s\right)}{LCs^2+RCs+1} \tag{15-2}$$

我们可以将该公式变换为“jω”形式，用$s=\text{j}\omega$进行替换，得

$$Z_{\text{resistor,real}}(\text{j}\omega) = \frac{\text{j}\omega L+R}{(1-\omega^2 LC)+\text{j}\omega RC} \tag{15-3}$$

对于大阻值电阻元件来说③，它的时间常数RC处于主导地位。这是因为一个大阻值电阻元件自身的阻抗将会淹没掉寄生电感的阻抗。对于小阻值电阻元件来说，则是时间常数L/R占据支配地位。这是因为电阻元件本身有效地短路掉了寄生电容。真实电阻元件的阻抗的幅度为

$$\left|Z_{\text{resistor,real}}\right| = \sqrt{\frac{(\omega L)^2+R^2}{(1-\omega^2 LC)^2+(\omega RC)^2}} \tag{15-4}$$

如图15-2所示，我们来观察一个$R=1\text{M}\Omega$、$C=0.2\text{pF}$、$L=10\text{nH}$的电阻的阻抗。可以看到这是个阻值相对比较大的电阻（$R \gg Z_0=223\Omega$），寄生电容的影响占据主导地位，其阻抗大致在1MHz以上的频率段上滚降。

---

① 观察这种现象的另一种方法是，流经理想电阻的电流与该理想电阻两端的电压是同相位的。

② 合理推导该结果的一个方法是，考虑$L\to 0$以及$C\to 0$时的极限。我们希望此时的阻抗恰好为R，事实也确实如此。

③ 我们可以理解，这里的“大阻值”是指电阻足够大以使$RC \gg L/R$，或者$R \gg (L/C)^{1/2}$。$(L/C)^{1/2}$项在RLC电路和传输线中极为常见，被称为这些电路的特征阻抗（characteristic impedance）Z_0。

如图15-3所示，我们来观察一个$R=10\Omega$、$C=0.2\text{pF}$、$L=10\text{nH}$的电阻的阻抗。可以看到寄生电感的影响占据支配地位，其阻抗大致在10Mrad/s以上频率段上增大。

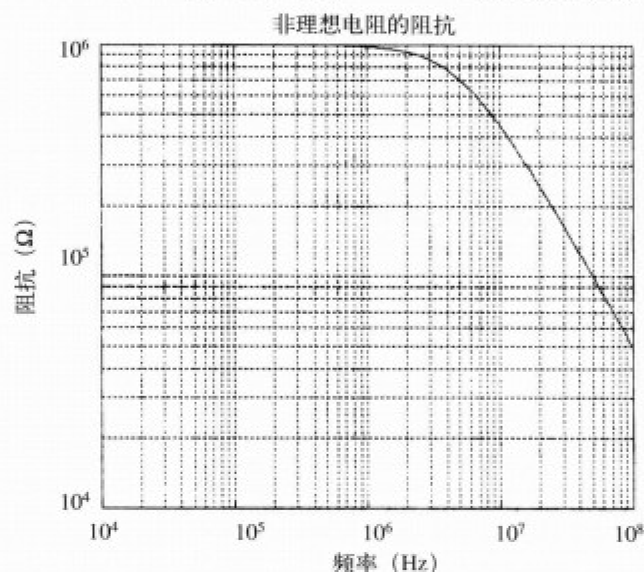


图15-2 $R=1\text{M}\Omega$、$C=0.2\text{pF}$、$L=10\text{nH}$的非理想电阻的阻抗

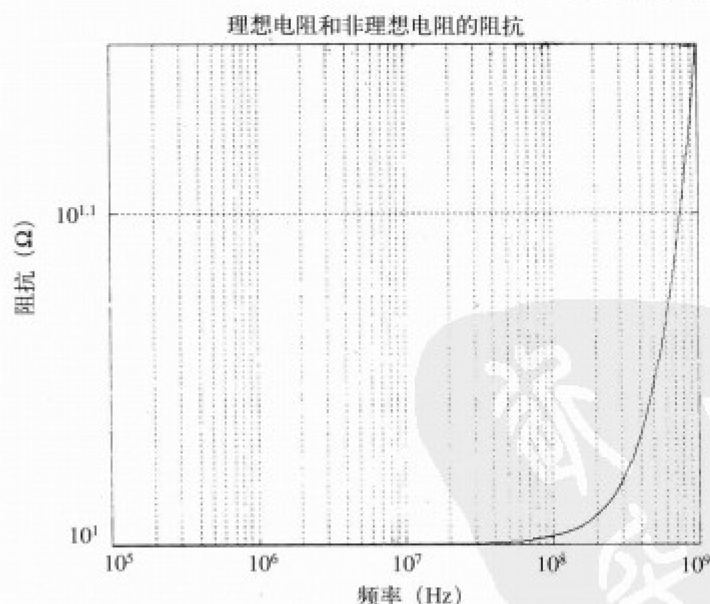


图15-3 $R=10\Omega$、$C=0.2\text{pF}$、$L=10\text{nH}$的非理想电阻的阻抗

测量电阻元件的这些寄生元素的准确数值是极为困难的，但是对于标准的通孔电阻（through-hole resistor，即直插式电阻）来说，寄生电容的大小预计为1pF的几分之一，寄生电感的大小预计为几个纳亨①。在高频电路应用中，就需要考虑这些寄生元件的影响，比如

① 位于地电位之上的元件的引线电感粗略估计准则是，每厘米引线长度的电感为10nH。因此，如果期望电路板的寄生电感最小化，那么就应该保持元件的引线长度尽可能短。当然，也可以使用一个阻抗分析仪（比如HP公司的HP4192）来测量使用的电阻，提取器件的串联寄生电感和并联寄生电容等参数。

串联寄生电感和并联寄生电阻。

15.2 贴片电阻简介

使用表面贴装电阻，可以使制作的电路板的面积达到最小，并且可以在某种程度上降低寄生电感的影响。贴片电阻有多种封装尺寸，从最小的封装尺寸“0201”，到封装尺寸“0402”，一路增大直至最大的封装尺寸“2512”。电阻封装尺寸的大小反映的是电阻的长度和宽度。比如，一个封装尺寸为“0805”的电阻就表示，其长度为0.08in (1in=25.4cm)，宽度为0.05in。

制造电阻元件时，在其封装尺寸、功率大小和额定工作电压之间存在折中考虑，如表15-1所示。比如，电阻越长，其额定工作电压也越高，这是由于它有更高的电压击穿特性。

表15-1 表面贴装电阻的额定参数比较表

电 阻	尺 寸	典型的额定功率①	典型的额定工作电压②
0201	0.02" × 0.01"	50 mW	15V
0402	0.04" × 0.02"	50mW – 62.5mW	50V
0603	0.06" × 0.03"	62.5mW – 100mW	75V
0805	0.08" × 0.05"	100 mW – 250mW	100V
1206	0.12" × 0.06"	125 mW – 250 mW	200V
1210	0.12" × 0.10"	250mW – 333mW	200V
1812	0.18" × 0.12"	500 mW	200V
2010	0.20" × 0.10"	500 mW	200V
2512	0.25" × 0.12"	1000 mW	250V

15.3 电阻类型

作为一个电路设计者，还需要决定将什么类型的电阻用于自己设计的电路中。比如，你是要选择碳化合物电阻、碳膜电阻、金属膜电阻、绕线电阻还是其他什么类型的电阻？

碳化合物电阻（carbon composition resistor），有时也称为*碳化合物*（carbon comp），是一类老式电阻，已经在电子领域使用了许多年。碳化合物电阻最主要的优点在于它们能够忍受大的电流瞬态浪涌的能力。不过，它们的电阻率也确实存在高温度系数的缺点。记住，一个电阻的阻值是随着温度变化的，计算电阻阻值（随温度变化）的公式为

$$R(T) = R_0(1+\alpha(T-T_0)) \tag{15-5}$$

- $R(T)$为工作温度点的阻值
- R_0为温度T_0点的参考阻值
- α为电阻率的温度系数

碳化合物电阻也有阻值随时间漂移的趋势，尤其是当它们在遭受大电流的过渡应力时。在现代电子学领域，碳化合物电阻已经大量被金属膜电阻（metal film resistor）和碳膜电阻（carbon film resistor）取代。膜电阻的电阻率具有低温度系数的优点。不过，它们在某种程度上更易遭受过量电子负载的损坏。

---

① 电阻的额定电子功率在制造商之间存在一些变化，因此使用时一定要检查特定器件的数据手册。

② 再次强调，这些数据仅仅用于比较的目的，因此要检查专门的制造商数据。

在需要大电子功率的应用场合，线绕电阻（wire wound resistor）被大量使用。不过，它们确实会遭受大串联电感寄生效应的影响，这是由于它们是使用缠绕金属线进行制造所形成的固有特性。

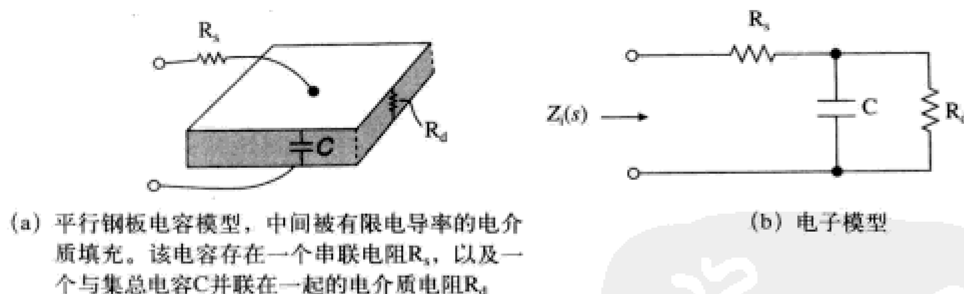
各类电阻的比较如表15-2所示。

表15-2　电阻类型比较表

电阻类型	典型额定功率	温度系数	评　论
碳化合物电阻	0.25W~2W	>1000ppm/°C	老式电阻。在新设计中通常被碳膜电阻和金属膜电阻取代
碳膜电阻		通常为-50 ppm/°C~-1000 ppm/°C	
金属膜电阻		通常为+50 ppm/°C~+300 ppm/°C	低噪声
线绕电阻	通常>5W	通常为+100 ppm/°C	通常用于大功率电阻。小心它的大寄生电感的影响

15.4 电容

正如电阻元件会遭受寄生元素的影响一样，电容元件也在遭受寄生元素的影响。一个真实电容的模型可以构造为一个中间填充电介质的平行钢板[①]，如图15-4a所示。电阻R_s为引线的串联电阻阻值。平行钢板被有限电导率的电介质填充[②]。这就导致存在一个电介质电阻R_d，它与期望电容C并联在一起，如图15-4b所示。



（a）平行钢板电容模型，中间被有限电导率的电介质填充。该电容存在一个串联电阻R_s，以及一个与集总电容C并联在一起的电介质电阻R_d

（b）电子模型

图15-4　电容，标明寄生元素

真实电容的输入阻抗为

$$Z_i(s) = R_s + \frac{R_d}{R_d C s + 1} \tag{15-6}$$

我们可以展开该结果，以得到输入阻抗的实部和虚部，如式（15-7）所示

$$\begin{aligned} Z_i(j\omega) &= R_s + \frac{R_d}{j\omega R_d C + 1} \\ &= R_s + \frac{R_d(1 - j\omega R_d C)}{1 + \omega^2 R_d^2 C^2} \end{aligned} \tag{15-7}$$

① 在该例子中，为了简化，我们忽略了串联电感。

② 关于有损电容的更多信息，参见Markus Zahn的著作*Electromagnetic Field Theory: A Problem Solving Approach*，Krieger授权使用，1987年，pp.184-194。注意，在这个原创模型中，我们没有包含串联电感的影响。稍后，我们将会更详细地考虑这一点。

$$=\left[R_s+\frac{R_d}{1+\omega^2R_d^2C^2}\right]-j\left[\frac{\omega R_d^2C}{1+\omega^2R_d^2C^2}\right]$$

公式中的第一项（实部）有时被称为电容的等效串联电阻（equivalent series resistance，ESR），即

$$R_{ESR}=\left[R_s+\frac{R_d}{1+\omega^2R_d^2C^2}\right] \tag{15-8}$$

可以看到，等效串联电阻ESR随频率的升高而减小。等效电容的大小为

$$C_{eq}=C\left[1+\frac{1}{\omega^2R_d^2C^2}\right] \tag{15-9}$$

一个电容标明等效串联电阻的简化模型如图15-5所示。在该模型中，我们还增加了一个等效串联电感（equivalent series inductance）（L_{ESL}）。串联电感的大小与电容器的内部结构的几何特征有关，同时还与它在电路中的连接器件的引线长度有关。一个电容的等效串联电感的大致正确的估计准则为，每厘米引线长度的电感为10nH。某些电解电容是用装在铁壳中的缠绕线圈制造的，其等效串联电感相对比较高。

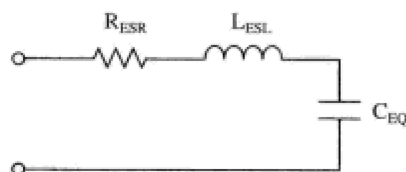


图15-5　电容模型，标明等效串联电阻（R_{ESR}）和等效串联电感（L_{ESL}）

在电容器的数据手册中经常看到的另一项质量参数（figure-of-merit）为耗散因子（dissipation factor，DF）。耗散因子的计算公式为

$$DF=\frac{R_{ESR}}{\omega C} \tag{15-10}$$

我们可以看到，电容器的耗散因子是品质因数Q的倒数。我们如果绘制如图15-6所示的等效串联电阻ESR、电容性电抗（X_C）、以及电容器的整体阻抗（**Z**）的矢量关系图，可以观察到，在电容器的电容性电抗和阻抗之间存在一个相位角。耗散因子就是这个相位角的正切函数的大小，即

$$DF=\tan(\delta) \tag{15-11}$$

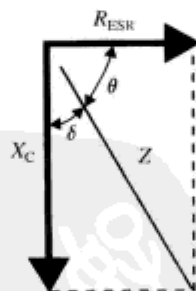


图15-6　演示耗散因子的矢量关系图。耗散因子为电容器的电容性电抗X_C和整体阻抗**Z**的夹角的正切值

一个理想电容的阻抗为

$$Z_{cap,ideal}=\frac{1}{j\omega C} \tag{15-12}$$

一个真实电容（忽略电介质损失）的阻抗则为

$$Z_{cap,real}=\frac{1}{j\omega C}+R+j\omega L=\frac{(1-\omega^2LC)+j\omega RC}{j\omega C} \tag{15-13}$$

（真实电容的）阻抗幅度为

$$\left|Z_{cap,real}\right|=\sqrt{\frac{(1-\omega^2LC)^2+(\omega RC)^2}{\omega C}} \tag{15-14}$$

电解电容的阻抗曲线如图15-7所示，对理想阻抗与真实阻抗进行比较，其中$C=100\mu F$、$L=25nH$、$R=0.01\Omega$。我们可以看到，频率大于1MHz时，电容的阻抗看起来表现为电感性质。

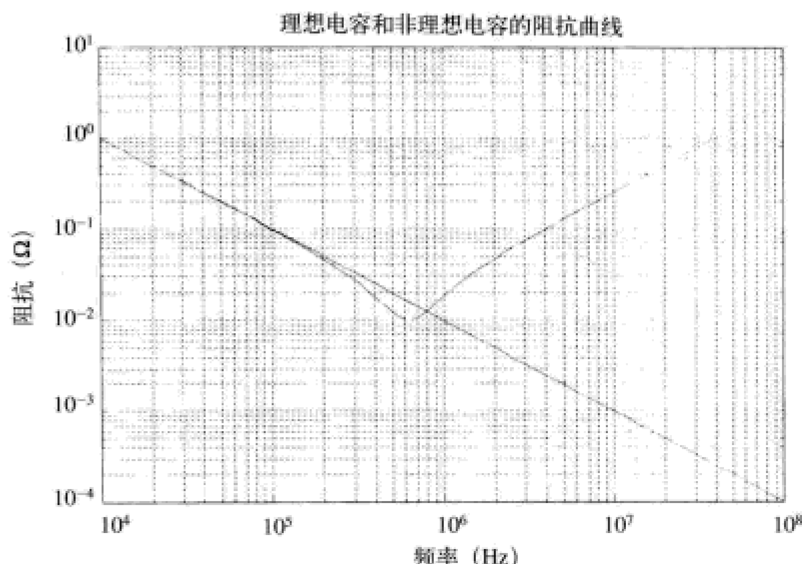


图15-7 电解电容的阻抗曲线，其中$C=100\mu F$、$L=25nH$、$R=0.01\Omega$。虚线为100μF理想电容的阻抗

15.5 电感

一个理想电感的阻抗为

$$Z_{\text{inductor,ideal}} = j\omega L \tag{15-15}$$

对于一个真实电感来说，其阻抗被铜金属线的电阻[①]和互联缠绕线圈的电容所改变（如图15-8所示）。其阻抗变为

$$Z_{\text{cap,real}} = \frac{j\omega L + R}{(1-\omega^2 LC) + j\omega RC} \tag{15-16}$$

真实电感的阻抗的幅度为

$$\left|Z_{\text{inductor,real}}\right| = \sqrt{\frac{(\omega L)^2 + R^2}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \tag{15-17}$$

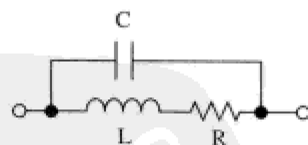


图15-8 电感模型。标明串联电阻R和互联缠绕线圈的电感等寄生元件

电解电容的阻抗曲线如图15-9所示，对电感的理想阻抗与真实阻抗进行比较，其中$L=100\mu H$、$C=25pF$、$R=0.1\Omega$。我们可以看到，电感的自振频率（约为20Mrad/s）非常明显。在自振频率以上，该电感的阻抗看起来表现为电容性质。

15.6 PCB设计问题讨论

PCB的布局和布线有时是电路设计周期中最后一分钟的任务。要想设计一个良好布局的PCB，需要注意多方面的细节，这其中包括：

- 关于何处是设计预计的高频位置、大电流位置或者灵敏电路位置的知识。
- 关于元件限制因素的一些信息。
- 关于噪声源的信息。

① 该分析忽略了电感铁芯的损失（如果存在铁芯），以及集肤效应（skin effect）造成的电流堆积等其他高频影响。

- 实际约束，比如PCB的外观尺寸、连接器位置以及安装孔位置。
- 其他约束，比如PCB设计规则，要求最小走线宽度、走线间距等。

接下来是对这些细节问题的讨论。

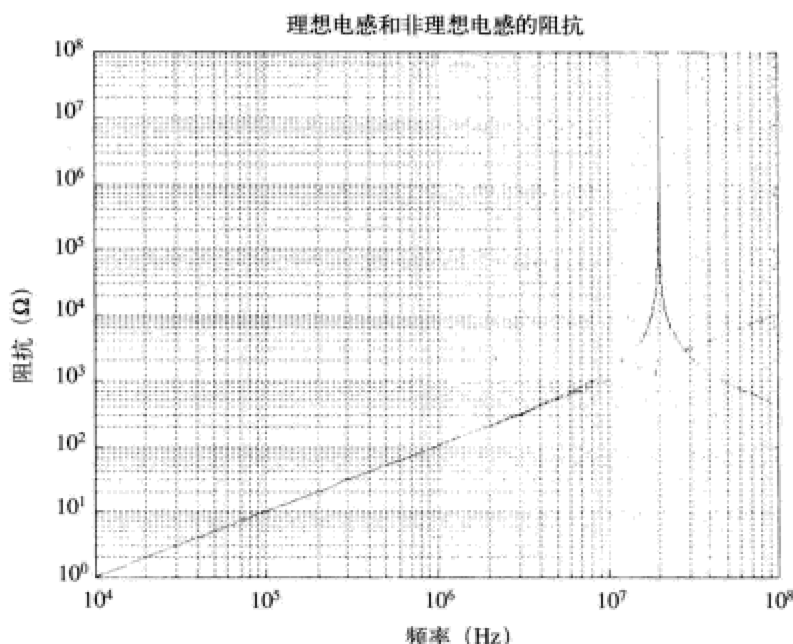


图15-9　真实电感的阻抗曲线，$L=100\mu H$、$C=25pF$、$R=0.1\Omega$。虚线为100μH理想电感的阻抗

15.6.1　供电电源旁路

集成电路对供电电源旁路的需求源于这样一个事实：不存在完美的零阻抗零电位地平面。考虑如图15-10所示的集成电路IC_1的模型，集成电路的细节对于该讨论并不重要。集成电路器件通过导线或者地平面与电源平面从直流电源获取电功率（V_{supply}）。与供电电源互联的串联电感和电阻如图所示。

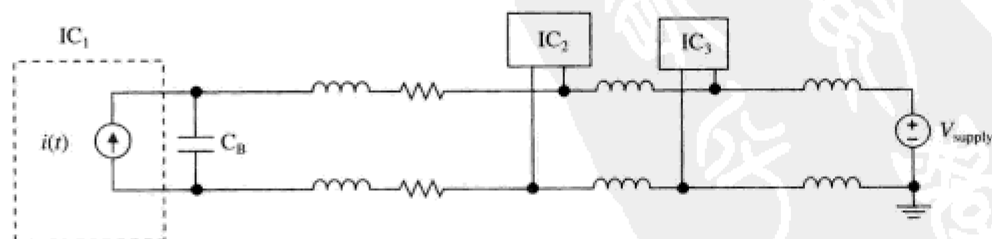


图15-10　标明集成电路获取电流及其旁路路径的电路模型。电容C_B为集成电路IC_1的旁路电容

集成电路IC_1以极高的变化率di/dt获取快速开关电流（用电流源模型$i(t)$表示）。使用电容旁路集成电路的希望在于，适当地选择旁路电容C_B，并且进行合理地布局，可以强迫瞬态电流在集成电路附近进行局部流通，因此限制电源线上的电压瞬态现象。当然，我们希望流进集成电路IC_1的电流中的直流成分能够流回供电电源。然而，如果我们将快速的电流脉冲返回至供电电源，将促使电源线上出现电压瞬态现象，受分布电阻和分布电感的作用，扩散至集成电路IC_2和IC_3。

选择和布局旁路电容C_B的关键在于，选择能够胜任该工作的足够尺寸的电容，并将其放置到距集成电路IC_1的电源管脚和接地管脚尽可能接近的位置。这将保证电容旁路路径上的电感最小化，确保高频开关电流在集成电路IC_1附近进行局部流通。

降低电流返回路径的阻抗的一种方式为，使用接地平面，下节将讨论这方面的内容。

15.6.2 接地平面

地电位是电流的一个返回路径。设计人员总是期望电流返回路径的阻抗尽可能小，以降低电源线上的瞬态感应电压降，以及电磁辐射。在双层PCB应用中，因为设计人员通常希望有一对可以用于信号布线的PCB层，所以很难有一个专门的接地平面。但是，在多层PCB应用中，则能很容易在PCB的内层中专门设置一个连续的接地平面作为地电位。

接地平面的使用可以帮助降低PCB上的信号走线（即电路板上连通电路元件的信号走线）的电感。其中一种技术是使大电流走线和大电流变化率di/dt走线正对于连续接地平面的上面。如果设计人员想降低信号走线的电感，也可以使用宽的信号走线。

15.6.3 PCB线宽

PCB上的信号走线为了承载需要的电流，并且不出现过度的温度上升现象，必须具有合适的走线尺寸（包括宽度和厚度，或者说铜重，[①]铜重与厚度的关系见表15-3）。一个经验方法为，10mil (1mil=0.0254mm)宽、1oz (1oz=28.35g) 重的PCB走线可以承载500mA以上的电流，并且走线温度比周围环境温度升高20°C。PCB上的走线温度升高20°C时的电流承载能力估计如图15-11所示。PCB上信号走线的熔断电流更高一些（如图15-12所示）。

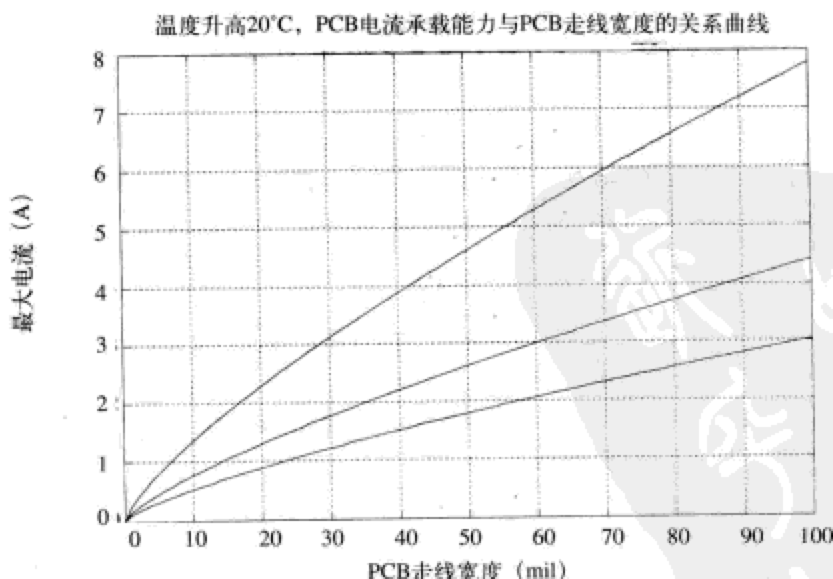


图15-11 温度升高20°C，铜重分别为0.5oz、1.0oz和2.0oz的PCB走线宽度与大致电流承载能力的关系曲线[②]。上面的曲线为2oz铜重，下面的曲线为0.5oz铜重（注意：1mil＝0.001in）

① “铜重”告诉设计人员PCB信号走线的厚度是多少。典型的低功率模拟电路板使用1/2oz或者1oz的铜重。高功率电路板可以使用2oz或者更大的铜重。

② 摘自Douglas Brooks的著作，参见本章结尾的参考文献。

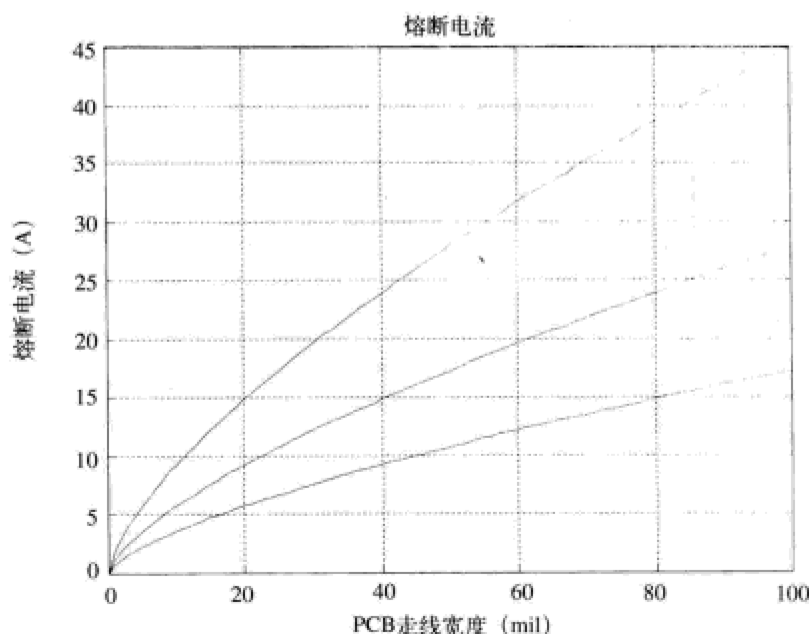


图15-12　铜重分别为0.5oz、1.0oz和2.0oz的PCB[①]走线宽度与大致熔断电流的关系曲线

表15-3　PCB走线的铜重与厚度的关系表

铜　重	铜厚（in/mil）
1/2 oz.	0.0007" (0.7mils)
1.0 oz.	0.0014" (1.4mils)
2.0 oz.	0.0028" (2.8mils)

15.7　接地平面上PCB走线的大致电感

接地平面上的PCB走线的电感可以假设为微带线，再进行粗略估算。对于长度为l、宽度为w、带间距$d \ll w$的微带线（如图15-13a所示）来说，电感计算公式（较为粗略[②]）为

$$L \approx \mu_o \frac{lh}{w} \tag{15-18}$$

使用该估算公式，可以计算线宽$w=0.01$in、高度$h=0.005$in的微带线的电感。我们估计其电感为每厘米长度6.3nH。二维有限元分析方法（finite element analysis，FEA）[③]（如图15-13b所示）估计该电感偏低一些，约为每厘米长度3.9nH。

例题15.1：设计案例之高速半导体激光二极管驱动器

本节考虑半导体激光二极管高速开关系统的设计、分析以及PCB布局，该系统可用作调制红外（infrared，IR）光源。直接调制方法中，半导体激光二极管的激光功率输出被变换的

① 摘自Douglas Brooks的著作，参见本章结尾的参考文献“Fusing Current”。

② 可以看到，随着接地平面上面的走线高度h的增大，该估计公式越来越不精确。因此，该公式只用于大致范围的估计。对于各种几何关系走线的电感的更详细计算参见本章结尾给出的参考文献，Grederick Grover的优秀著作“Inductance Calculations”。作者衷心感谢MIT的Dave Perreault教授，两人是研究生同学时，后者帮作者修订了该书。

③ 曲线绘制和分析均使用了David Meeker博士在Foster-Miller公司创建的有限元工具包FFMM。

二极管电流的变化。为了使二极管能够用作高速调制光源，需要使用一个激光器阈值附近的小直流电流对激光器进行偏置设置，同时叠加一个调制电流。半导体二极管的光功率输出与阈值电流之上的激光器电流成正比。直接调制方法可用于激光通信、光纤链路、材料切割等工业应用以及CD播放器和医学激光打印机等商业产品中。

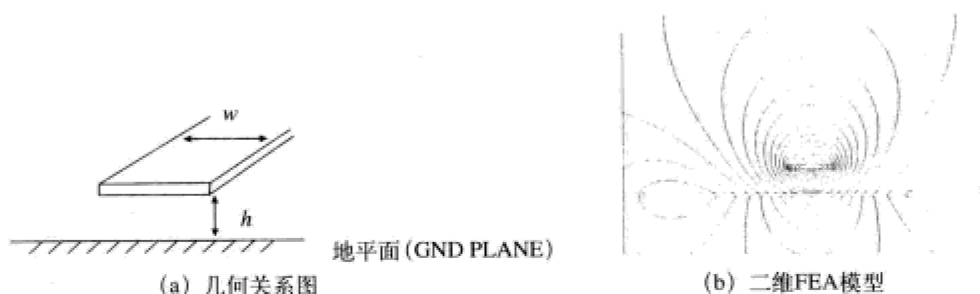


图15-13 接地平面上宽度$w=0.01$in、高度$h=0.005$in的PCB走线的二维FEA模型

从电子学角度讲，半导体激光器的行为特性就像一个二极管，其V/I关系曲线如图15-14所示。因为半导体二极管使用GaAs材料制造，而不是使用硅材料，所以其导通电压"结点"约为1.5V。

正常工作情况下，二极管受电流源驱动，以使二极管电流，即使在二极管电压随时间和温度发生漂移时，仍保持恒定不变。高功率激光二极管的光功率输出与二极管电流的关系如图15-15所示。对于极低电流的情况，二极管不发射，几乎不发光。(事实上，电流$<I_{th}$时，激光器的行为特性就像一个LED二极管，存在一些非常小的光功率发射。)一旦二极管电流增大到阈值电流（I_{th}），二极管开始发光，且发光功率与超出激光器阈值电流值的电流大小成正比。对于一个功率为2W的激光二极管，工作电流约为2.5A，如图15-15所示。如果激光器的电流进一步增大，激光器可能被灾难性光损坏(catastrophic optical damage，COD）过程损坏。激光器发生COD现象时，造成过度发热，将会破坏[①]激光器的发射区域。

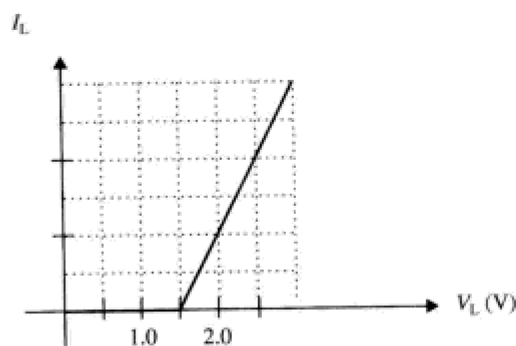


图15-14 具有代表性的激光二极管V-I曲线，标明激光器电压V_L和激光器电流I_L

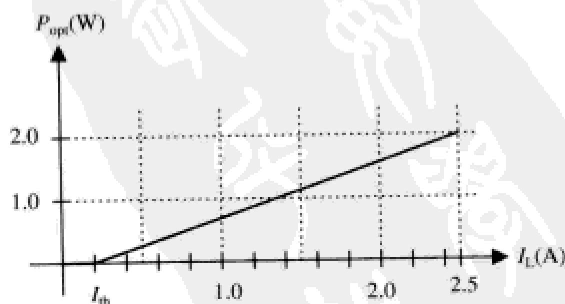


图15-15 具有代表性的高功率激光二极管功率－电流曲线。水平轴（I_L）为激光二极管的电流。竖直轴（P_{opt}）为激光器的光功率输出。在激光器阈值I_{th}之下，二极管表现为LED

半导体激光二极管本身属于快速器件。本征发射过程受高速率变化的注入电流的调制。对于具有代表性的二极管来说，激光器的功率传递函数曲线（光功率输出相对电流

① 曲线代表了作者使用一个特定高功率激光二极管，存在具有不同功率水平和工作电流的其他激光器。

激励）在高达数百兆赫频段上都是平坦的，甚至可以达到更高的频段（如图15-16所示），这与二极管构造的细节以及电流偏置水平有关。受量子弛豫（quantum relaxation）过程影响，振荡频率接近10^{10}rad/s。因此，实践中，如果激光器的电流改变得足够快，或许可以达到这里指出的高速光调制速度。接下来，这将引导我们思考如何以大电流和快速上升时间的形式开关激光器的电流。

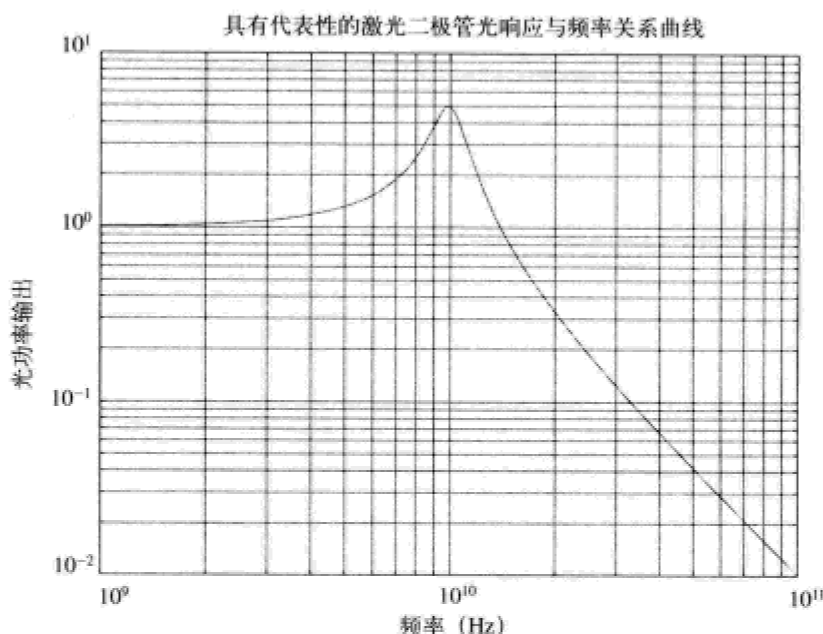


图15-16　具有代表性的激光二极管的本征光输出频率响应，激光器谐振频率为1GHz。水平轴为频率（Hz）

驱动器的实现

适用于驱动激光二极管的一种可行电路结构如图15-17所示。两个直流电流源I_{BIAS}和I_{th}向激光器馈入电流，两个电流源分别对应于激光器的“峰值（PEAK）”电流和“阈值（THRESHOLD）”电流。当电压V_{B1}为“低（LOW）”，电压V_{B2}为“高（HIGH）”，晶体管Q_1“关闭（OFF）”，Q_2“导通（ON）”，激光二极管中的整体电流为$I_{PK}+I_{th}$。位于晶体管Q_1集电极的电阻将功率耗散掉，因此Q_1不会损坏。

本书作者负责了这个半导体二极管激光调制器的设计，该调制器能以低于20ns的上升时间和下降时间将2.5A电流脉冲送至低阻抗负载。该电路板的用途是用来驱动半导体二极管激光器进行高速打印①。

该设计本身存在诸多设计挑战。首先，激光器信号是大电流、快速上升时间的电流脉冲集合，重复速率变化范围大，可以从直流达到10MHz，并且占空比灵活多变。这就意味着，设计时必须极度小心，以确保PCB上开关元件到激光器之间为低电感通路。PCB上的开关设计同时也呈现出必须关注的发热问题。

① 关于该设计的更多细节参见Marc Thompson和Martin Schlecht的文章“High Power Laser Diode Driver Based on Power Converter Technology”，*IEEE Transactions on Power Electronics*，Vol.12，No.1，1997年1月，pp.46-52，以及美国专利5444728号（1995年8月22日授予专利权）。

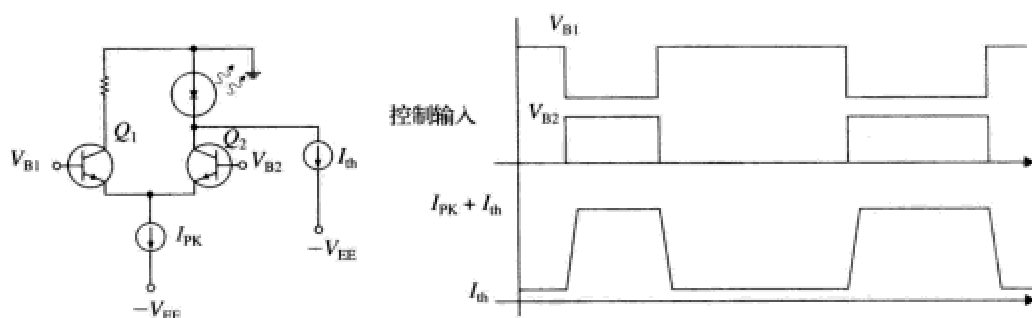


图15-17 使用发射极耦合开关实现的激光驱动器电路，及其响应波形。顶部的曲线为控制输入电压V_{B1}和V_{B2}，底部曲线为激光器电流

开关晶体管阵列的简化电路图如图15-18所示。为了提供低电感通路，同时具有良好的发热管理措施，快速开关被拆分为十二个更小的发射极耦合开关，每个耦合开关使用一对晶体管2N2222实现。注意，发射极耦合对Q_{1a}和Q_{1b}同时只有一个晶体管导通。当驱动信号（DRIVE）为“高（HIGH）”，反相驱动信号（$\overline{\text{DRIVE}}$）为“低（LOW）”，Q_{1a}“导通（ON）”，Q_{1b}“关闭（OFF）”（因此，激光器关闭，在阈值电流I_{th}点空闲）。当驱动信号（DRIVE）为“低（LOW）”，反相驱动信号（$\overline{\text{DRIVE}}$）信号为“高（HIGH）”，Q_{1a}“关闭（OFF）”，Q_{1b}“导通（ON）”，激光器的整体电流为$I_{th}+I_{PK}$。

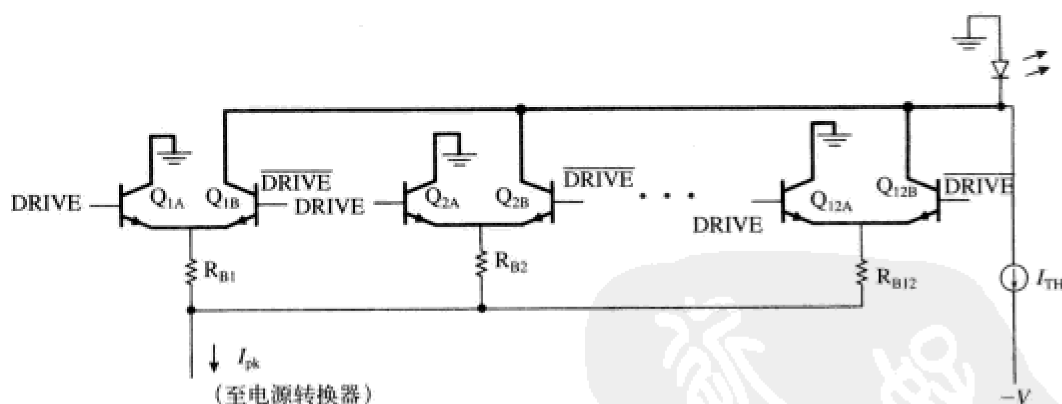


图15-18 开关晶体管阵列，具有高达2.5A的快速上升时间开关能力。开关晶体管阵列由12对高速开关晶体管组成。高速和大电流开关关键通路如图中的粗实线所示

高速和大电流开关的关键路径用粗实线高亮表示[①]。晶体管阵列中每个晶体管可以切换至超过200mA的最大电流。保持晶体管之间以及晶体管到激光二极管之间的互联电感为极低数值是必须遵守的强制性规定，这样做可以保证晶体管阵列以它们能够达到的最大速度进行开关切换。从前面章节的内容我们知道，只要设计人员能够提供足够的基极驱动能力，发射极耦合开关本身的速度是非常快的[②]。

① 设计PCB的布局时，粗信号走线是实际设计的良好选择，因为连接到连续的地平面上的粗信号走线可以降低寄生电感效应。

② 参见第10章的内容，在那里我们曾经说明用作信号晶体管发射极耦合对的开关速度为几个纳秒。当然，这假设了我们有一个设计良好的印制电路以确保寄生电感不会严重降低晶体管的开关速度。

电阻R_{B1}, R_{B2}, ⋯R_{B12}均为低阻值镇流（ballast）电阻，确保晶体管对之间以相同的大小共享电流[①]。

另一项设计挑战为，–12V供电电源的额定工作电流仅为1A，而我们希望将2.5A电流传送至激光器。因此，需要一个直流/直流转换器减低供电电压，提升供电电流。该电路的简化实现如图15-19所示。直流/直流转换器的详细讨论超出了本书的范围。但是该电路确实能够降低电压，提升电流。因此，我们从–12V供电电源吸取的电流小于传送至激光器的电流。我们注意到这是一个高速开关电路，因此我们需要特别小心MOSFET晶体管和二极管的电路布局。功率MOSFET管以非常高的频率快速开关，以变化的占空比调节电流大小，如图中所示。

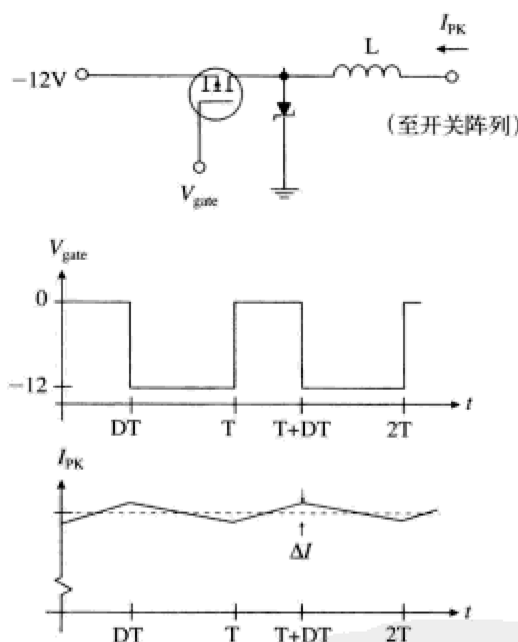


图15-19　直流/直流转换器的简化电路

在该设计中，PCB的外观尺寸要求为3.5in×4.5in，该设计正在替代以前的设计，PCB必须向后兼容，与先前的电路板在外观与接口方面一致保持。PCB的外观要素和定位孔如图15-20所示。

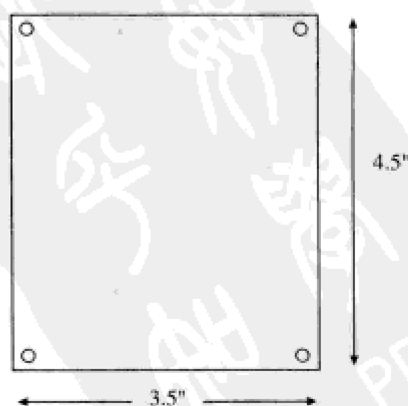


图15-20　PCB的外观要素：3.5in×4.5in，标明了4个定位孔的位置

连接器的位置也是在布局之前就规定好的（如图15-21所示）。连接器如下（从左下角以顺时针方向介绍）：

- 电源：在200mA时为＋12V；在1A时为–12V，2个接地管脚。
- 激光二极管连接：将微带电缆直接焊接在PCB上，为激光器提供低阻抗通路。

① 该设计中的晶体管是不匹配的，我们希望每个晶体管对恰好承载一半负载。1Ω量级的镇流电阻强迫晶体管对之间实现负载共享。

• 触发信号：这是个TTL电平信号，控制激光二极管的导通与关闭。当触发信号为高电平时，激光器导通。TTL电平信号的重复速率从直流到10MHz。
• 监视信号：该连接器用于缓冲和放大光电二极管信号，该信号用于监视激光器的光功率输出。
• 关闭按钮：另一个TTL电平信号，用于完全关闭激光器。

接下来，PCB多个信号走线的真实布线资源分配如图15-22所示。我们可以看到，高速、大电流电路与低电平模拟仪表电路被隔离开来。此外，PCB还是多层的，确保在高速电路下面可以使用连续的接地平面。PCB被分割的电路层平面如下：

• 顶层（元件面）：模拟信号
• 1号内部层：GND
• 2号内部层：–12V
• 底层（背面）：模拟信号，+12V

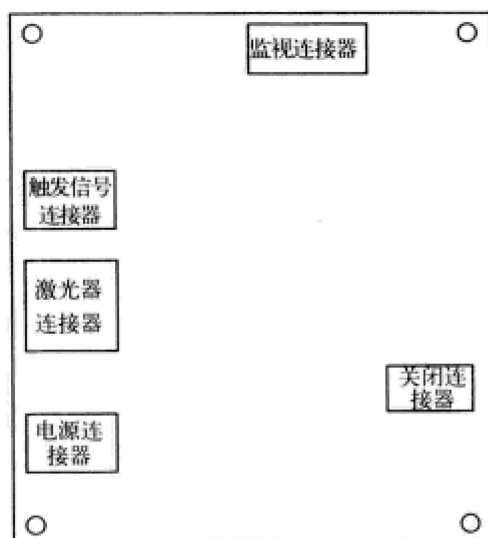


图15-21 PCB连接器的位置

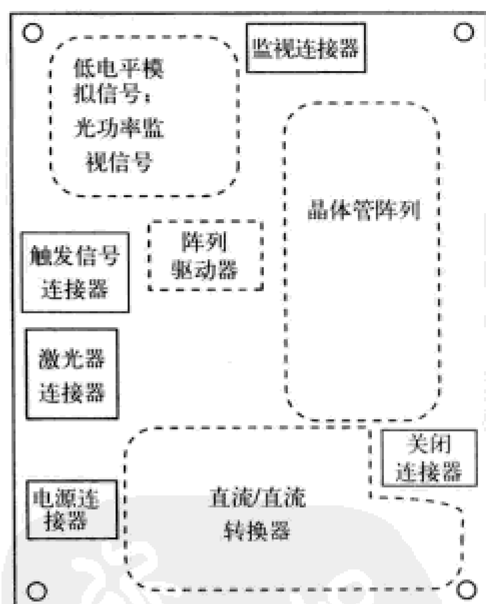


图15-22 PCB上的真实布线资源分配

PCB的一个内层被专门分配给–12V电源使用，因为要从DC/DC变换器吸取大量的开关电流。

设计完成后的PCB的照片如图15-23所示。激光器的光功率输出信号[①]的示波器照片如图15-24所示。我们可以看到，激光器正在开关的光功率达到2W峰峰值，这与2.5A的峰峰值开关电流是一致的。上升时间和下降时间均小于20ns。

① 光功率输出使用一个极其快捷的光检测器（photodetector）测量。因为激光器本身是个快速器件，光信号的输出形状代表了传送至激光器的电流脉冲的形状。

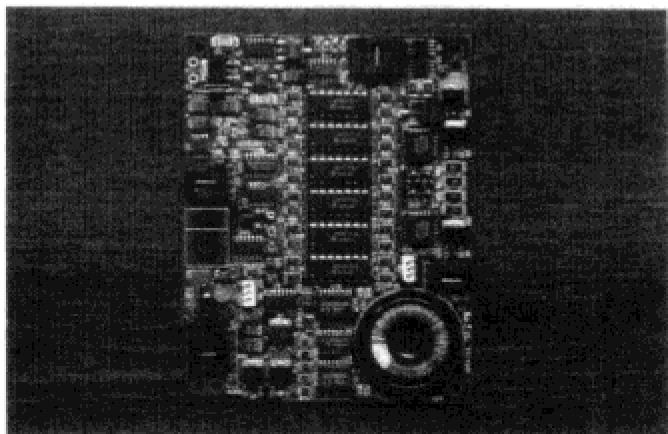


图15-23　PCB顶层（元件面）的最终布局。与激光二极管的连接没有标明

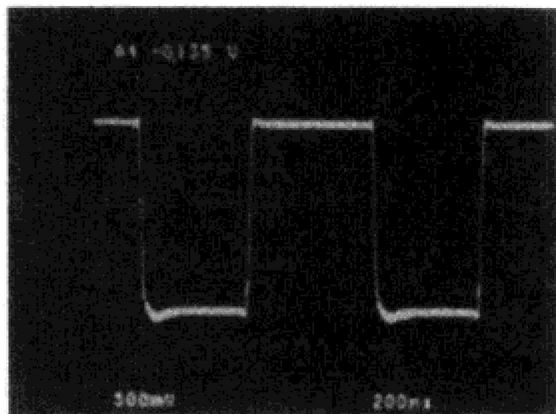


图15-24　示波器照片，标明激光器光功率信号的上升时间和下降时间。水平方向：200ns/div。竖直方向：满量程2W。激光器输出的光功率信号的10%~90%上升时间和下降时间均低于20ns

15.8　本章习题

习题15.1

该问题关注真实电容器。每个电容器都具有某些寄生元件，也就是说，不存在“理想电容器”这样的好事。比如，将电容器连接至设计电路的导线存在一个寄生电感，它与电容器串联在一起。这个寄生串联电感影响电容器的高频工作特性。电容器还存在某些内部电阻，它也与电容器串联在一起，这就是常说的等效串联电阻（ESR）。

（a）绘制真实电容器的集总电路模型。

（b）一对导线极为接近的电感约为每米导线长度1μH。对于1in的总体导线长度，假设电容为$C=1\mu F$和$C=1000\mu F$，分别计算电容器的自谐振频率。

（c）对于电容$C=1000\mu F$，以及1in的导线长度，假设等效串联电阻ESR＝10mΩ，绘制电容器阻抗的伯德图（对数–对数）。

（d）为什么设计人员要保持导线长度很短？

习题15.2

印制带电路板上某个信号走线的宽度为0.1in，长度为6in，接地平面上面的高度为0.06in。估计该信号走线在室温时的走线电感和走线电阻。假设走线由1oz重的铜材料组成。

习题15.3

一条微带线有两条铜质带状线组成，两条铜质带状线组成相距1cm宽度，被0.005in厚的Kapton绝缘材料隔开。估计6in长的微带线电感为多少。

习题15.4

PCB上安装的电感元件具有$L = 1\mu H$的理想值。然而，该器件的测量串联电阻为0.5Ω，使用阻抗分析仪测得并联谐振频率为15MHz。为该电感元件生成合适的集总电路模型。

习题15.5

膜型电容具有2.2μF的理想值。设计人员刚开始将该电容充电至250V，然后断开与充电电源的连接，使用示波器观察到电容器电压在60s内放电至100V。利用这些测量数据求解该电容器的集总电路模型。

习题15.6

MOSFET门驱动器集成电路具有非常低的阻抗，驱动一个MOSFET门电路，该MOSFET门电路可以用一个1000pF的电容模型来表示。MOSFET门驱动器在PCB距门电路的距离为2in，从驱动器驱动门电路形成大致50nH的串联电感，求解设计人员放置在门驱动器输出端的串联电阻的大小，串联电阻使门电路达到关键的阻尼效果。仿真设计电路，求解门信号的10%~90%上升时间。

15.9 参考文献

Bartoli, M., Reatti, A., and Kazimierczuk, M., "High-frequency models of ferrite core inductors," *International Conference on Industrial Electronics, Control and Instrumentation, (IECON '94)*, September 5-9, 1994, volume 3, pp. 1670-1675.

Brooks, D., "Fusing Currents—When Traces Melt Without a Trace," available at http://www.ultracad.com, printed in *Printed Circuit Design*, vol. 15, no. 12, Dec. 1998, pp. 53.

Cao, Y., Groves, R., Huang, X., Zamdmer, N., Plouchart, J., Wachnik, R., King, T., and Hu, C., "Frequency-independent equivalent-circuit model for on-chip spiral inductors," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, vol. 38, no. 3, March 2003, pp. 419-426.

Demurie, S. N., and DeMey, G., "Parasitic capacitance effects of planar resistors," *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology, Part A*, vol. 12, no. 3, September 1989, pp. 348-351.

Dolan, J. E., and Bolton, H. R., "Capacitor ESR measurement technique," *Eighth IEEE Pulsed Power Conference 1991*, June 16-19, 1991, pp. 228-231.

Franco, S., "Polypropylene capacitors for snubber applications," *Proceedings of the Thirty-First IAS Annual Meeting (IAS'96)*, October 6-10, 1996, pp. 1337-1342.

Galbraith, J., "Reliable Precision Wirewound Resistor Design," *IRE Transactions on Components Parts*, vol. 3, no. 3, December 1956, pp. 116-119.

Grover, F. W., *Inductance Calculations: Working Formulas and Tables*, Dover Publications, Inc., New York, 1946.

Jutty, M. K., Swaminathan, V., and Kazimierczuk, M. K., "Frequency characteristics of ferrite core inductors," *Proceedings of the Electrical Electronics Insulation Conference and Electrical Manufacturing & Coil Winding Conference, 1993*, October 4-7, 1993, pp. 369-372.

Madou A., and Martens, L., "Electrical behavior of decoupling capacitors embedded in multilayered PCBs," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 43, no. 4, November 2001, pp. 549-566.

Manka, W., "Alternative Methods for Determining Chip Inductor Parameters," *IEEE Transactions on Parts, Hybrids, and Packaging*, vol. 13, no. 4, December 1977, pp. 378-385.

Massarini, A., and Kazimierczuk, M. K., "Self-capacitance of inductors," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 12, no. 4, July 1997, pp. 671-676.

Naishadham, K., "Experimental equivalent-circuit modeling of SMD inductors for printed circuit applications," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Volume: 43, no. 4, Nov. 2001, pp. 557-565.

Neugebauer, T. C., Phinney, J. W., and Perreault, D. J., "Filters and Components With Inductance Cancellation," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 40, no. 2, March-April 2004, pp. 483-491.

Reed, E. K., "Tantalum chip capacitor reliability in high surge and ripple current applications," *1994 Electronic Components and Technology Conference*, 1994, May 1-4, 1994, pp. 861-868.

Sakabe, Y., Hayashi, M., Ozaki, T., and Canner, J. P., "High frequency measurement of multilayer ceramic capacitors," *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology, Part B: Advanced Packaging*, vol. 19, no. 1, February 1996.

Sarjeant, W. J., Zirmheld, J., and MacDougall, F. W., "Capacitors," *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 26, no. 5, October 1998, pp. 1368-1392.

Smith, L. D., and Hockanson, D., "Distributed SPICE circuit model for ceramic capacitors," *Proceedings of the 2001 Electronic Components and Technology Conference*, May 29-June 1, 2001, pp. 523-528.

Stroud, J., "Equivalent series resistance-the fourth parameter for tantalum capacitors," *Proceedings of the 1990 Electronic Components and Technology Conference*, May 20—23, 1990,pp. 1009-1012.

Thompson, Marc, and Schlecht, Martin, "High Power Laser Diode Driver Based on Power Converter Technology," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 12, no. 1, January 1997,pp.46-52.

Ulrich, R. K., Brown, W. D., Ang, S. S., Barlow, F. D., Elshabini, A., Lenihan, T. G., Naseem, H. A., Nelms, D. M., Parkerson, J., Schaper, L. W., and Morcan, G., "Getting aggressive with passive devices," *IEEE Circuits and Devices Magazine*, vol. 16, no. 5, September 2000, pp. 16-25.

Venkataramanan, G., "Characterization of capacitors for power circuit decoupling applications," *Industry Applications Conference, 1998*, vol. 2, October 12-15, 1998, pp. 1142-1148.

Wadell, B. C., "Modeling circuit parasitics 1," *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, vol. 1, no. 1, March 1998, pp. 31-33.

________, "Modeling circuit parasitics 2," *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, vol. 1, no. 2, June 1998, pp. 6-8.

________,"Modeling circuit parasitics 3," *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, vol. 1, no. 3, September 1998, pp. 28-31.

________,"Modeling circuit parasitics 4," *IEEE Instrumentation & Measurement Magazine*, vol. 1, no. 4, December 1998, pp. 36-38.

Yu, Q., and Holmes, T. W., "A study on stray capacitance modeling of inductors by using the finite element method," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 43, no. 1, February 2001, pp. 88-93.

第16章　实用设计技术与其他

本章概要

❑ 这是本书的最后一章，（希望）也是有用的电路设计技术的大杂烩。

16.1　热电路

所有的电子工程师都熟悉欧姆定律，即$V=IR$：电流“流”经电阻，电流受电子“压力”（即电压）推动。电压和电流之间的比例常数就是电路的电阻R，电阻以Ω为单位。假设我们都认同欧姆定律，那么就可以使用与其他物理系统的类比方法，试着生成复杂物理进程的简单模型。

稍微思考一下可以发现，电阻内电流的流动可以与管道内水的流动进行比较，这样电流就与水流的速率类同，电压就与管道内各处压迫水流动的压力差类同。流体流动的阻力与管道的直径、长度、流体的粘性（viscosity）以及其他参数相关。

进行稍微的深入思考可以发现，热流可以使用简单的电路类比方法进行建模。热体可以被三种机制加热或冷却：传导（conduction）、对流（convection）和辐射（radiation）。热量被固体传输时，能量的传递方式是传导。比如，当热量沿着管道主体从温暖的室内传输到寒冷的室外时，热量（以W为单位）沿着水管传递。对流是由运动的液体或流动的空气形成的热量传递（比如，向一碗热汤吹风，使它凉下来）。辐射则是一种电磁效应，与温度是非线性关系[①]，因此不能用集总模型进行简单建模。

使用相对简单的静态、时变热传递模型，可以对温度效应进行建模。这些技术对于散热设计、印制板发热设计、以及对热传递进程的基本理解都很有帮助。

16.2　热传导的稳态模型

在许多感兴趣的应用场合，环境温度接近室温，没有空气流通，传导将是占主要作用的热传递效应。比如，在集成电路封装内部，不存在空气流通，电子结是热量产生的地方，热量也是通过电子结传递到外部环境（比如，传递到散热片或者PCB）。为了将此过程与简单电路模型关联起来，考虑一个简单的电阻电路，以及它的类比热电路（如图16-1所示）。

如果我们测试电子的情况，电流（I，以A为单位）流动，受电压差V_2-V_1推动。电流从较高的电压流向较低的电压，如式（16-1）所示

$$I=\frac{V_2-V_1}{R_{\text{elec}}} \tag{16-1}$$

电流和电压之间的比例常数为以Ω为单位的电阻（R_{elec}）。电阻的计算公式为

$$R_{\text{elec}}=\frac{l}{\sigma A} \tag{16-2}$$

① 热体辐射与温度的四次方（T^4）成正比，这里T的温度单位是K。在许多情况下，比如室温时，辐射相对传导和对流的热传递可以忽略不计。但是，对于强制空气对流（比如，散热器散热片上的快速空气流动），对流热传递可能是起主要作用的热传递效应。



图16-1　电阻内的电流与长膜状固体内的一维热量流动之间的类比

这里l为电阻的长度，A为电流路径的横截面积，σ为制造电阻材料的电导率，以每欧姆每米［$1/(\Omega \cdot \mathrm{m})$］为单位。如果电阻更短更粗，电流就更容易流动。

下面，我们来考虑发热问题。考虑一根长膜棒状材料，它由热的良导体构成，比如金属等。它在两个散热器之间进行良好的热接触，每端各与一个散热器良好接触。我们假设在棒状材料的两端存在温度差异。对于这种简单情况，可以近似为热量只向一个方向流动。热量（P，以W为单位）流动，受温度差T_2-T_1的推动。固定的热功率从较高温度向较低温度流动，如公式16-3所示

$$P = \frac{T_2 - T_1}{R_{\mathrm{TH}}} \tag{16-3}$$

热流和温度之间的比例常数即为热阻（thermal resistance）R_{TH}，它的单位是°C/W。这是个比例常数，它告诉我们，如果设计人员要形成1W热量的流动，必须使元件接受上升的度数。大多数金属材料，像铜和铝等，就具有非常高的热导率（thermal conductivity）（也就是说，它们能够很好地传递热量）。

与电阻类似，热阻的计算公式为

$$R_{\mathrm{TH}} = \frac{l}{kA} \tag{16-4}$$

这里l为热量流经的材料的长度，A为热量流经的材料的横截面积，k为制造热阻材料的热导率，其单位为W/(m · °C)。与电阻情况类似，如果热量传导路径更短，并且具有更大的截面积，则热阻就更小。

静止不动的空气是良好的绝热材料，它的热导率$k=0.03$W/(m · °C)。金属铜为热的良导体，其热导率$k=400$ W/(m · °C)。这些数据说明了聚苯乙烯泡沫塑料为什么是良好的绝热材料，因为它内部充满静止的空气，而铜和铝则不是良好的绝热材料。这就是金属材料为什么通常不用作绝热材料的原因之一。

16.3　热量存储

热能系统中的能量存储效应也可以通过类比的方法进行说明。正如电荷聚集在电容器极板上时，能量被存储在电容器内一样，能量也被存储在物质的机械结构中，以及原子的振动中。物体处于更高的温度比同样的物体在更低温度时储存更多的能量。

在电能情况下，当线性电容器被从初始电压（V_i）充电到最终电压（V_f）时，电荷（q，以C为单位）被储存在电容器的极板之间，即

$$q = C(V_f - V_i) \tag{16-5}$$

这里C为电容的大小，单位是C/V。充电期间，流进电容器的电流为

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{16-6}$$

充电间隔内流动的电荷被储存在电容器的极板之间。

在热能情况下，物质的热容（thermal capacitance）决定其存储热能的好坏程度。热容的单位为J/°C。热容的计算公式为

$$C_{\mathrm{TH}} = Mc_{\mathrm{v}} = V\rho c_{\mathrm{v}} \tag{16-7}$$

这里ρ为物质的密度（kg/m^3），M为物质被加热或者冷却的总质量（kg），V为物质被加热或者冷却的体积（m^3），c_{v}为物质的比热（specific heat）（J/(kg · °C)），这是物质的特征之一。

当物质被从起始温度（T_{i}）加热到最终温度（T_{f}）后，物质受热增加的能量（E，以J，或W · s为单位）为

$$E = C_{\mathrm{TH}}(T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{i}}) \tag{16-8}$$

这里C_{TH}为热容，其单位为J/°C。这是与电容的电荷存储进行类比的结果。加热期间，流进物质的功率（W）为

$$P(t) = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = C_{\mathrm{TH}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \tag{16-9}$$

这里，dT为时间间隔dt内的温度变化。加热间隔内的能量流动被存储在受热物体的质量中。

为了使用简单的静态模型，考虑图16-2的设计。图中的方块表示一个块状物体，被热源（可能是个吹管（blow torch））加热，热源向受热物体传送P_0W的功率。

块状物体黏着的大型“墙壁”为散热器，所处环境温度为T_{A}。假设散热器非常大，并且被充分冷却，以确保测试期间温度不发生变化。那么，块状物体被热源加热之后的温度轮廓图像又是什么样呢？

使用电路类比技术，加热器为功率源$P(t)$。施加热量（与电路电流类同）可以建模为幅度为P_0（W）的阶跃函数。电路的“地平面”为环境温度T_{A}。热量经热阻$\mathrm{R_{TH}}$从块状物体传导至散热器。同时，能量被存储在块状物体的热容$\mathrm{C_{TH}}$中。

加热源建模为功率“阶跃函数”（如图16-3所示）。当加热源首次被打开时（在时间$t=0$时刻），块状物体处于环境温度点T_{A}，或者说与散热器的温度相同。块状物体的温度$T_{\mathrm{B}}(t)$的增长公式为

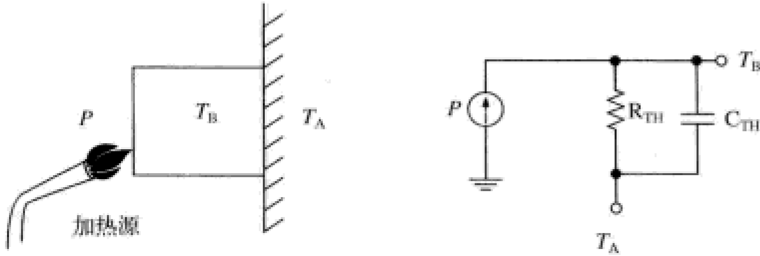
$$T_{\mathrm{B}}(t) = P_0 R_{\mathrm{TH}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_{\mathrm{TH}}}}\right) \tag{16-10}$$

块状物体的温度在热时间常数RC（τ_{TH}）内达到最终温度，正好与电流源驱动RC电路的阶跃响应相同。电路将继续“充电”（也就是说，块状物体的温度继续上升）直至输入功率与经热阻$\mathrm{R_{TH}}$传导至散热器的热量完全相等为止。时间经历了几个时间常数之后，块状物体达到最终温度

$$T_{\mathrm{F}} = P_0 R_{\mathrm{TH}} \tag{16-11}$$

现在，我们可以确定，热量传递的某些细节被使用这个简单的类比电路的过程所掩盖。比如，在块状物体和周围空气之间存在一些热量传递。不过，如果散热器经过良好设计，那么流向散热器的热传递比流向空气的热传递更为高效（毕竟，这正是设计散热器的目的所在）。其次，集总电路模型只对“低频”应用有效，或者只对变化时间尺度远长于热时间常数的温

度应用有效。这就意味着，物体各处的温度变化完全相同。此外，物质的比热与热导率是随温度变化的，不过，在有限的温度范围内，它们可以被近似为常数。



（a）物理设计，标明一根吹管向受热块状物体输送功率$P(t)$。块状物体中心区的温度为T_B，块状物体安装在工作温度为T_A的散热器上

（b）电路模型，标明热阻R_{TH}和热容C_{TH}

图16-2　使用简单静态模型求解块状物体温度-时间曲线的粗略估计

对于工程计算来说，如果设计人员检查自己的近似计算，将会发现这些计算给出了极为有用的结果。设计人员总是可以通过有限元分析来得到更为准确的结果。

总而言之，使用相对简单的模型，可以利用简单的电路类比技术对静态热传递和动态热传递进行建模。前面的讨论回答了下列重要问题：

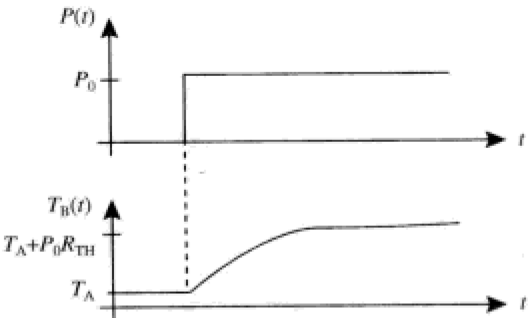


图16-3　使用简单静态模型。输入为功率"阶跃函数"$P(t)$，块状物体的温度为$T_B(t)$

- 当使用加热源对物质进行加热时，物质的总体温度上升了多少？
- 制造商数据手册中的那些指标：结－管脚的热阻和结－环境的热阻，究竟意味着什么？
- 当物质受热时，温度变化的时间尺度是多少，温度以多快的速度达到最终值？

表16-1是电－热类比技术的总结。

表16-1　电-热类比技术总结表

	电子系统	热能系统
存储数量	电荷q	能量E
"流"数量	电流I	功率P
推动流体流动的压力	电压V	温度T
流体流动的阻抗	$R=\frac{l}{\sigma A}$	$R_{TH}=\frac{l}{kA}$
电容	$C=\varepsilon\frac{A}{d}$	$C_{TH}=\rho c_v V$
时间常数	$\tau_{elec}=RC$	$\tau_{TH}=R_{TH}C_{TH}$

16.4　使用热电路类比技术确定静态半导体的结温

安装在散热器上的半导体的热传递模型如图16-4所示。晶体管的耗散功率，使用P值电流

源表示。环境温度为T_A，散热器表面的温度和半导体外壳的温度分别为T_S和T_C。晶体管的结温为T_j，设计散热器系统的目标是为了保证结温不超过某个安全水平。

晶体管至散热器表面的热传导热阻为$R_{TH,JC}$、$R_{TH,CS}$。$R_{TH,JC}$为晶体管至外壳的热阻（热功率在这里被耗散）。$R_{TH,CS}$为晶体管外壳至散热器的热阻。热阻的取值与接触面积、晶体管机械固定在散热器上的好坏程度以及设计人员使用的热传导表面材料的类型[①]等因素相关。

散热器到环境温度的热阻（$R_{TH,SA}$）是散热器的面积以及设计人员是否使用流动的空气对散热器进行冷却等变量的函数。散热器制造商将会明确标出给定散热器面积和空气流量时的$R_{TH,SA}$的数值。

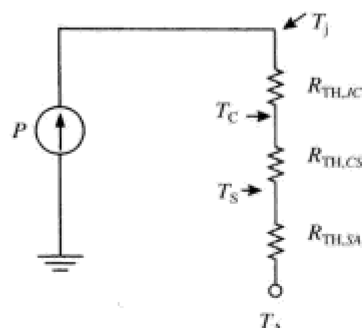


图16-4 半导体安装在散热器上的热传递模型

16.5 机械电路类比技术

在许多应用中，电子电路的自然频率和模式形状的解决方法可以通过考虑类似的机械系统的行为特性来解答。由质量块（m）、减振器（c）和弹簧振子（k）组成的机械系统的工作特性，使用简单的物理推理就很容易得到直观的答案。然后，它的答案可以映射到由电感（L）、电阻（R）和电容（C）组成的类似系统。

在机械振动系统中，能量在质量块的动能和弹簧振子储存的势能之间来回传递。等效地，在电磁系统中，能量在电感内储存的磁能和电容内储存的电能之间来回振荡。一个简单的例子可以解释这种对偶性。

机械系统：

本例中的机械系统由光滑表面上被弹簧振子连接在一起的两个质量块组成，如图16-5所示。弹簧振子释放的推力为k_x，这里k为机械弹簧常数，单位为N · m。该系统的两个状态变量为两个质量块的水平位置：x_1和x_2，定义为相对地球表面上某一固定位置的相对位移。

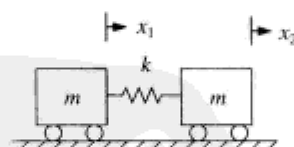


图16-5 双自由度机械电路

考虑左边的第一个质量块，牛顿定律告诉我们[②]

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1)$$

对右边的质量块实施相同的推理，得到两个质量块的一对运动方程

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

假设在位置上做正弦振动，$x = X_0 e^{j\omega t}$

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0$$

或者写成

① 比如，设计人员是使用热润滑脂或者云母片等。

② 记住这个符号：$\ddot{x}$为变量x相对时间t的二阶导数。$\dot{x}$则为一阶导数。

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m+k & -k \\ -k & -\omega^2 m+k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=0$$

求解上面矩阵的行列式可以得到系统的自然频率。对该组两个相同方程的解答得到两个自然频率（w）和质量块位置的模式形状（矢量x_1、x_2）。正确的自然频率为

自然频率	模式形状
$\omega_a=0$	$\{x\}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$
$\omega_b=\sqrt{\frac{2k}{m}}$	$\{x\}=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$

现在，上面的自然频率和模式形状解集通过观察很容易理解。比如，第一个模式形状与情况1对应：两个质量块一致向右运动（或者一致向左，依赖于起始条件，如图16-6所示）。这种情况下，弹簧振子没有拉伸或者收缩。弹簧振子可以被一个无质量的刚性杆替代，不干扰两个质量块的运动，它们均在做简单的平移运动。因此，其自然频率＝0。

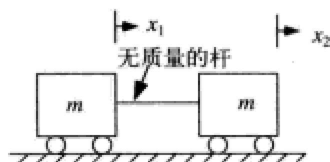


图16-6　情况1（较低频率模式）

对于第二种模式，两个质量块均在做振动，不过它们的相位相差180°，如图16-7所示。因此，弹簧振子的中心静止不动（也就是说，中心位置是个节点）。按照对称性，我们可以在此位置设置一堵砖墙，将单个弹簧振子拆分为两个弹簧常数为2k的弹簧振子，独立地求解每个“半电路”的振动。

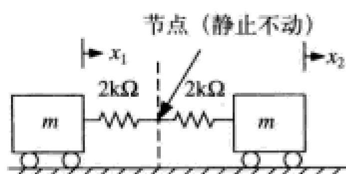


图16-7　情况2（较高频率模式）

电子系统：

该机械系统的电子孪生系统由L-C-L电路组成。这是无损传输系统的等效电路。该系统的两个状态变量为：环路电流i_1和i_2，定义如图16-8所示。

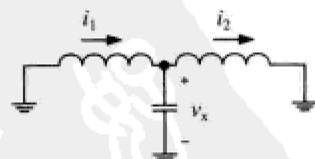


图16-8　双自由度电子电路

考虑左边的第一个电感

$$L\dot{i}_1=-v_x$$

对该公式求导，得

$$L\ddot{i}_1=-\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{-(i_1-i_2)}{C}$$

对右侧的电感实施相同的推理，得到一对方程

$$L\ddot{i}_1+\frac{1}{C}(i_1-i_2)=0$$

$$L\ddot{i}_2+\frac{1}{C}(i_2-i_1)=0$$

假设电流做正弦振动，$i=I_0e^{jwt}$

$$-\omega^2\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix}=0$$

或者写作

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 L+\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & -\omega^2 L+\frac{1}{C} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix}=0$$

对两个相同方程组成的方程组进行解答，得到关于质量块位置的两个自然频率（ω）和模式形状（i_1、i_2矢量）。正确的自然频率为

自然频率	模式形状
$\omega_a=0$	$\{i\}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$
$\omega_b=\sqrt{\frac{2}{LC}}$	$\{i\}=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$

现在，上面的自然频率和模式形状解集通过观察很容易理解。比如，第一个模式形状与情况1对应：两个环路电流顺时针流动（或者逆时针流动，依赖于起始条件，如图16-9所示）。这种情况下，电容器内没有电流流动，不发生振动。事实上，对于这种模式的工作特性，可以把电容从电路中拿掉，因为没有电流流进它。因此，自然频率＝0。

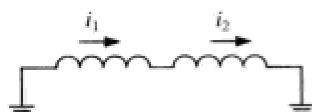


图16-9 情况1（较低频率模式）

对于第二种模式，电流i_1、i_2发生振动，不过相位相差180°，如图16-10所示。通过将电容器拆分为两个电容，我们建模为两个“半电路”。

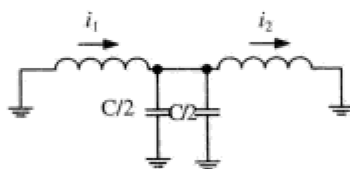


图16-10 情况2(较高频率模式)

通过对称性知道，没有电流流过边界。因此，两个“半电路”独立振动。

这些相同技术还可以用于分析具有不同边界条件的系统，以及更多自由度的系统。

例题16.1：使用机械电路类比技术

作为一个例子，考虑图16-11a所示的电路。第一种振动模式的期望自然频率为零，与电感电流i_1、i_2等值同向的情况对应。对于第一种模式，电容器的电流永远为0A。也就是说，电容器的电压保持为常数。因此，第一种模式不存在正弦振动现象。

在第二种振动模式中，电流i_1、i_2等值反向，我们参看图16-11b图16-11c所示的电路。第二种振动模式的期望振动频率为

$$\omega_{o,mode2}=\sqrt{\frac{2}{LC}}=1.41\,\text{rad/s} \tag{16-12}$$

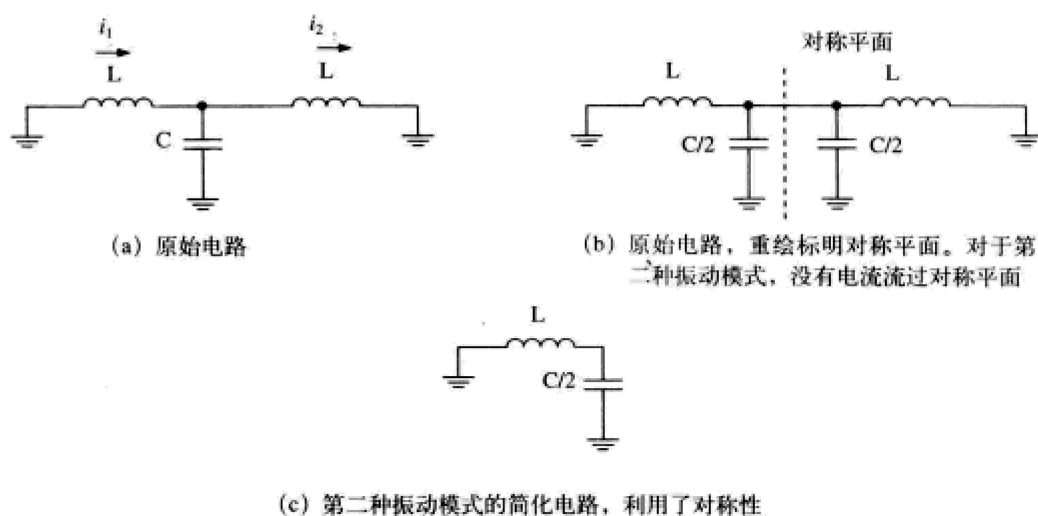
等效于0.225Hz的固有频率。PSPICE仿真输出（如图16-12[①]所示）表明，电感电流的起始条件设置为$i_1=1\text{A}$，$i_2=-1\text{A}$。与预计一致，电路振荡在0.225Hz。

对于第二种工作模式，存在两个独立电路，每个电路由电感L和电容C/2组成。因此，每个电路的特征阻抗为

$$Z_o=\sqrt{\frac{L}{C/2}}=\sqrt{\frac{2L}{C}}=1.41\Omega \tag{16-13}$$

因此，我们预计电容器电压的振荡幅度的峰峰值为2.828V（即$2\sqrt{2}$ V），如图16-13所示。

① 增加了小电阻，这是因为，如果电压环路存在电感元件，那么SPICE存在收敛问题。

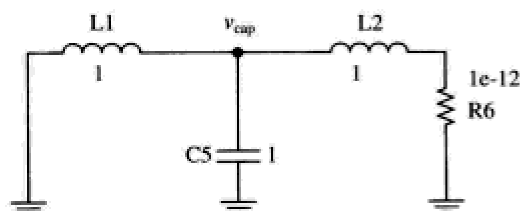


（a）原始电路

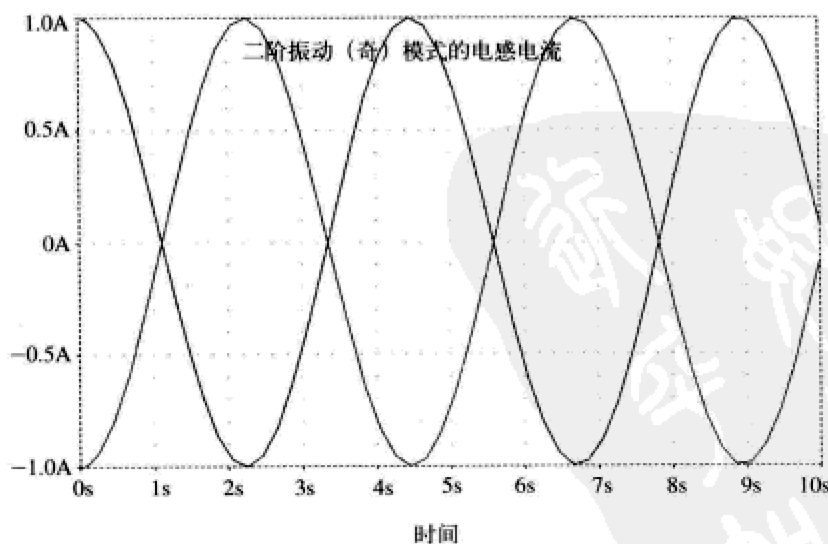
（b）原始电路，重绘标明对称平面。对于第二种振动模式，没有电流流过对称平面

（c）第二种振动模式的简化电路，利用了对称性

图16-11　例题16.1的电路



（a）PSPICE仿真电路



（b）第二种模式的PSPICE仿真结果，表明电感电流等值反向

图16-12　第二种振动模式

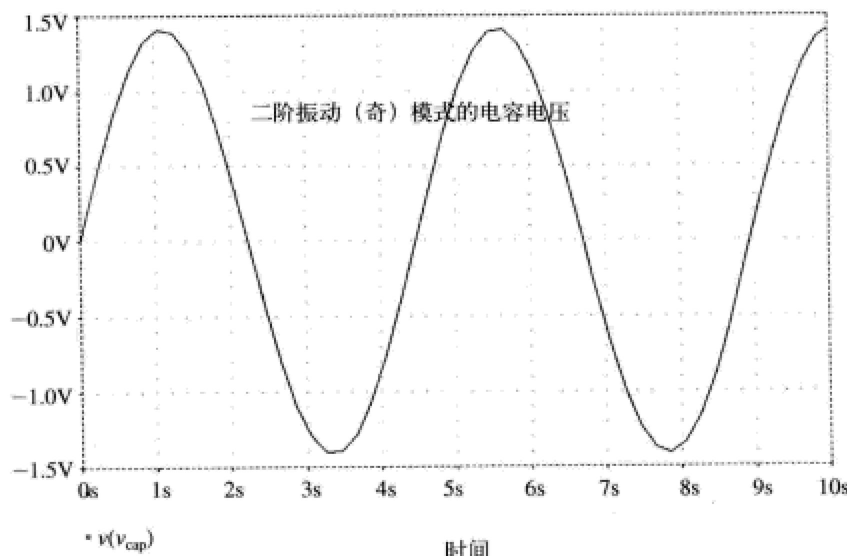


图16-13　第二种振动模式的电容器电压曲线

16.6　跨导线性原理

跨导线性[①]电路（translinear circuit）利用了晶体管基极电压和集电极电流之间已知的指数关系，这种指数关系在集电极电流的多阶幅度上都是成立的。考虑图16-14所示的跨导线性电路，存在一个箭头指示的V_{BE}电压环路。如果我们对V_{BE}电压环路施用KVL方程，可得

$$-V_{BE1}+V_{BE2}-V_{BE3}+V_{BE4}=0 \tag{16-14}$$

我们来回忆一下晶体管工作在正向放大区域时，电压V_{BE}的对数表达式

$$V_{BE}\approx\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_C}{I_S}\right) \tag{16-15}$$

这里I_S是晶体管的反向饱和电流。在上述跨导线性电路中，如果所有晶体管都是理想器件，则可以写出如下方程

$$-\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_{C1}}{I_S}\right)+\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_{C2}}{I_S}\right)-\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_{C3}}{I_S}\right)+\frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_{C4}}{I_S}\right)=0 \tag{16-16}$$

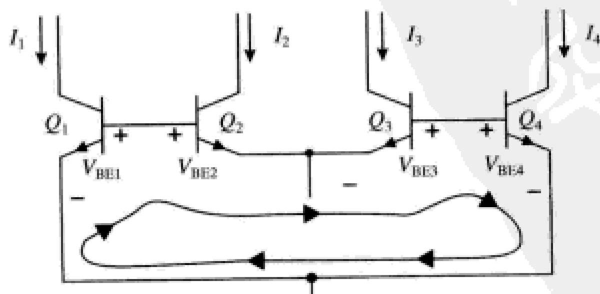


图16-14　跨导线性电路，标明V_{BE}电压环路

该方程的解为

① 专业术语“跨导线性（translinear）”是由Barrie Gilbert创造的。

$$I_{C2}I_{C4}=I_{C1}I_{C3} \tag{16-17}$$

对于这种类型的电路，具有V_{BE}电压环路以及理想的晶体管，可以总结出如下跨导线性原理（translinear principle）。

顺时针电流的乘积等于逆时针电流的乘积，或者表述为

$$\prod \frac{I_C}{I_S}\bigg|_{cw}=\prod \frac{I_C}{I_S}\bigg|_{ccw} \tag{16-18}$$

我们来对其他的跨导线性电路（如图16-15所示）施用跨导线性原理。该电路有一个V_{BE}电压环路，包含晶体管Q_1、Q_2、Q_3和Q_4。沿着环路观察一遍，发现I_{C1}和I_{C2}为逆时针电流，I_{C3}、I_{C4}为顺时针电流。因此，对于该电路来说

$$I_{C1}I_{C2}=I_{C3}I_{C4} \tag{16-19}$$

这就意味着，我们可以将输出电流I_o表述为

$$I_o=\sqrt{I_1I_2} \tag{16-20}$$

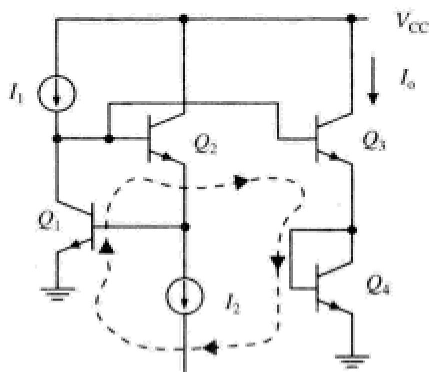


图16-15 另一个跨导线性电路，执行平方根函数功能。虚线表示V_{BE}电压环路，施用跨导线性原理

16.7 无限长电阻梯形网络的输入电阻

我们来求解无限长梯形网络的输入阻抗，梯形网络串联元件的阻抗为Z，并联元件的导纳（admittance）为Y（如图16-16所示）。因为这个梯形网络（ladder）是无限长，我们可以说，它在位置1的阻抗就是位置2的输入阻抗。在数学上我们将其表示为

$$Z_{in}=Z+\frac{1}{Y}\|Z_{in}=Z+\frac{YZ_{in}}{Y+Z_{in}} \tag{16-21}$$

我们可以重新安排这个公式，得到关于输入阻抗Z_{in}的二次方程

$$Z_{in}^2-ZZ_{in}-ZY=0 \tag{16-22}$$

该方程的解为[①]

$$Z_{in}=\frac{Z}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{ZY}}\right) \tag{16-23}$$

① 我们已经丢弃了该方程的一个解，被丢弃的解没有物理意义。

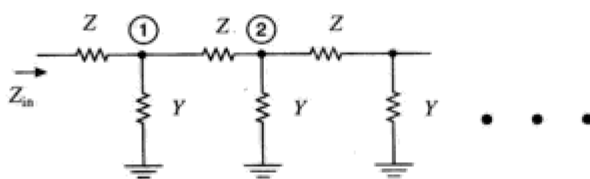


图16-16 无限长电阻梯形网络

16.8 传输线基础（Transmission Lines 101）[①]

从无限长电阻梯形网络得到的有趣结果可用于求解理想传输线的输入阻抗（如图16-17所示）。我们来认识一下如何使用上面的公式

$$Z = \mathrm{j}\omega L$$
$$Y = \mathrm{j}\omega C \tag{16-24}$$

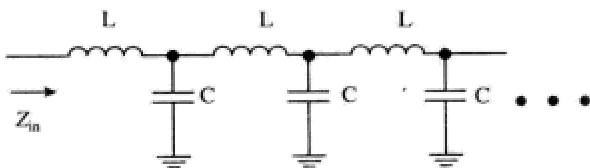


图16-17 理想传输线

这意味着，理想传输线的输入阻抗Z_{in}的解为

$$Z_{in} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{2}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{(\mathrm{j}\omega L)(\mathrm{j}\omega C)}}\right) \tag{16-25}$$

对于理想传输线来说，存在许多L、C组成的块状元件，因此每个元件是非常小的。我们甚至可以表述为L→0、C→0。这意味着我们可以在这种极限条件下求解传输线的输入阻抗，即

$$Z_{in} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{2}\left(\sqrt{\frac{4}{(\mathrm{j}\omega L)(\mathrm{j}\omega C)}}\right) = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0 \tag{16-26}$$

特征阻抗Z_0告诉我们传输线上的电压对电流的比率为多少。

求解无限长传输线的输入阻抗

如果传输线的长度远小于电磁波的波长，则可以使用集总电路对传输线进行建模（也就是说，使用电感和电容元件）。我们来考虑特征阻抗为Z_0、长度为l、在$x=0$处被阻抗Z_L端接的一条传输线，如图16-18所示。基本传输线方程为

$$V(x,\omega) = V_+ \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\omega x}{c}} + V_- \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}\omega x}{c}}$$
$$I(x,\omega) = \frac{V_+}{Z_0}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{j}\omega x}{c}} - \frac{V_-}{Z_0}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}\omega x}{c}} \tag{16-27}$$

这里V_+为传输线上的正向行波，V_-为传输线上的反射波，c为电磁波沿传输线传播的速度。

① 在英语中，“101”表示最基础、最初的课程或步骤。其来源于美国学校里的课程编号，最基础的课程编号通常为“101”。——编者注

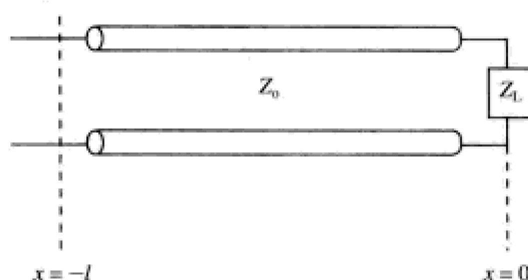


图16-18 不匹配传输线。该传输线的特征阻抗为Z_0，被阻抗Z_L端接

反射系数为反射波的幅度与正向波的幅度的比值，即

$$\Gamma=\frac{V_-}{V_+} \tag{16-28}$$

将式 (16-28) 代入基本传输线方程，得

$$\begin{aligned} V(x,\omega)&=V_+\left(e^{\frac{-j\omega x}{c}}+\Gamma e^{\frac{j\omega x}{c}}\right)\\ I(x,\omega)&=\frac{V_+}{Z_0}\left(e^{\frac{-j\omega x}{c}}-\Gamma e^{\frac{j\omega x}{c}}\right)\end{aligned} \tag{16-29}$$

在$x=0$处的边界条件为$V/I=Z_L$，即

$$Z_0\left(\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}\right)=Z_L \tag{16-30}$$

这使我们可以解答反射系数，得

$$\Gamma=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0} \tag{16-31}$$

该结果有重要的意义，因为我们知道匹配传输线（$Z_0=Z_L$）在端点不存在反射问题。如果是不匹配的传输线（$Z_0\neq Z_L$），则在端点存在反射现象。现在，我们可以使用上面的反射系数计算结果来帮助解答传输线上每一点的阻抗

$$Z(x,\omega)=\frac{V(x,\omega)}{I(x,\omega)}=\frac{V_+\left(e^{\frac{-j\omega x}{c}}+\Gamma e^{\frac{j\omega x}{c}}\right)}{\frac{V_+}{Z_0}\left(e^{\frac{-j\omega x}{c}}-\Gamma e^{\frac{j\omega x}{c}}\right)}=Z_0\frac{\left(e^{\frac{-j\omega x}{c}}+\left(\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}\right)e^{\frac{j\omega x}{c}}\right)}{\left(e^{\frac{-j\omega x}{c}}-\left(\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}\right)e^{\frac{j\omega x}{c}}\right)} \tag{16-32}$$

乘以（Z_L+Z_0），得到

$$Z(x,\omega)=Z_0\frac{\left((Z_L+Z_0)e^{\frac{-j\omega x}{c}}+(Z_L-Z_0)e^{\frac{j\omega x}{c}}\right)}{\left((Z_L+Z_0)e^{\frac{-j\omega x}{c}}-(Z_L-Z_0)e^{\frac{j\omega x}{c}}\right)} \tag{16-33}$$

接下来，我们利用下列公式

$$\begin{aligned}\cos(a)&=\frac{1}{2}(e^{ja}+e^{-ja})\\ \sin(a)&=\frac{1}{2j}(e^{ja}-e^{-ja})\end{aligned} \tag{16-34}$$

将式（16-33）简化为

$$Z(x,\omega)=Z_0\frac{Z_L\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)-\mathrm{j}Z_0\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)}{Z_0\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)-\mathrm{j}Z_L\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)} \tag{16-35}$$

我们通常对从传输线输入端（$x=-l$处）看进去的输入阻抗感兴趣。该阻抗的解答为①

$$Z(-l,\omega)=Z_0\frac{Z_L\cos\left(\frac{\omega l}{c}\right)+\mathrm{j}Z_0\sin\left(\frac{\omega l}{c}\right)}{Z_0\cos\left(\frac{\omega l}{c}\right)+\mathrm{j}Z_L\sin\left(\frac{\omega l}{c}\right)}=Z_0\frac{\frac{Z_L}{Z_0}+\mathrm{j}\tan\left(\frac{\omega l}{c}\right)}{1+\mathrm{j}\frac{Z_L}{Z_0}\tan\left(\frac{\omega l}{c}\right)} \tag{16-36}$$

接下来，我们假设工作频率足够低②，以至于$\omega l\ll c$。然后，我们可以使用Taylor级数展开式将正切三角函数近似为分子和分母多项式。

$$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots\approx x\text{，当}x<<1\text{时} \tag{16-37}$$

还要记住，如果x足够小，则下式成立

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x\text{，当}x<<1\text{时} \tag{16-38}$$

因此，我们可以进一步估计从传输线输入端看进去阻抗，即

$$Z(-l,\omega)\approx Z_0\frac{\frac{Z_L}{Z_0}+\mathrm{j}\left(\frac{\omega l}{c}\right)}{1+\mathrm{j}\frac{Z_L}{Z_0}\left(\frac{\omega l}{c}\right)}\approx\frac{Z_L+\mathrm{j}Z_0\left(\frac{\omega l}{c}\right)}{1+\mathrm{j}\frac{Z_L}{Z_0}\left(\frac{\omega l}{c}\right)} \tag{16-39}$$

我们来观察一下，如果我们假设传输线被一个低阻抗端接，即$Z_L\ll Z_0$，那么我们得到什么呢。在这种极限情况下

$$Z(-l,\omega)\approx Z_L+\mathrm{j}\omega\left(\frac{Z_0 l}{c}\right)\approx Z_L+\mathrm{j}\omega L_{eq} \tag{16-40}$$

这个等效电路如图16-19a所示，我们在电路中看到的集总电感大致为$L_{eq}\approx Z_0 l/c$。

现在，在$Z_L\gg Z_0$的情况下，短传输线的大致电感为

$$Z(-l,\omega)\approx\frac{Z_L+\mathrm{j}Z_0\left(\frac{\omega l}{c}\right)}{\mathrm{j}\frac{Z_L}{Z_0}\left(\frac{\omega l}{c}\right)}\approx\frac{1}{Z_L}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega\left(\frac{1}{Z_0 c}\right)}\approx\frac{1}{Z_L}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_{eq}} \tag{16-41}$$

这种情况的等效电路如图16-19b所示，我们在电路中看到一个等效电容$C_{eq}\approx l/(Z_0 c)$与负载阻抗并联在一起。



图16-19 短的、不匹配传输线的等效电路

① 记住$\cos(-l)=\cos(l)$，$\sin(-l)=-\sin(l)$，这是因为cos (x)为偶函数，而sin (x)为奇函数。还要记住sin (x)/cos (x) = tan (x)。

② 或者传输线足够短。

例题16.2：传输线计算

下列应用场景只在低频段有效，求解它们的近似等效电路，如图16-20所示。假设电磁波传播速度$c=3\times10^8$m/s。

(a) 传输线的长度为1m，特征阻抗$Z=75\Omega$，端接电阻$Z_L=5\Omega$。

(b) 传输线的长度为1m，特征阻抗$Z=75\Omega$，端接电阻$Z_L=1000\Omega$。

解答

(a) 对于$Z_L=5\Omega$的情况，串联电感的大概数值为

$$L_{eq}\approx\frac{Z_0 l}{c}=\frac{(75)(1)}{3\times10^8}\approx 250\text{ nH} \tag{16-42}$$

(b) 在第二个应用场景中，并联电容的大概数值为

$$C_{eq}\approx\frac{l}{Z_0 c}=\frac{(1)}{(75)(3\times10^8)}\approx 44\text{ pF} \tag{16-43}$$

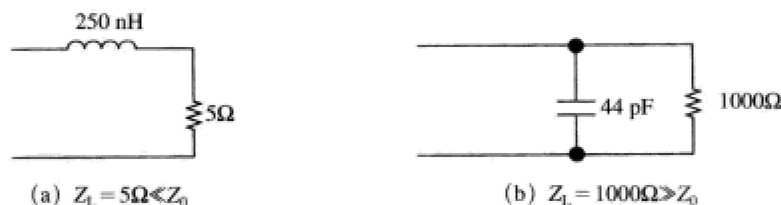


图16-20 短的、不匹配传输线的等效电路

16.9 节点方程与克莱姆法则

克莱姆法则（Cramer's rule）是一个非常有用的代数“技巧”，可以帮助设计人员解答定长系数方程表示的任何线性系统，因此常用于求解晶体管放大器的传递函数。从线性代数的观点来看，线性系统的方程为

$$[A]\{x\}=\{b\} \tag{16-44}$$

均可使用克莱姆法则来解答，这里$[A]$是一个$m\times m$的矩阵，$\{x\}$是由m个未知变量构成的一个列向量，$\{b\}$是由m个输入数值构成的一个列向量。将该矩阵方程表示为展开形式，可以得到4个未知数和4个方程构成的一个系统

$$[A]\{x\}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{Bmatrix} \tag{16-45}$$

设计人员如果想求解未知数x_3的数值，可以使用克莱姆法则按照下述过程进行

$$x_3 = \frac{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}} \tag{16-46}$$

该公式看起来像一团乱麻，但是使用简单的线性代数知识就可以容易地得到答案。公式中的符号“det”表示一个矩阵的“行列式”。对于一个2×2的矩阵，其行列式如式（16-47）所示

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{16-47}$$

对于一个3×3的矩阵，其行列式则为

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \tag{16-48}$$

对于一个$N \times N$的矩阵，其行列式会更加复杂，但是还是可以计算的。关于该技巧的更多内容请参考线性代数教材。

例题16.3：使用克莱姆法则求解联立线性方程组

我们使用一个简单的线性代数例题来演示克莱姆法则的使用方法。计算由未知数x、y、z组成的联立线性方程组的解。

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x - y + 3z &= -3 \\ 2x + 2y + 3z &= 10 \end{aligned} \tag{16-49}$$

将方程组写成矩阵的形式，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -3 \\ 10 \end{Bmatrix} \tag{16-50}$$

我们按照如下过程计算x、y和z的值

$$x=\frac{\det\begin{bmatrix}5 & 1 & 1\\ -3 & -1 & 3\\ 10 & 2 & 3\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}}=\frac{(5)(-3-6)-1(-9-30)+1(-6+10)}{1(-3-6)-1(3-6)+1(2+2)}=\frac{-2}{-2}=1$$

$$y=\frac{\det\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\ 1 & -3 & 3\\ 2 & 10 & 3\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}}=\frac{(1)(-9-30)-(5)(3-6)+(1)(10+6)}{-2}=\frac{-8}{-2}=4 \tag{16-51}$$

$$z=\frac{\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & -1 & -3\\ 2 & 2 & 10\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}}=\frac{(1)(-10+6)-(1)(10+6)+(5)(2+2)}{-2}=\frac{0}{-2}=0$$

我们将上面的答案直接代入方程组，发现$x=1$、$y=4$、$z=0$确实是方程组的解。

另一个电路领域的简单例子也演示了克莱姆法则的使用方法。如图16-21所示是共射极放大器的小信号模型。我们生成节点方程，使用克莱姆法则来求解电路的传递函数。

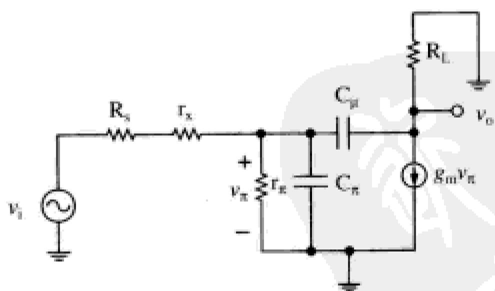


图16-21　共射极放大器的小信号模型

我们将电阻R_S和r_x集总在一起，形成单个等效源电阻R_s'，并且使$G_s'=1/R_s'$。在节点v_π的位置，我们将连接点的电流累加在一起，得

$$(v_i-v_\pi)G_s'-v_\pi C_\pi s-v_\pi r_\pi+(v_o-v_\pi)C_\mu s=0 \tag{16-52}$$

在节点v_0的位置，其节点方程为

$$(v_\pi-v_o)C_\mu s-v_o G_L-g_m v_\pi=0 \tag{16-53}$$

按照变量对各项进行合并，重写式（16-53）和式（16-54），得

$$-v_\pi\left[G_s^{'}+\left(C_\pi+C_\mu\right)s+r_\pi\right]+v_o C_\mu s=-v_i G_s^{'}$$
$$v_\pi\left[G_\mu s^{'}-g_m\right]-v_o\left[G_L+C_\mu s\right]=0 \tag{16-54}$$

这个联立方程组可以写成矩阵的形式，即

$$\begin{bmatrix} -\left[G_s^{'}+(C_\pi+C_\mu)s+r_\pi\right] & C_\mu s \\ C_\mu s-g_m & -[G_L+C_\mu s] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_\pi \\ v_o \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -v_i G_s^{'} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{16-55}$$

我们使用克莱姆法则解得放大器的输出电压为

$$v_o=\frac{\det\left(\begin{bmatrix} -\left[G_s^{'}+(C_\pi+C_\mu)s+r_\pi\right] & -v_i G_s^{'} \\ C_\mu s-g_m & 0 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} -\left[G_s^{'}+(C_\pi+C_\mu)s+r_\pi\right] & C_\mu s \\ C_\mu s-g_m & -\left[G_L+C_\mu s\right] \end{bmatrix}\right)} \tag{16-56}$$

该结果已经总结在前面的章节中，在那里计算了该放大器的传递函数。

16.10 求解振荡模式

考虑图16-22的电路。为了求解方便，这里使用了电导，而不是电阻，这里$g=1/R$。

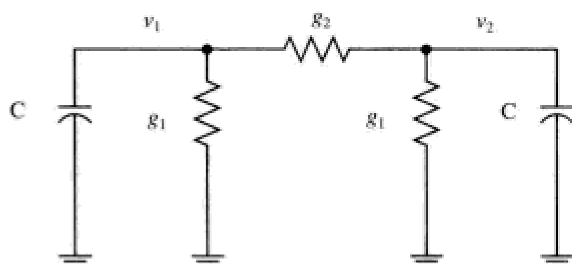


图16-22 对称RC电路

通过考虑电压v_1和v_2为“偶对称”和“奇对称”的起始条件，通过检查，我们可以得到该系统的自然频率。对于偶对称起始条件$v_1=v_2$，导纳g_2不存在电流，因此我们得到了两个无关的半电路，每个半电路的自然频率为

$$\omega_{o,\text{mode1}}=\frac{g_1}{C} \tag{16-57}$$

对于奇对称起始条件$v_1=-v_2$，导纳g_2的中心点为地电位，因此，我们可以将该点接地。那么得到的自然频率为

$$\omega_{o,\text{mode2}}=\frac{g_1+2g_2}{C} \tag{16-58}$$

差分方程系统得标准状态矩阵形式[①]为

$$\{\dot{x}\}=[A]\{x\} \tag{16-59}$$

这里$\{x\}$为状态矢量，$n\times n$的系统矩阵 $[A]$ 的特征值（eigenvalue）为特征方程的根（因此，也就是系统响应的极点）。模式形状就是矩阵 $[A]$ 的特征矢量（eigenvector）。

在s平面内，RC电路的矩阵方程为

① 记住，符号$\{\dot{x}\}$为矩阵$\{x\}$的时间导数。

$$[sC+G]\{v\}=\{i\} \tag{16-60}$$

这里$\{i\}$为电流激励矢量。通过求解本源方程可以得到自然频率（极点）

$$[sC+G]\{v\}=\{0\} \tag{16-61}$$

式（16-61）可写为

$$[sC]\{v\}=-[G]\{v\} \tag{16-62}$$

我们知道，式（16-62）为相同系统的状态空间表示形式。因此，通过估计导纳矩阵的行列式可以得到自然频率，或者

$$\det[sC+G]=0 \tag{16-63}$$

等效为

$$\det[sI-A]=0 \tag{16-64}$$

这里I为单位矩阵，系统矩阵$A=G/C$。

例题16.4：使用MATLAB求解振荡模式

接下来，我们将使用图16-22电路建立一个矩阵，并且使用MATLAB对它们进行求解。使用KCL定律，我们可以推导该电路的状态方程。比如，在节点v_1的位置，KCL定律给出

$$-C\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}-g_1v_1+(v_2-v_1)g_2=0 \tag{16-65}$$

相似地，在节点v_2位置，得

$$-C\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}-g_1v_2+(v_1-v_2)g_2=0 \tag{16-66}$$

对于该系统而言，合适的状态变量为v_1和v_2，构成的状态矢量为

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}v_1\\v_2\end{Bmatrix} \tag{16-67}$$

用状态空间形式表示，上述电路网络的状态方程为

$$\begin{Bmatrix}\dot{v}_1\\\dot{v}_2\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}\dfrac{g_1+g_2}{C} & \dfrac{-g_2}{C}\\\dfrac{-g_2}{C} & \dfrac{g_1+g_2}{C}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\v_2\end{Bmatrix} \tag{16-68}$$

下面是求解该系统的自然频率的MATLAB脚本，假设$g_1=1\Omega^{-1}$、$g_2=10\Omega^{-1}$、$C=1\text{F}$。

```
function RC

g1=1; g2=10;
% Conductance
C=1;

% Capacitors
% Form A matrix
A=-[(g1+g2)/C -g2/C;
  -g2/C (g1+g2)/C];

% Find natural frequencies and mode shapes
[Modeshapes, NatFreqs] = eig(A);

% Normalize modeshapes
N=size(Modeshapes,1);
for i=1:N
   Modeshapes(:,i)=Modeshapes(:,i)/max(abs(Modeshapes(:,i))) ;
end
```

```
% Display modeshapes
Natural_Frequencies=NatFreqs
Mode_Shapes=Modeshapes
```

接下来是运行这个MATLAB脚本的计算结果，这里我们得到了自然频率和模式形状。自然频率为自然频率矩阵对角线上的元素。模式形状为特征矢量矩阵的各列。比如，对于$\omega_0=1$rad/s，模式形状为[1，1]，与起始条件$v_1=v_2$的情况一致。对于$\omega_0=-20$rad/s，模式形状为[1，-1]，与起始条件$v_1=-v_2$的情况一致。

```
» RC

Natural_Frequencies =
   -21     0
     0    -1

Mode_Shapes =
     1     1
    -1     1
```

可以看到，MATLAB脚本计算得到的自然频率与"检查"方法计算得到的自然频率是相同的。

我们使用如图16-23所示的对称LRC电路重复进行MATLAB计算。我们将会看到，该电路具有一个实数极点和两个复数极点。

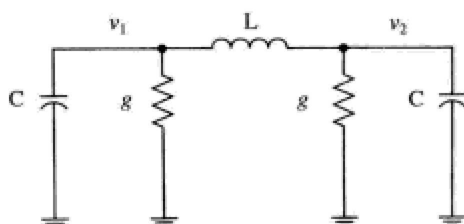


图16-23 对称LRC电路

我们忽略节点方程的细节，得到该电路的状态矩阵为

$$\begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{i} \\ \dot{v}_2 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} g/C & 1/C & 0 \\ -1/L & 0 & 1/L \\ 0 & -1/C & g/C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ i \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{16-69}$$

下面的MATLAB脚本用来解答这些联立方程组。

```
function LRC

g=1;                    % Conductance
C=1;                    % Capacitors
L=1;                    % inductance

A=-[ g/C 1/C 0
   -1/L 0 1/L
   0 -1/C g/C];         % Form A matrix

% Find natural frequencies and mode shapes
[Modeshapes, NatFreqs] = eig(A);

% Normalize modeshapes
N=size(Modeshapes,1) ;
for i=1:N
Modeshapes(:,i)=Modeshapes(:,i)/max(abs(Modeshapes( : , i) ) );
end

% Display modeshapes
Natural_Frequencies=NatFreqs
Mode_Shapes=Modeshapes
```

```
» lrc

Natural_Frequencies =
  -1.0000                  0                        0
   0              -0.5000 + 1.3229i                 0
   0                       0               -0.5000 - 1.3229i
Mode_Shapes =
  1.0000              0.7071                    0.7071
  0.0000        -0.3536 - 0.9354i         -0.3536 + 0.9354i
  1.0000             -0.7071                   -0.7071
```

注意上面得到的自然频率和模式形状。第一个自然频率（$\omega=-1$）的模式形状为[1　0　1]，其含义是$v_1=v_2$，并且$i=0$。第二和第三个自然频率为$\omega_{2,3}=-0.5\pm1.3229j$，对应于一对复极点（该模式具有振荡特性）。模式形状也为复数，其含义是这种模式下v_1、v_2和i的相位不一致。

我们接下来使用该方法来分析RC阶梯形电路（如图16-24所示）。

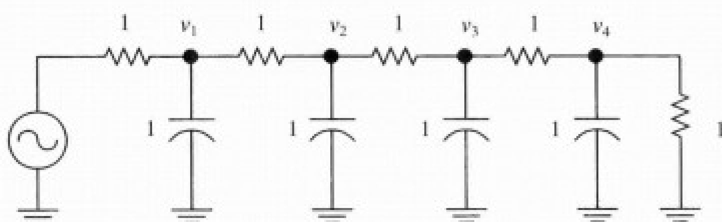


图16-24　RC阶梯形电路

为了求解RC阶梯形电路的自然频率和模式形状，将输入端接地，形成导纳G和电容C的矩阵。使用状态空间表示形式，该电路的状态方程为

$$\begin{Bmatrix}\dot{v}_1\\\dot{v}_2\\\dot{v}_3\\\dot{v}_4\end{Bmatrix}=-\frac{G}{C}\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{Bmatrix}\tag{16-70}$$

MATLAB解答过程如下

```
» rcladder

A =
    -2     1     0     0
     1    -2     1     0
     0     1    -2     1
     0     0     1    -2

Natural_Frequencies =
    -1.3820      0          0          0
       0     -0.3820        0          0
       0         0      -2.6180        0
       0         0          0      -3.6180
Mode_Shapes =
    1.0000    -0.6180    -1.0000    -0.6180
    0.6180    -1.0000     0.6180     1.0000
```

```
-0.6180    -1.0000     0.6180    -1.0000
-1.0000    -0.6180    -1.0000     0.6180
```

16.11 尺度定律应用简介

尺度定律（scaling law）和量纲分析（dimensional analysis）是确定如何测量结构、电路和进程等内容的极具价值的工具。使用尺度定律的理论基础如下：构建一个全尺度的原型系统常常是不切实际的和/或危险的，替代方法就是构建一个更小规模的模型，使用尺度定律确定全尺度系统的行为特性。尺度建模方法常用于下列应用中。常用物理量见表16-2符号列表。

- 空气动力学（aerodynamics）（风洞测试（wind tunnel test））；
- 流体力学（hydrodynamics）；
- 磁悬浮（magnetic）（也就是磁悬浮列车（Maglev））；
- 火箭技术（rocketry）；
- 功率电子（power electronics）。

分析研究工程领域和自然界的简单例子可以推导出许多有趣的尺度定律。

表16-2 符号列表

B	磁通量密度（T）
C_d	空气动力学/流体力学阻力系数（drag coefficient）
E_k	动能＝1/2MV2（J）
f_d	牵引力（N）
l	长度尺度
P	功率（J，或者W/s）
V	速度（m/s）
σ	电导率（1/（Ω · m））
ε	介电常数（F/m）
μ	磁导率（H/m）
μ_0	自由空间的磁导率（$4\pi\times10^{-7}$H/m）

16.11.1 几何尺度定律

通过基本的数学知识，我们知道简单物体的表面积以线性尺寸的平方按比例变化，简单物体的质量则是以线性尺寸的立方按比例变化[①]。球体的表面积为$4\pi r^2$，体积为$4\pi r^3/3$，因此体积和表面积的比率为$1/3r$。换句话说，球体的体积和表面积的比率以长度尺度l按比例变化。

16.11.2 鱼/船的速度（弗劳德定律）

如果轮船（或者是一条鱼）每一维的长度尺度均以相同的比例因子增大，那么轮船的速度按什么比例变化？一个引擎可以提供的推动功率与引擎的质量成比例，引擎质量的比例为l^3，即

$$P_p = k_1 l^3 \tag{16-71}$$

船体的阻力与速度成比例。比例常数为阻力常数C_d，它又与船体的面积成比例

$$f_D = C_d v = k_2 l^2 v \tag{16-72}$$

① 本例以及下面的某些例子均摘自Darcy W. Thompson的著作"On Growth and Form"。

在稳定状态时，推动功率与船体阻力形成的功率相互平衡，功率等于力与速度的乘积。因此，阻力产生的功率为

$$P_D = f_d v = k_2 l^2 v^2 \tag{16-73}$$

稳定状态的推动功率与阻力功率相等，得

$$k_1 l^3 = k_2 l^2 v^2 \tag{16-74}$$

计算该表达式，得

$$v^2 = \frac{k_1}{k_2} l \Rightarrow v \propto \sqrt{l} \tag{16-75}$$

该结果即是闻名的弗劳德定律，该定律表明，如果其他的任何方面都相等，轮船的速度以长度尺度的平方根按比例变化。比如，如果100ft (1ft=0.3048m) 长的渡船的行进速度为10mile/h (1mile/h=0.447m/s)，那么尺度放大1000倍的轮船的最大速度则为32mile/h左右。

16.11.3　树上的果实

植物缩放尺度的大小又为多少呢？比如，果实的柄（图16-25）可以承受某个最大压力（单位面积所受的力），以N/m为单位。果实的柄使出的力与果实的质量成比例，即

$$f \propto l^3 \tag{16-76}$$

果实的柄的面积与l^2成比例变化。因此，力与面积的比率按l尺度变化。从这个缩放定律可以得到下列结果。

- 高大的建筑如果是垂直建造的，那么很可能会被自身重量压迫倒塌。
- 长年的树木具有更大的根基。
- 埃菲尔铁塔是锥形的。
- 大的果实生长在地面上。

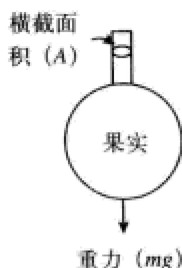


图16-25　带柄的果实

16.11.4　挠矩（bending moment）

通过基本的力学知识，如果柱子的横截面积保持不变，那么柱子受自身重量的影响发生弯曲，其弯曲程度与长度的平方按比例变化。换句话说，一根长为12ft、横截面积为$2 \times 4\text{ft}^2$、一端固定的柱子，是长为6ft、横截面积为$2 \times 4\text{ft}^2$、一端固定的柱子的挠曲程度的4倍。从本质上理解这种作用：随着动物的体积不断增大，其腹肢变得更短更粗。

16.11.5　身体的尺寸和热量（伯格曼定律）

身体内产生的热量（也就是功率）与质量成比例，即l^3。热量损失与表面积成比例，即l^2。两者的比率为

$$\frac{\text{热量损失}}{\text{热量合成}} \propto \frac{1}{l} \tag{16-77}$$

该比率表明，小动物比大动物按比例损失更多的热量。这就是鸟类和老鼠需要汲取与它们的身体重量成比例的大量食物的原因。一个人每天摄取的食物为其体重的1/50，而一只老鼠摄取的食物则大约为其体重的一半。另一个结果是在北极圈内不存在体格很小的动物。

16.11.6 身高与跳跃（博雷利定律）

动物跳跃时，腿部肌肉给予动物一个推动力，这种推动力与肌肉的质量成比例，即与l^3成比例。因此，动物的速度为

$$v \propto \frac{\text{肌肉形成的推动力}}{\text{质量发生的位移}} = \text{常数} \tag{16-78}$$

博雷利定律表明，为什么所有的动物差不多跳同样的高度。

16.11.7 步行速度（弗劳德定律）

假设每个人的腿行进时摆动同样的角度α，确定步行速度尺度定律的模型如图16-26所示。每步摆动的距离与A/B成比例。假设腿的行为特性与钟摆相同，每步摆动使用的时间为

$$t \propto \sqrt{\frac{A}{B}} \tag{16-79}$$

图16-26 确定步行速度的尺度模型

步行速度v为

$$v \propto \frac{\text{距离}}{\text{时间}} \propto \sqrt{\frac{A}{B}} \tag{16-80}$$

这又是弗劳德定律的典型应用。

16.11.8 电容

一个电容的时间常数RC与随其大小变化的尺度如何呢？并联极板电容如图16-27a所示。并联极板之间的距离为d，极板之间的填充材料的介电常数为ε，电导率为σ。该电容的电子模型如图16-27b所示。电容的大小为

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{16-81}$$

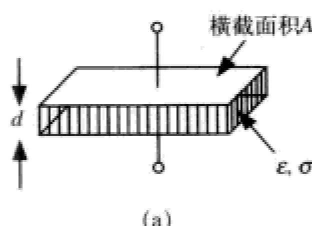
这里A为极板的面积，电阻为

$$R = \frac{d}{\sigma A} \tag{16-82}$$

因此，时间常数为

$$RC = \frac{\varepsilon}{\sigma} \tag{16-83}$$

其与电容的尺寸无关。



(a)



(b)

图16-27 电容模型

16.11.9 电感

单环电感的模型如图16-28所示。

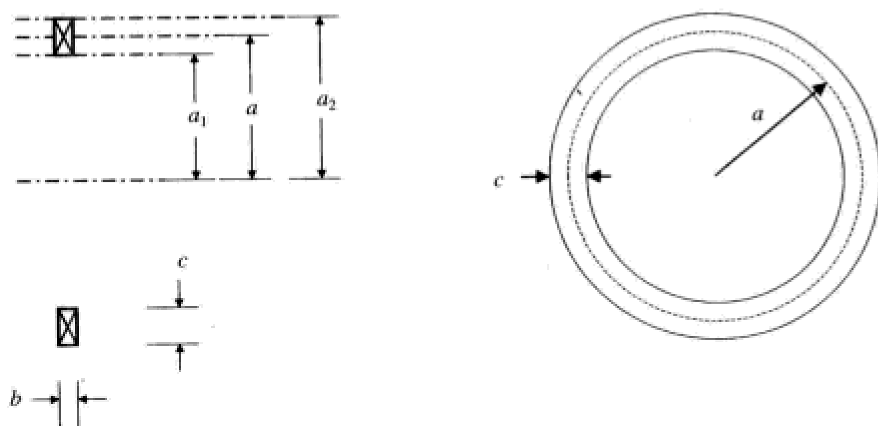


图16-28 电感模型

电感的平均半径为a，轴向厚度为b，径向宽度为c。对于薄环来说，$c \ll a$，环的电阻为

$$R \approx \frac{2\pi a}{bc\sigma} \tag{16-84}$$

使用Frederick Grover提供的电感参考文献可以求解环的电感。电感的计算为

$$L \approx kaPF \tag{16-85}$$

这里，

K为常数

P为$c/(2a)$的函数

F为b/a的函数

电感的时间常数为L/R，可以按照公式16-86来计算

$$\frac{L}{R} \approx \frac{kPFbc\sigma}{2\pi} \propto l^2 \tag{16-86}$$

这里得到一个有趣的结果：磁场尺度定律表明，大体积的磁场元件在能量转换方面比小体积元件更为高效。对于这种磁盘结构的电感来说，这个结果可以使用电感和电阻的比值进行量化表示。电感L大致与a成比例。环的电阻则与a/bc成比例，这是电流路径的长度与环的横截面积。因此，电感与电阻的比率与bc成比例，或者说与环的横截面积成比例。如果所有环的长度按照相同的比例因子l增大，则这个比率的数值按照比例因子l^2增大，即按长度的平方增大。这个尺度定律表明，电感的效率随着l^2的增大而提高（电机与其相同）。

16.11.10 电磁场的升力

通过分析磁场的压强，可以得到电磁场的升力f_l（如图16-29所示），它大致为

$$f_l \approx \frac{B^2 A}{2\mu_0} \tag{16-87}$$

这里B为磁场的磁通量密度（单位T），A为电磁场两个磁极的整体面积，μ_0为自由空间的磁导率（magnetic permeability）。

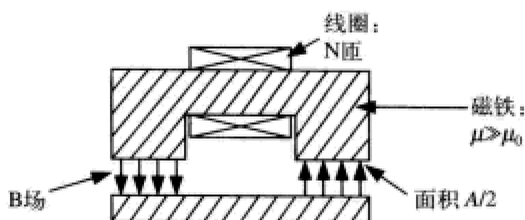


图16-29 电磁场

这个升力随磁场长度尺寸的变化尺度如何呢？磁场的磁通量密度B可以按照公式16-88进行近似求解

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{2g} \propto \frac{N}{l} \tag{16-88}$$

这里g为空气间隙。线圈匝数与面积成比例，即

$$N \propto l^2 \tag{16-89}$$

升力与B^2A成比例，或者说与l^4成比例，而磁体的重量则按l^3变化。因此，升力与重量的比率与l成比例。我们可以从这里推导出，一个微小磁体不可能举起自身的重量。

16.12 本章习题

习题16.1

图16-30所示为LC电路。

(a) 使用类比方法，求解该LC电路的自然频率。

(b) 使用SPICE软件对 (a) 的结果进行仿真。设置合适的电感电流起始条件，独立地激励每种模式。

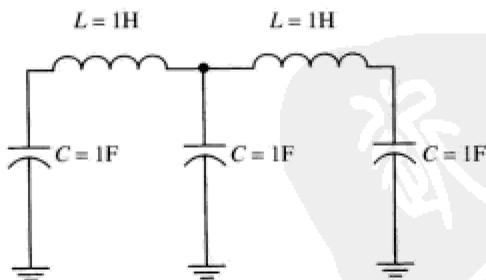


图16-30 习题16.1的电路

习题16.2

使用克莱姆法则，求解下列联立线性方程组。

$$x+y=-1$$
$$2x-3y=13$$

习题16.3

Marc高6ft，Lisa高5ft[①]。Marc以最舒适的步行速度在20min内行进了1mile (1mile=1609.344m)。那么Lisa以她最舒适的速度行进1mile需要花费多长时间呢？粗略估计他

① 为了保护无关的人，这里改变了他们的名字。

们2岁的女儿Sophie行进1mile又要花费多长时间？

习题16.4

求解一个铝基板的热阻，它的长度T（沿着热流的方向）=1mm，横截面积$A=100\text{mm}^2$。假设金属铝的热导率$k=240\text{W/}(\text{m}\cdot{}^\circ\text{C})$。

习题16.5

晶体管2N3906用在一个电路中，晶体管在电路中耗散100mW的能量。环境温度为40°C。那么晶体管的结温为多少？假设结与环境之间的热阻为200°C/W，绘制热电路。

习题16.6

（a）晶体管安装在一个散热器上，绘制合适的晶体管静态热模型（如图16-31所示）。要求包含结温、罩子的温度以及散热器的温度。

（b）假设晶体管的整体散热为10W。假设晶体管具有下列参数：$T_A=50^\circ\text{C}$、$R_{THjc}=1^\circ\text{C/W}$、$R_{THcs}=1^\circ\text{C/W}$。计算散热器到环境之间的最大热阻$R_{THsa}$，保持晶体管的结温在150°C以下。

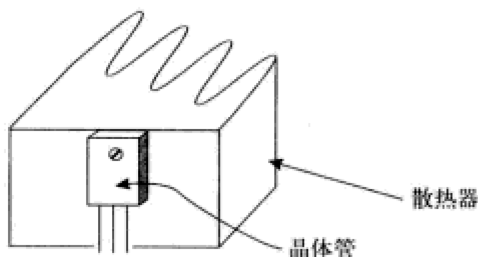


图16-31 习题16.6安装在散热器上的晶体管

习题16.7

使用图16-32所示的对称RC电路。

（a）假设在$t=0$时刻，电路的起始条件为$v_1=v_2=1\text{V}$。描绘时间$t>0$时，电压v_1（t）和v_2（t）的响应。

（b）假设$t=0$时刻，$v_1=1\text{V}$、$v_2=-1\text{V}$。描绘时间$t>0$时，电压v_1（t）和v_2（t）的响应。

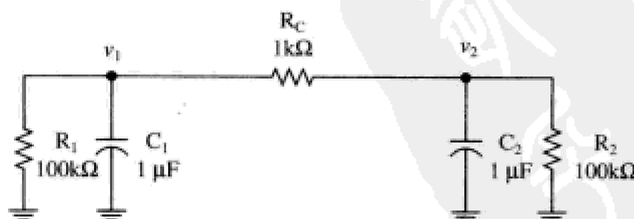


图16-32 习题16.7的电路

习题16.8

汽车引擎模块的参数如下。

质量：铝，重1000kg。

空闲时的功率耗散：5000W。

金属铝的热容：$c_p=900\text{J/kg}\cdot\text{C}$。

（a）当第一次开启引擎时，引擎的温度与环境温度相同（$T_A=25^\circ\text{C}$），引擎内没有水循环

（因为引擎是冷的）。没有热循环时，引擎到环境的热阻为0.1°C/W。生成该系统的集总热模型，假设发动机各处的温度都是相等的。注意热容为Mc_p（J/°C）。

(b) 当引擎的温度达到100°C，引擎变热。引擎变热花费了多长时间？

(c) 运行期间，假设引擎的温度达到最终值125°C，绘制引擎被关掉之后的温度变化。

习题16.9

该问题关注安装在十字铜块上的功率电阻，如图16-33所示。十字铜块每个臂的横截面积为1cm×1cm，如图中所示，长度为5cm。与铜块的横截面积相比，电阻的横截面积非常小（因此，可以考虑电阻为一个点功率源）。铜块的4个臂安装在外墙上，外墙的温度保持25°C不变。一层平均厚度为0.02mm的热胶用于铜块与外墙之间的边沿热耦合。因为该层胶非常薄，可以忽略热胶层的热容。

(a) 生成该系统的集总热模型。

(b) 如果在$t=0$时刻向电阻施加100W能量，$t\rightarrow\infty$时，电阻的最终温度为多少？（假设电阻和铜块之间的热熔焊点是完美的。）

(c) 在一个单独的实验中，$t=0$时刻之前，外墙、铜块和电阻三者之间的温度相同，功率电阻内不存在电流。假设$t=0$时刻，功率电阻开始被施加能量，耗散功率100W。根据你得出的热模型和所作的简化假设，描绘所有时刻电阻的温度变化，标注断点、时间常数等。

（提示：利用对称方法，将大问题拆分为更小的问题，使用功率流路径的直观推理，可以大大简化（b）和（c）的求解过程。）

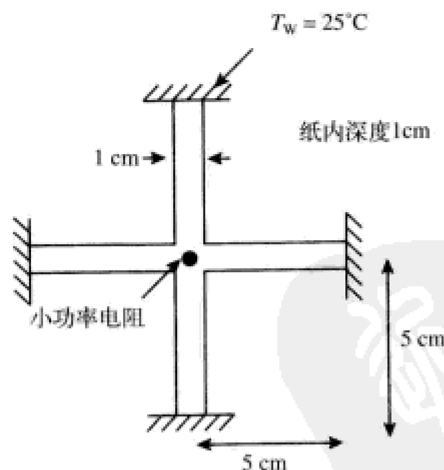


图16-33 习题16.9的热系统

16.13 参考文献

Fogel, M., Editor, *The Automatic Control Systems/Robotics Problem Solver*, Research and Education Association, Piscataway NJ, 1990.

General Electric Corp., *SCR Handbook, 6th Edition*. 这是一本非常好的通用手册，上面有许多关于散热器设计的实践建议以及功率器件的安装与散热技术。

Gilbert, B., "A New Wide-Band Amplifier Technique" *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. SC-3, no. 4, December 1968, pp. 353-365.

______, "A Precise Four-Quadrant Multiplier with Subnanosecond Response," *IEEE Journal of Solid State Circuits*,

vol. SC-3, no. 4, December 1968, pp. 365-373.

______ , "A DC-500 MHz Amplifier Multiplier Principle," *1968 ISSCC Digest of Technical Papers*, pp. 114-115.

______ , "Translinear Circuits: A Proposed Classification," *Electronics Letters*, vol., no. 1, pp. 14-16, 1975.

______ , "Current-Mode Circuits from a Translinear Viewpoint: A Tutorial," in C. Toumazou, F. J. Lidgey, and D. G. Haigh, eds., *Analogue IC Design: The Current-Mode Approach*, London: Peter Peregrinus, pp. 11-91, 1990.

______ , "Translinear Circuits—25 Years On, Part I: The Foundations," *Electronic Engineering*, vol.65,no. 800, pp. 21-24, 1993.

______ , "Translinear Circuits: An Historical Review," *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, vol. 9, no. 2, pp. 95-118, 1996.

Grover, F., *Inductance Calculations*, originally published by D. Van Nostrand, 1946, reprinted by Dover, 2004.

Jezierski, E., "On Electrical Analogues of Mechatronic Systems," *Proceedings of the 2001 Second International Workshop on Motion and Control*, October 18-20, 2001, pp. 181-188.

Kassakian, J., Schlecht, M., and Verghese, G., *Principles of Power Electronics*, Prentice-Hall, 1991. 涉及功率电子设计方方面面的参考文献，还包括磁场元件设计。

Klein, Richard E., "Teaching Linear Systems Theory Using Cramer's Rule," *IEEE Transactions on Education*, vol. 33, no. 3, August 1990, pp. 258-267.

Langlois, P. J., "Graphical Analysis of Delay Line Waveforms: A Tutorial," *IEEE Transactions on Education*, vol. 38, no. 1, February 1995, pp. 27-32.

Mathworks, Inc., *MATLAB Reference Guide*, 1992.

Middlebrook, R. D., "Null Double Injection and the Extra Element Theorem," *IEEE Transactions on Education*, vol. 32, no. 3, August 1989, pp. 167-180.

______ , "The Two Extra Element Theorem," *Proceedings of the IEEE Frontiers in Education* Twenty-First Annual Conference, Purdue University, September 21-24, 1991, pp. 702-708.

______ , "Low-Entropy Expressions: The Key to Design-Oriented Analysis," *Proceedings of the IEEE Frontiers in Education* Twenty-First Annual Conference, Purdue University, September 21-24, 1991, pp. 399-403.

Rao, Singiresu S., *Mechanical Vibrations*, 3d edition, Addison-Wesley, 1995.

Rothkopf, Elliot, "Teaching for Understanding—Analogies for Learning in Electrical Engineering," *1995 IEEE Frontiers in Education Conference*, session 2b4, pp. 2b4.9-2b4.13.

Seevinck, E., and Wiegerink, R. J., "Generalized translinear circuit principle," *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Volume 26, no. 8 , August 1991, pp. 1098-1102.

Shen, Liang Chi, and Kong, JinAu, *Applied Electromagnetism*, Brooks/Cole, 1983.

Teoh, Chin Soon, and Davis, Lionel E., "A Coupled Pendula System as an Analogy to Coupled Transmission Lines," *IEEE Transactions on Education*, vol. 39, no. 4, November 1996,pp. 548-557.

Thompson, D'Arcy W., *On Growth and Form*, Dover Publications (reprinted), 1992.

Thornton, Richard D., *Electronic Circuits Modeling, Analysis, Simulation; Intuition and Design*, MIT course notes, January 1993.

Vorperian, Vatche, "Improved Circuit-Analysis Techniques Require Minimum Algebra," *EDN*, August 3, 1995, pp. 125-134.

Zahn, Markus, *Electromagnetic Field Theory: A Problem Solving Approach*, reprinted by Krieger, 1987.

Intuitive Analog Circuit Design

实用模拟电路设计

本书是Marc T. Thompson博士20年模拟电路设计和教学经验的总结，概括了分析和研究模拟电路和系统的一些方法。作者强调尽量少用数学，而是借助直觉，领悟“行之有效的优秀模拟电路设计”。书中全面探讨了各种模拟电路——包括晶体管放大器(CMOS管和双极性晶体管)、晶体管开关效应、热电路设计、磁电路设计以及控制系统等等——的设计与分析技术。在阐述中，多次借用易于理解的数字电路概念进行类比，并提供了大量案例和实战经验，便于读者学习。本书既适合高校课堂教学，也是工程技术人员很好的参考书。

本书的教辅资源和Matlab文件可以从图灵网站免费注册下载。

Marc T. Thompson 资深模拟电路技术专家。麻省理工学院博士。目前担任Thompson咨询公司总裁，主要从事模拟电路设计和电力电子、磁系统的设计和分析。他同时还是伍斯特理工学院电子工程专业的兼任副教授。

本书译自原版*Intuitive Analog Circuit Design*，并由Elsevier授权出版。







ISBN 978-7-115-19235-6/TN

定价：59.00 元

本书相关信息请访问：图灵网站 http://www.turingbook.com
读者/作者热线：(010) 88593802
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com

分类建议 电子电气/电路设计

人民邮电出版社网址 www.ptpress.com.cn